UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED A INFORMATIKY

Pytagorova veta v školskej praxi

doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

Katedra matematiky

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Publikácia je podporená z projektu *"Skvalitňovanie praktickej prípravy budúcich pedagogických zamestnancov na UKF" ITMS 312011Z815",* ktorý sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

www.esf.gov.sk www.minedu.gov.sk

Názov: Pytagorova veta v školskej praxi

Edícia Prírodovedec č. 799

Autori:

doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

ISBN 978-80-558-1953-2

Obsah

Úvod

V publikácii sa venujeme Pytagorovej vete a jej využitiu v matematickom vzdelávaní. Objavil ju Pytagoras zo Samu (580 – 500 p. n. l.), ktorý bol jedným z najznámejších gréckych filozofov a táto veta patrí medzi najdôležitejšie vety geometrie. Našiel spôsob, ako určiť všetky pravouhlé trojuholníky s celočíselnými dĺžkami strán.

Pytagorovou vetou teda vieme vypočítať dĺžky strán v pravouhlom trojuholníku prakticky, ale aj teoreticky, taktiež vieme pomocou tejto vety bez rysovania aj merania zistiť, či je daný trojuholník pravouhlý.

Pytagorova veta patrí medzi často používanú vetu v školskej praxi. Zoznamujú sa s ňou žiaci už na základnej škole a používajú ju počas celého svojho štúdia. Súčasťou publikácie sú aj rôzne aktivity a metodika k Pytagorovej vete na jej pochopenie a utvrdenie, ktoré zároveň súvisia s bádateľsky orientovaným vyučovaním.

Nami vytvorené aktivity a metodika sú zamerané na objavenie Pytagorovej vety s využitím napríklad štvorcovej siete. Ako ukážeme v týchto aktivitách, veľmi vhodnou pomôckou je využitie štvorcovej siete pri jej objavovaní. Pred zaradením nasledujúcej aktivity do vyučovacieho procesu je vhodné, aby učiteľ so žiakmi precvičil prácu so štvorcovou sieťou. Podstatné je, aby sa zameral na orientáciu v štvorcovej sieti.

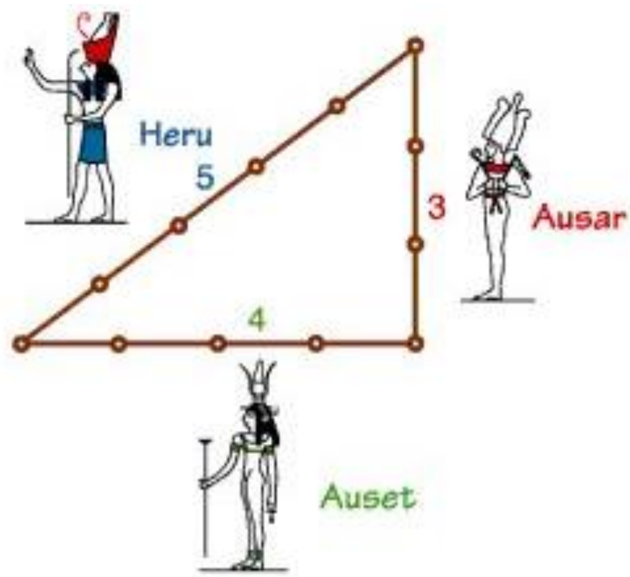
Uvádzame iný prístup k formulovaniu Pytagorovej vety, a preto aktivity budú zamerané na jej objavenie. Žiaci vedia, že sa Pytagorova veta používa pre pravouhlý trojuholník, poznajú jej znenie aj význam, a tiež používajú samostatne Pytagorovu vetu na riešenie kontextových úloh z reálneho praktického života. V uvedenej aktivite je na učiteľovi, akú sadu úloh k danej problematike vytvorí a tým môže dať príležitosť aj slabším žiakom, ktorí môžu experimentovať a je možné, že nájdu aspoň čiastkové riešenie niektorej úlohy.

V predloženej publikácii sme sa teda zamerali na Pytagorovu vetu a s ňou spojenú problematiku vyučovanú v sekundárnom matematickom vzdelávaní. Prezentujeme potrebné nové a efektívne nástroje na zlepšenie tohto vzdelávacieho procesu. Nami uvedené skúsenosti a názory sú určené širšej odbornej verejnosti, ale aj učiteľom matematiky z praxe, taktiež je určená budúcim učiteľom matematiky ako skriptum k predmetu Vybrané kapitoly z teórie vyučovania matematiky.

Autorky

1 Pytagorova veta v sekundárnom matematickom vzdelávaní

Pytagorova veta platí pre pravouhlý trojuholník. Pravé uhly vytyčovali už starí Egypťania alebo Babylončania, pretože ich potrebovali pri rôznych stavbách alebo pôdoryse pyramíd. Pravé uhly merali pomocou povrazu, ktorý rozdelili uzlami na 12 dielikov. Následne vytvorili z tohto povrazu trojuholník, pričom jednotlivé strany mali dĺžku 3, 4 a 5 týchto dielikov (Obr. 1). Využili jednu vlastnosť trojuholníka, t. j. oproti najdlhšej strane (5 dielikov) leží najväčší uhol (pravý).



Obr. 1 Meranie pravých uhlov v minulosti
(Zdroj: https://oskole.detiamy.sk/clanok/pytagorova-veta-a-jej-odvodenie)

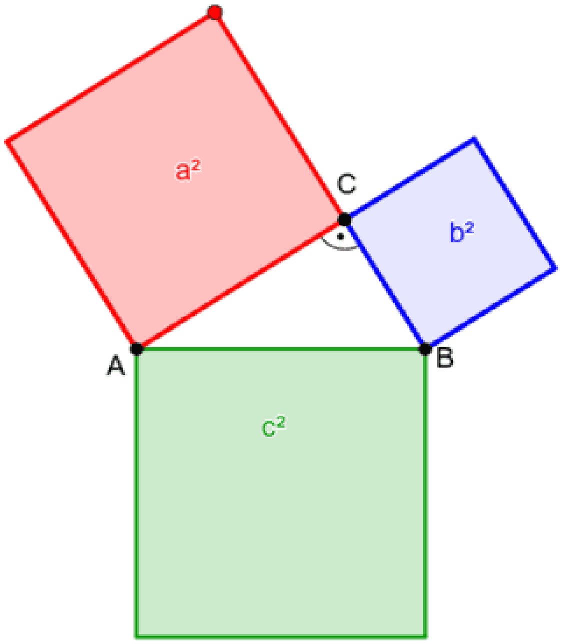
Najčastejšie Pytagorovu vetu žiaci poznajú vyjadrenú len algebrickým zápisom $c^2 = a^2 + b^2$ a vedia, že platí v pravouhlom trojuholníku s odvesnami *a, b* a s preponou *c*. Poznajú označenie jednotlivých strán v pravouhlom trojuholníku, riešia aplikačné úlohy s využitím tejto vety.

Znenie Pytagorovej vety (Obr. 2):

Obsah štvorca nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov nad oboma jeho odvesnami.

Obrátená Pytagorova veta:

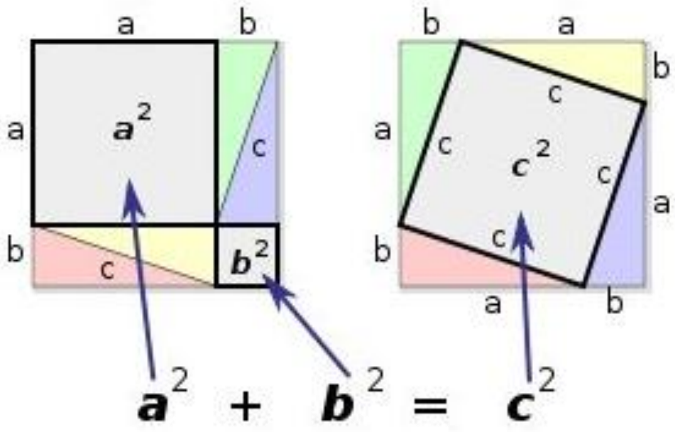
Ak pre dĺžky strán a, b, c trojuholníka ABC platí vzťah $c^2 = a^2 + b^2$*, potom je tento trojuholník pravouhlý s odvesnami a, b a preponou c.*



Obr. 2 Pytagorova veta graficky znázornená

Známe sú rôzne dôkazy Pytagorovej vety. Najznámejší dôkaz Pytagorovej vety je s využitím Euklidových viet. Pre pravouhlý trojuholník *ABC* platia Euklidove vety o odvesne: $a^2 = c.c_a$, $b^2 = c.c_b$. Sčítaním ľavých a pravých strán týchto rovníc získame vzťah: $a^2 + b^2 = c.c_a + c.c_b = c.(c_a + c_b) = c.c = c^2$.

Zaujímavý pre žiakov je aj geometrický dôkaz Pytagorovej vety (pozri Obr. 3):



Obr. 3 Dôkaz Pytagorovej vety

Žiaci sa oboznamujú s Pytagorovou vetou prvýkrát v 9. ročníku základnej školy. V inovovanom Štátnom vzdelávacom programe pre 2. stupeň základnej školy (2015) je uvedené, že žiak na konci 9. ročníka základnej školy vie / dokáže:

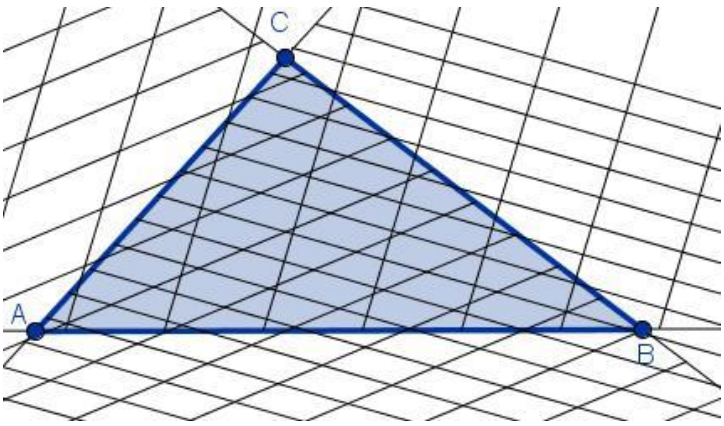
- vymenovať základné prvky a vlastnosti pravouhlého trojuholníka,
- formuláciu Pytagorovej vety aj jej význam,

- zapísať Pytagorovu vetu v pravouhlom trojuholníku *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C* vzťahom $c^2 = a^2 + b^2$, ale aj vzťahom pri inom označení strán pravouhlého trojuholníka,
- vyjadriť a zapísať zo základného vzťahu Pytagorovej vety obsah štvorca nad odvesnami ($a^2 = c^2 - b^2, b^2 = c^2 - a^2$), podobne aj pri inom označení strán trojuholníka,
- vyjadriť vzťah pre výpočet dĺžky odvesien pomocou odmocnín $\left(a = \sqrt{c^2 - b^2}, b = \sqrt{c^2 - a^2}\right)$, podobne aj pri inom označení strán trojuholníka,
- vypočítať dĺžku tretej strany pravouhlého trojuholníka, ak sú známe dĺžky jeho dvoch zvyšných strán,
- samostatne použiť Pytagorovu vetu na riešenie kontextových úloh z reálneho praktického života.

Problematiku o trojuholníku, ktorá je potrebná k odvodeniu Pytagorovej vety a následne k jej využívaniu v riešeniach geometrických úloh, sme spracovali ako súvislý didaktický materiál a je vhodný pre žiakov základnej školy. Učiteľ môže tento materiál využiť vo vyučovacom procese, prípadne si ho môže doplniť alebo upraviť s ohľadom na možnosti svojich žiakov.

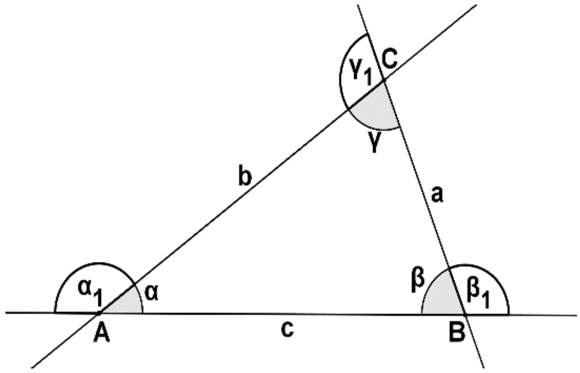
Časť matematiky, ktorá sa zaoberá geometriou roviny nazývame *planimetria* (slovo latinského a gréckeho pôvodu: latinsky *planum* – rovina, grécky *metrein* – merať).

Trojuholník je jeden zo základných rovinných geometrických útvarov. Nech sú v rovine dané tri rôzne body A, B, C, ktoré neležia na jednej priamke, trojuholník ABC je útvar, ktorý vznikne prienikom polrovín $\overrightarrow{ABC}, \overrightarrow{BCA}, \overrightarrow{CAB}$ (Obr. 4).



Obr. 4 Trojuholník ako prienik polrovín

Uvedieme ďalej označenie jednotlivých strán a uhlov v trojuholníku ABC (Obr. 5):



Obr. 5 Označenie strán a uhlov v trojuholníku

A, B, C... vrcholy trojuholníka ABC
$a = BC, b = AC, c = AB$... strany trojuholníka ABC
$\alpha = \sphericalangle BAC, \beta = \sphericalangle ABC, \gamma = \sphericalangle ACB$ ... vnútorné uhly trojuholníka ABC
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ... vonkajšie uhly trojuholníka ABC
(dvojice uhlov: $\alpha, \alpha_1; \beta, \beta_1; \gamma, \gamma_1$ sú susedné uhly)

Vlastnosti a prvky trojuholníka

Súčet dĺžok ľubovoľných dvoch strán každého trojuholníka je väčší ako dĺžka tretej strany, rozdiel dĺžok ľubovoľných dvoch strán každého trojuholníka je menší ako dĺžka tretej strany. Vlastnosť sa nazýva trojuholníková nerovnosť.
Súčet veľkostí vnútorných uhlov každého trojuholníka je $180°$.

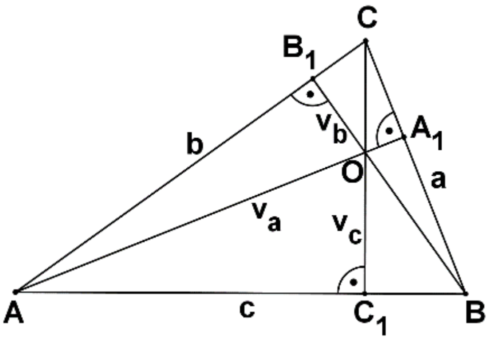
Oproti dlhšej (kratšej) strane trojuholníka leží väčší (menší) vnútorný uhol tohto trojuholníka. Oproti zhodným stranám trojuholníka ležia zhodné vnútorné uhly.

Veľkosť vonkajšieho uhla trojuholníka sa rovná súčtu veľkostí vnútorných uhlov tohto trojuholníka, ktoré sú susednými uhlami zvyšných dvoch vonkajších uhlov daného trojuholníka.

Výšky každého trojuholníka sa pretínajú práve v jednom bode, ktorý sa nazýva ortocentrum, ozn. *O* (pozri Obr. 6, Obr. 7).

Výška trojuholníka

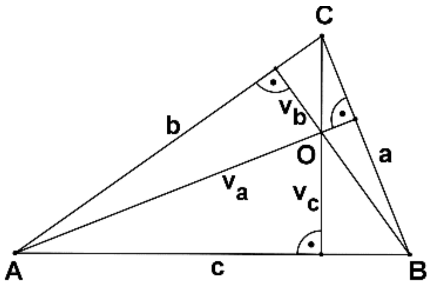
Kolmica zostrojená z vrcholu trojuholníka na priamku, na ktorej leží protiľahlá strana trojuholníka, sa nazýva výška trojuholníka. Priesečník výšok *O* sa nazýva ortocentrum. Výšky trojuholníka ABC na obr. 6 sú úsečky AA_1, BB_1, CC_1.



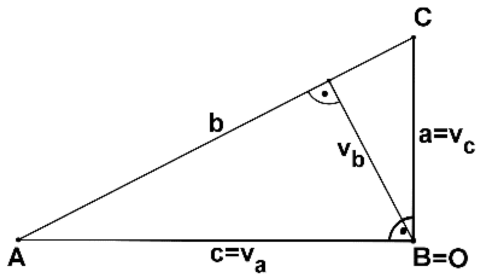
Obr. 6 Výšky trojuholníka

Výšky trojuholníka a ortocentrum v rôznych typoch trojuholníka

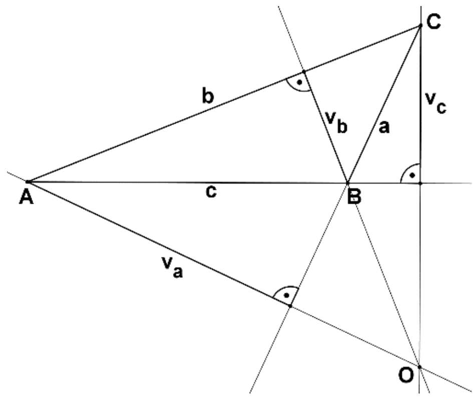
Ostrouhlý trojuholník



Pravouhlý trojuholník



Tupouhlý trojuholník

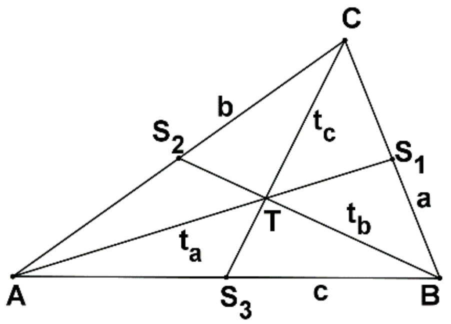


Obr. 7 Výšky a ortocentrum trojuholníka

<u>Ťažnice trojuholníka</u>

Ťažnice každého trojuholníka sa pretínajú práve v jednom bode, ktorý nazývame ťažisko, ozn. *T* (pozri Obr. 8).

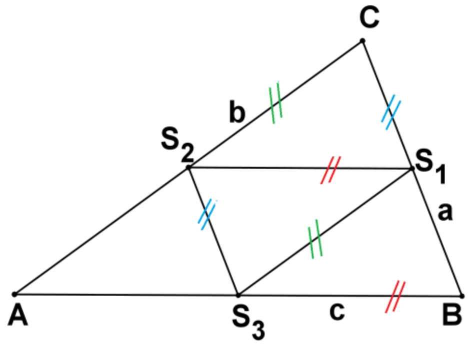
V trojuholníku ABC sú body S_1, S_2, S_3 postupne stredmi strán a, b, c.
Úsečky $AS_1 = t_a$, $BS_2 = t_b$, $CS_3 = t_c$ sú ťažnice trojuholníka ABC. Priesečník ťažníc T sa nazýva ťažisko a platí: $|AT|:|S_1T| = |BT|:|S_2T| = |CT|:|S_3T| = 2:1$.



Obr. 8 Ťažnice trojuholníka

Stredné priečky trojuholníka (pozri Obr. 9)

V trojuholníku ABC sú body S_1, S_2, S_3 postupne stredmi strán a, b, c.
Úsečky S_1S_2, S_2S_3, S_1S_3 sú stredné priečky trojuholníka ABC. Platí: $S_1S_2 \parallel AB$ a $|S_1S_2| = \frac{1}{2}|AB|$, $S_2S_3 \parallel BC$ a $|S_2S_3| = \frac{1}{2}|BC|$, $S_1S_3 \parallel AC$ a $|S_1S_3| = \frac{1}{2}|AC|$.



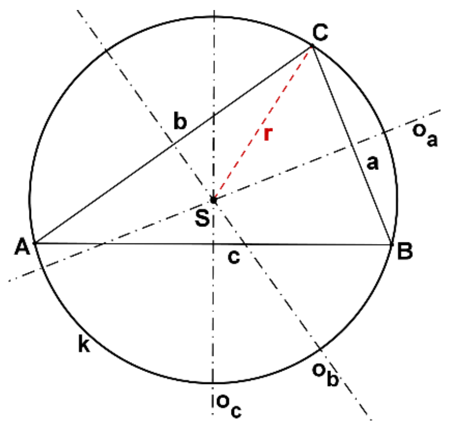
Obr. 9 Stredné priečky trojuholníka

Kružnica opísaná a vpísaná trojuholníku (pozri Obr. 10, Obr. 11)

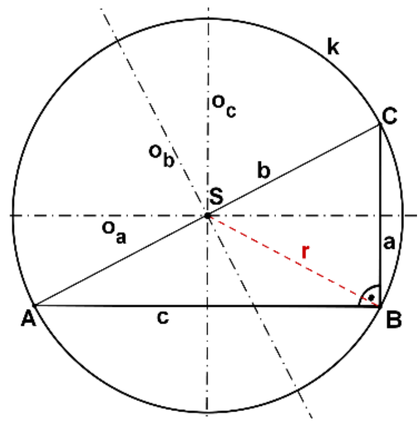
Osi strán každého trojuholníka sa pretínajú práve v jednom bode S. Tento bod S je stredom opísanej kružnice trojuholníku, na obr. 10 je to kružnica $k(S, r)$, ktorej polomer $r = |SA| = |SB| = |SC|$.

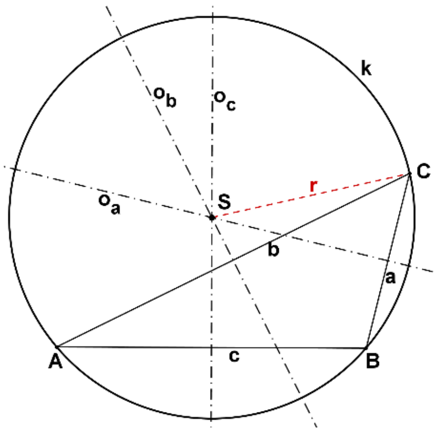
Na obr. 10 je kružnica opísaná danému trojuholníku pre rôzne typy trojuholníkov.

Ostrouhlý trojuholník



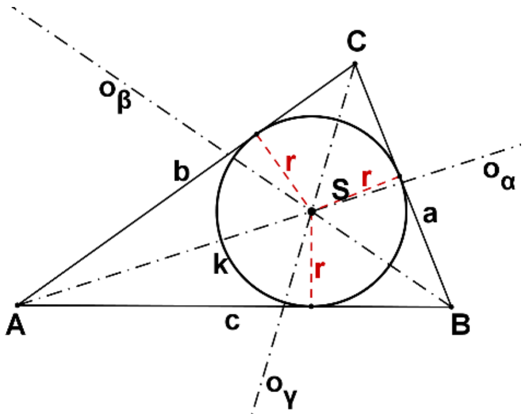
Pravouhlý trojuholník





Obr. 10 Opísaná kružnica trojuholníku

Osi vnútorných uhlov každého trojuholníka sa pretínajú práve v jednom bode S (Obr. 11). Tento bod S je stredom vpísanej kružnice $k(S,r)$ do trojuholníka (stred S vpísanej kružnice je vnútorným bodom trojuholníka).



Obr. 11 Vpísaná kružnica trojuholníku

<u>Zhodnosť trojuholníkov</u>

Dva trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú zhodné, ak $A'B' \cong AB, B'C' \cong BC, A'C' \cong AC$, čiže $|A'B'| = |AB|, |B'C'| = |BC|, |A'C'| = |AC|$ a zároveň $\alpha' = \alpha, \beta' = \beta, \gamma' = \gamma$. Zápis: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

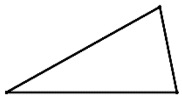
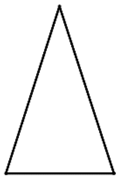
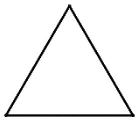
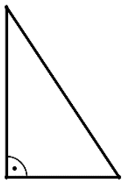
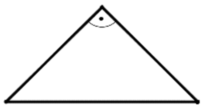
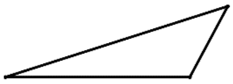
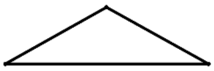
Vety o zhodnosti trojuholníkov

Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú:

- vo všetkých troch stranách (veta *sss*),
- v dvoch stranách a v uhle nimi určenom (veta *sus*),
- v dvoch stranách a uhle ležiacom oproti dlhšej z nich (veta *Ssu*),
- v jednej strane a dvoch uhloch k nej priľahlých (veta *usu*).

Typy trojuholníkov (pozri Tabuľku 1.)

Tabuľka 1. Delenie trojuholníkov podľa dĺžok strán a veľkosti vnútorných uhlov

		Podľa dĺžok strán		
		rôznostranný	rovnoramenný	rovnostranný
Podľa veľkosti vnútorných uhlov	ostrouhlý			
	pravouhlý			
	tupouhlý			

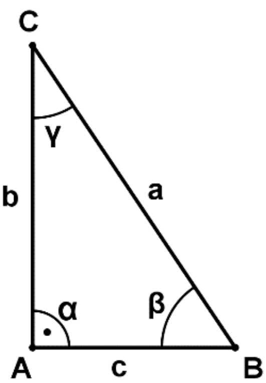
Obvod a obsah trojuholníka

Obvod trojuholníka počítame podľa vzorca: $o = a + b + c$.

Na výpočet obsahu trojuholníka používame vzorce:

$S = \frac{a \cdot v_a}{2}, S = \frac{b \cdot v_b}{2}, S = \frac{c \cdot v_c}{2}$, kde v_a, v_b, v_c sú dĺžky výšok na príslušné strany.

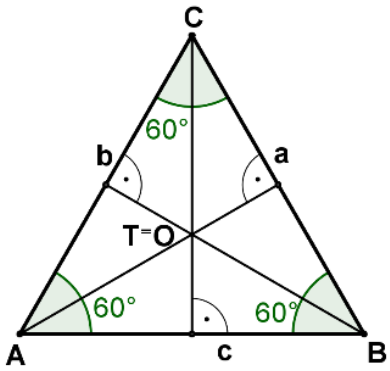
Pravouhlý trojuholník (Obr. 12)



Obr. 12 Pravouhlý trojuholník

a ... prepona (najdlhšia strana; ležiaca oproti pravému uhlu)
b, c ... odvesny
$c = v_b, b = v_c$, ortocentrum leží vo vrchole pravého uhla
stred opísanej kružnice leží v strede prepony
obsah $S = \frac{b \cdot c}{2}$, kde *b*, *c* sú dĺžky odvesien

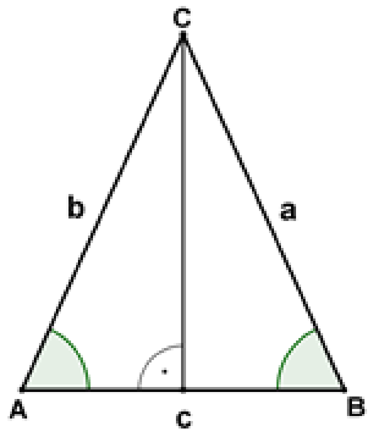
Rovnostranný trojuholník (Obr. 13)



Obr. 13 Rovnostranný trojuholník

$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = 60°$
a = *b* = *c*
$v_a = v_b = v_c = t_a = t_b = t_c$
T = *O* ... bod *T* je ťažisko, bod *O je* ortocentrum
stred opísanej a vpísanej kružnice leží v jednom bode

Rovnoramenný trojuholník (Obr. 14)



Obr. 14 Rovnoramenný trojuholník

a, b ... ramená (strany rovnakej dĺžky)
c ... základňa
$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA|$ ... uhly pri základni majú rovnakú veľkosť (sú zhodné)
výška na základňu je osou súmernosti rovnoramenného trojuholníka

2 Bádateľsky orientované vyučovanie

Vyučovacia metóda, ktorej sa venujeme v tejto kapitole, je metóda bádania patriaca medzi tzv. aktivizujúce metódy. Pod takýmito metódami rozumieme metódy, ktoré vo vyučovacom procese podporujú žiaka k aktívnej činnosti a určite patria medzi najprirodzenejšie metódy učenia sa a rozvoja žiaka.

Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky je vhodná vyučovacia metóda pre žiakov základnej školy, pretože môže posilniť záujmy žiakov o nie veľmi obľúbené vyučovanie geometrie a taktiež implementovať do vyučovacieho procesu samotnú aktivitu žiakov. A preto je možné touto metódou žiakom pomôcť k aktívnemu získavaniu vedomostí a poznatkov, taktiež podporiť spoluprácu a komunikáciu so spolužiakmi, ale aj s učiteľom, rovnako podporiť ich vyjadrovanie a prezentovanie vlastných výsledkov.

Základom metódy bádania je objavenie novej informácie žiakom, ktorú ďalej bádateľskou činnosťou potvrdí alebo vyvráti. Uvedená činnosť umožní žiakovi autentické učenie, objavovanie aj získavanie nových vedomostí a súvislostí, pričom on je práve autorom týchto nových poznatkov. Žiaci sa tak učia jednak určovať si ciele, hľadať kompromisné riešenia, ale aj rozvíjať svoje intelektové schopnosti (vedieť triediť, analyzovať, porovnávať, dedukovať, kategorizovať) a sociálne zručnosti (spolupracovať, komunikovať, ...).

Pri objavnom vyučovaní sú žiaci vyzývaní k tomu, aby pracovali ako matematici alebo vedci. Keď sú teda žiaci zapájaní do vyučovacej hodiny, na ktorej je realizované objavné vyučovanie, musia zapojiť nielen svoje predchádzajúce vedomosti, ale aj celú škálu procesov, ako je zjednodušovanie a štruktúrovanie komplexnejších problémov, systematické pozorovanie, meranie, triedenie, tvorba definícií, určovanie množstva, tvorba úsudkov, tvorba predpokladov, tvorba hypotéz, kontrola premenných, experimentovanie, vizualizácia, objavovanie vzťahov a prepojení a komunikácia. Objavné vyučovanie sa zameriava na vzdelávanie aj ako na sociálny proces. Žiaci pracujú v skupinách, rozhodujú o procesoch a navzájom si pomáhajú. Prostredníctvom diskusie sa učia aktívne sa navzájom počúvať, deliť sa o svoje názory, stavať na myšlienkach niekoho iného, zvažovať rôzne názory a perspektívy, a primerane skúmať rozpory medzi nimi. Dôraz je kladený na efektívne kladenie otázok učiteľom, na dostatočný čas na premyslenie si odpovede pre žiakov a na kladenie prevažne deduktívnych otázok (začínajúcich slovami: ako, ktoré, prečo) žiakmi, a nie len pozorovacích (začínajúcich slovami: kto, čo, kedy, kde).

Vyučovanie matematiky, obzvlášť geometrie, je vhodné na implementovanie vzdelávania s bádateľským charakterom, ktoré žiakom umožní lepšie si uvedomiť užitočnosť svojich získaných prírodovedných poznatkov a ich následnú aplikáciu do bežného života.

2.1 Bádateľský orientované vyučovanie ako trend v súčasnom matematickom vzdelávaní

Vzhľadom na naše pedagogické skúsenosti môžeme konštatovať, že memorovanie alebo pamäťové učenie žiakov nepatria medzi vhodné spôsoby učenia sa a môžu vytvárať vážnu prekážku v tomto procese, a teda aj v jej efektívnosti. Aj do vyučovacieho procesu na Slovenku sa už do popredia dostal moderný prístup, ktorý je smerovaný hlavne na žiaka a má uplatnenie taktiež v prírodovedných a humanitných vedách. Poznáme ho ako bádateľsky orientované vyučovanie (angl. Inquiry-Based Learning). Vychádza z teórie pedagogického konštruktivizmu a kladie dôraz na porozumenie poznatkom, ale aj na spôsob, ako sa tiež k danému poznatku dostať.

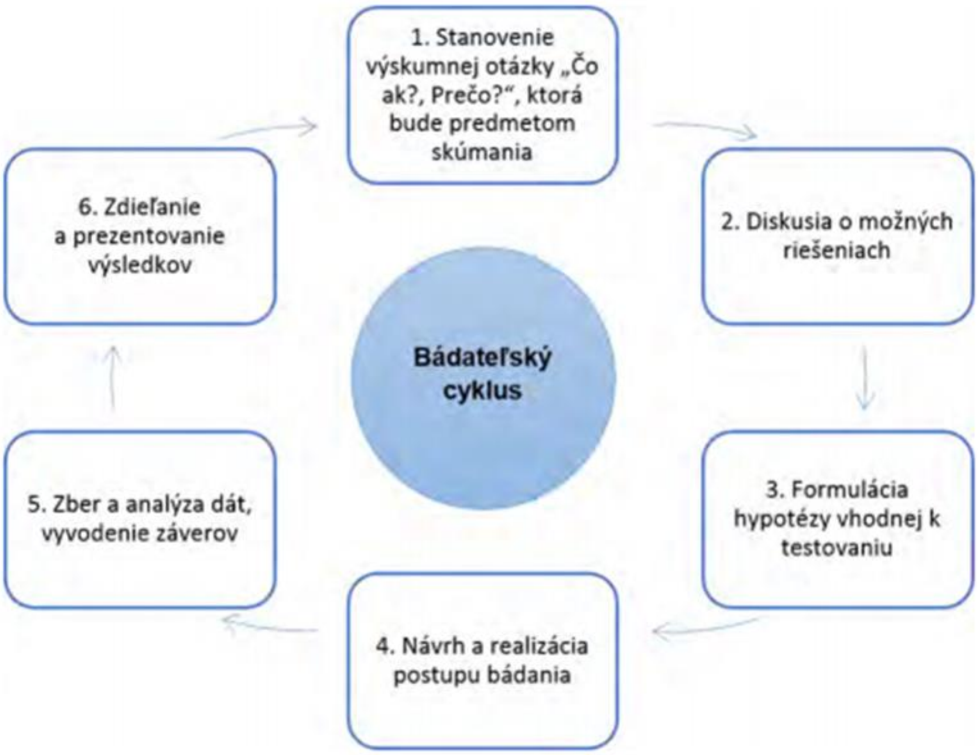
V konštruktivistických vyučovacích prístupoch, vrátane problémového vyučovania, zohráva vo vzdelávacom procese učiteľ rolu sprievodcu i facilitátora žiaka (Erdogan a Senemoglu, 2014, In: Slepáková a Kimáková, 2015).

Kireš a Ješková (2016) vnímajú bádanie ako pedagogický prístup k vzdelávaniu, ktorý realizuje učiteľ, pričom z pohľadu žiaka ide o to, aby sa jeho aktívne poznávanie stalo spôsobom jeho učenia, premýšľania, získavania vedomostí a zručností. Znamená to, že učiteľ nezadá učivo žiakom, ale k poznatkom žiaci prichádzajú postupným a hlavne vlastným bádaním, ktoré je sledované učiteľom.

Pojem bádanie je v súčasnej dobe veľmi používané slovo v prírodovednom vzdelávaní, pričom je to ekvivalentný pojem k pojmom ako skúmanie alebo aj objavovanie. Základným vyučovacím modelom bádania je konštruktivistický prístup. To znamená, že si žiak poznatky konštruuje na základe vlastných skúseností v rámci samostatnej aktívnej činnosti.

Všetky bádateľsky orientované aktivity by mali obsahovať problém alebo otázku, ktorú musí žiak svojou aktivitou riešiť, následne uviesť postup tohto riešenia, zozbiera a potom analyzuje dáta, pomocou ktorých odpovie na zadanú otázku, resp. vysvetlí zadaný problém.

Ak žiakovi zadáme bádateľskú aktivitu, tak v procese bádania kladie otázky, využíva vhodné argumentovanie v rámci vysvetľovania alebo zdôvodňovania objavených zistení. Realizácia bádateľských aktivít zahŕňa rôzne činnosti od formulácie problému, cez návrh a realizáciu postupu riešenia, zbieranie údajov pri experimentovaní alebo modelovaní a ich analýzu a vyhodnocovanie, interpretáciu výsledkov, formulovanie záverov a zdôvodňovanie objavených zistení (Lukáč a kol., 2016). Autor Llewellyn (2002) uvádza šesťstupňový model bádania (viď Obr. 15).



Obr. 15 Schematicky znázornený bádateľský cyklus (Llewellyn, 2002, In: Lukáč a kol., 2016)

Princíp bádateľsky orientovaného vyučovania by sme mohli zhrnúť do nasledujúcich bodov:

- učiteľ zadá žiakom bádateľskú otázku,
- učiteľ smeruje bádateľskú aktivitu k samostatne vyvodeným žiackym zisteniam a záverom,
- žiacke znalosti sú formované čiastkovými problémovými úlohami, kladením otázok, spoluprácou so spolužiakmi a podobne.

Held (2011) uvádza, že cieľom bádateľských aktivít by mala byť schopnosť rozvinúť u žiakov isté špecifické schopnosti, ktoré autor označuje ako bádateľské zručnosti alebo tiež spôsobilosti vedeckej práce. Takisto cieľom daných aktivít je vyvolať u žiaka snahu osvojiť si kritické myslenie, rovnako aj prístupy alebo metódy, ktoré sú zamerané na riešenie problémových úloh. Učiteľ tak u žiakov podnieti ich aktívne skúmanie a získavanie poznatkov.

Pri žiackom bádaní môže učiteľ žiakov viesť niekoľkými spôsobmi. Úrovňami bádania, respektíve bádateľskými zručnosťami, sa zaoberali rôzni autori už v roku 1962. Uvedieme teraz rôzne podoby bádania v závislosti od podielu zapojenia učiteľa a žiakov do tohto procesu tak, ako ich uvádza Banchi a Bell (2008):

- *potvrdzujúce bádanie* (angl. confirmation inquiry) – učiteľ zadá žiakom nielen problémovú otázku, ale aj postup (metódy riešenia) a sám overuje známe výsledky, teda činnosť učiteľa v tomto bádaní je vysoká,
- *štruktúrované bádanie* (angl. structured inquiry) – taktiež problémovú otázku a aj možný postup jej riešenia zadáva učiteľ žiakom, pričom získané výsledky už overujú (formulujú, potvrdzujú) žiaci,
- *riadené bádanie* (angl. guided inquiry) – učiteľ zadá žiakom problémovú otázku, pričom už ale žiaci pripravia postup riešenia danej otázky vrátane realizácie, ktorú sami navrhnú, t. j. postup a výsledok bádania je bez prítomnosti učiteľa,
- *otvorené bádanie* (angl. open inquiry) – je úplne bez zásahu učiteľa, žiaci vyslovia problémovú otázku, ktorú samostatne sformulujú, následne premyslia aj postup riešenia danej otázky (s prípadným výskumom) a nakoniec žiaci formulujú výsledky bádania.

Úrovňami bádania sa zaoberali rôzni autori (napríklad Schwab, 1962; Herron, 1971; Banchi, Bell, 2008). V Tabuľke 2. uvedieme úrovne bádania na základe počtu vopred poskytnutých informácií žiakovi (Bell et al., 2005).

Tabuľka 2. Úrovne bádania (Bell et al, 2005)

Úroveň bádania	**Otázka (problém)?**	**Metódy riešenia?**	**Výsledok (záver)?**
Potvrdzujúce bádanie (Confirmation inquiry) Žiaci potvrdzujú platnosť nejakého zákona (poznatku, súvislosti) v aktivite, ktorej výsledok už poznajú.	✓	✓	✓
Štruktúrované bádanie (Structured inquiry) Žiaci riešia problém sformulovaný učiteľom na základe pripraveného postupu.	✓	✓	✓
Riadené bádanie (Guided inquiry) Žiaci riešia problém sformulovaný učiteľom na základe postupu, ktorý sami navrhnú.	✓		
Otvorené bádanie (Open inquiry) Žiaci riešia problém, ktorý samostatne sformulujú na základe postupu, ktorý sami navrhnú.			

Bádateľské zručnosti, ktoré korešpondujú s jednotlivými úrovňami bádania (pozri Tabuľka 3.), uvádzajú napríklad aj Fradd a kol. (2001), pričom rozlišujú šesť úrovní (In Kireš, Ješková, Ganajová a Kimáková, 2016). Za typické bádateľské zručnosti môžeme považovať tie zručnosti, ktoré bezprostredne vyžaduje realizácia jednotlivých etáp bádania (Ješková a kol., 2016).

Tabuľka 3. Bádateľské zručnosti na základe ich miery riadenia činností učiteľom alebo žiakom (Zdroj: Fradd a kol., 2001, In Kireš a kol., 2016)

			Implementovať	*Vyvodzovať závery*			
Úroveň bádania	*Formulovať otázku/ problém*	*Plánovať*	*Realizovať plán/ Zbierať dáta*	*Analyzovať dáta*	*Formulovať závery*	*Zdieľať výsledky*	*Aplikovať*
0	učiteľ	učiteľ	učiteľ	učiteľ	učiteľ	učiteľ	učiteľ
1	učiteľ	učiteľ	učiteľ	učiteľ	učiteľ	žiaci	učiteľ
2	učiteľ	učiteľ	žiaci	žiaci/učiteľ	žiaci/učiteľ	žiaci	učiteľ
3	učiteľ	žiaci/učiteľ	žiaci	žiaci	žiaci	žiaci	žiaci
4	žiaci/učiteľ	žiaci	žiaci	žiaci	žiaci	žiaci	žiaci
5	žiaci	žiaci	žiaci	žiaci	žiaci	žiaci	žiaci

Bádateľské aktivity môžu byť rôzneho charakteru, buď vo forme experimentovania alebo modelovania problému. V tabuľke 4. uvedieme podľa Lukáča a kol. (2016) bádateľské zručnosti, ktoré sa prejavujú práve v experimentálnych alebo modelovacích aktivitách žiaka. Každá bádateľská aktivita nemusí obsahovať všetky zložky bádania, ani ich poradie nemusí byť zhodné s uvedenými v danej tabuľke.

Tabuľka 4. Bádateľské zručnosti rozvíjané pri experimentovaní alebo modelovaní (Zdroj: Lukáč a kol., 2016)

1. Formulácia problému a plánovanie experimentu/modelu		
	Experimentovanie	Modelovanie
1.1	Formulovať otázku/problém	Formulovať otázku/problém
1.2	Formulovať hypotézu, ktorá sa bude testovať	Formulovať hypotézu, ktorá sa bude testovať
1.3	Naplánovať postup (identifikovať a definovať nezávislé a závislé premenné veličiny, vzájomný vzťah)	Navrhnúť model (identifikovať a definovať nezávislé a závislé premenné veličiny, vzájomný vzťah)
1.4	Navrhnúť pozorovanie/postup merania (aké pomôcky, aká zostava experimentu) pre každú premennú veličinu	Navrhnúť postup modelovania (ako sú premenné veličiny prezentované, čo budú konštanty modelu, vzájomné vzťahy, rovnice a nastavenie počiatočných hodnôt a konštánt)

1.5	Predpovedať výsledok experimentu	Predpovedať výsledky modelu
2. Realizácia/implementácia experimentu/modelu		
2.1	Manipulovať s pomôckami/softvérom	Manipulovať so softvérom a skonštruovať model
2.2	Pozorovať/merať	Zisťovať hodnoty premenných
2.3	Zaznamenávať výsledky pozorovania a merania	Zaznamenávať výsledky
2.4	Realizovať výpočty počas merania	Realizovať výpočty počas realizácie modelu
2.5	Vysvetľovať alebo upravovať experimentálne postupy	Vysvetľovať alebo upravovať modelovacie postupy
3. Analýza a interpretácia experimentu/modelu		
3.1	Transformovať výsledky do štandardných foriem (napr. tabuľky, grafy)	Transformovať výsledky do štandardných foriem (napr. tabuľky, grafy)
3.2	Určovať vzťahy medzi premennými veličinami, napr. na základe grafov	Určovať vzťahy medzi premennými veličinami, napr. na základe grafov
3.3	Určovať presnosť experimentálnych dát (identifikovať možné zdroje chýb)	Určovať presnosť dát získaných modelovaním (identifikovať možné zdroje chýb)
3.4	Porovnať dáta s hypotézou/predpoveďami	Porovnať dáta získané z modelu s reálnymi dátami
3.5	Diskutovať o obmedzeniach/predpokladoch realizovaného experimentálneho postupu	Diskutovať o obmedzeniach/predpokladoch realizovaného modelovacieho postupu
3.6	Zovšeobecniť výsledky	Zamyslieť sa na všeobecnej platnosti modelu
3.7	Formulovať nové otázky/problémy	Formulovať nové otázky/problémy
3.8	Formulovať závery	Formulovať závery
4. Zdieľanie a prezentácia		
4.1	Zdieľať a prezentovať výsledky pred spolužiakmi	Zdieľať a prezentovať výsledky pred spolužiakmi
4.2	Diskutovať/obhajovať výsledky/ argumentovať	Diskutovať/obhajovať výsledky/argumentovať
4.3.	Vypracovať formálnu správu/protokol o výsledkoch	Vypracovať formálnu správu/protokol o výsledkoch
5. Aplikácia a ďalšie využitie		
5.1	Predpovedať na základe výsledkov skúmania	Predpovedať na základe výsledkov skúmania
5.2	Formulovať hypotézy na ďalšie skúmanie	Formulovať hypotézy na ďalšie skúmanie
5.3	Aplikovať experimentálne postupy na nové problémy	Aplikovať modelovacie postupy na nové problémy

Z pohľadu učiteľa má bádateľsky orientované vyučovanie vysoké nároky vzhľadom na jeho efektívne uplatnenie vo vyučovacom procese, ktoré sa týkajú aj jeho prípravy a priebehu. Pre učiteľa je táto príprava neľahká a časovo náročná, ale mal by sa v procese bádania dobre orientovať. Pri realizácii objavného vyučovania je kľúčovým elementom v triede učiteľ, ktorý by mal podporovať účasť svojich žiakov v procese objavovania a zapájať ich do budovania vlastných poznatkov. Podľa Stipeka a kol. (2001) je objavné vyučovanie na hodinách matematiky pre učiteľa pomerne náročné, pretože vyžaduje značnú mieru vedomostí z matematiky. Učiteľ musí diagnostikovať koncepty, ktoré sú základom reakcií žiakov alebo stratégií na riešenie problémov a reagovať k tomu príslušnou učebnou oporou. Objavné vyučovanie tiež vyžaduje u učiteľa vysokú úroveň sebadôvery, pretože učitelia sa nemôžu spoliehať na učebnice. Žiaci preberajú istú časť kontroly nad vyučovacím procesom, učiteľ sa stavia do roly poradcu a facilitátora. Jeho úlohou je vybrať vhodné situácie a problémy pre žiakov, objasniť zámer aktivít prebiehajúcich na vyučovacej hodine, vyzývať žiakov efektívnym kladením otázok, efektívne viesť diskusie v menších skupinách a v rámci celej triedy. Musí neustále podporovať žiakov pri skúmaní a výmene myšlienok vo voľnej a reflexívnej atmosfére, pomáhať im spracovať informácie a nájsť prepojenia medzi ich myšlienkami, podporovať diskusiu o alternatívnych metódach a chápaní. Usilujú sa odstrániť strach zo zlyhania tým, že považujú chyby za príležitosti na učenie sa, a nie za problémy, ktorým sa treba vyhýbať.

Bádateľsky orientované vyučovanie má však množstvo výhod, ktoré by sme mohli zhrnúť do niekoľkých bodov:

- vytvára vhodné podmienky pre aktivitu žiakov, aj tých, ktorí nemajú istotu v riešenej problematike,
- podnecuje žiakov k tvoreniu otázok, formulovaniu hypotéz, plánovaniu postupov, hľadaniu a triedeniu informácií, vyhodnocovaniu výsledkov a formulovaniu záverov,
- žiakov pozitívne motivuje k riešeniu problémov,
- získané poznatky bádaním si žiaci ľahšie zapamätajú a porozumejú im,
- nadobudnuté poznatky žiaci vedia aplikovať v rôznych situáciách alebo spojitostiach s bežným životom,
- bádanie rozvíja tvorivé a kritické myslenie žiakov,
- podporuje u žiakov flexibilitu, vynaliezavosť a kreativitu,
- žiaci získavajú skúsenosti samostatnou prácou alebo spoločnou prácou v skupine so spolužiakmi a teda platí, že prínos jedného žiaka je prínosom pre celú skupinu a zároveň všetci žiaci musia mať podiel na tejto práci,
- žiaci nadobudnú svoje skúsenosti s riešením otvorených problémov,
- podporuje medzipredmetové vzťahy,
- rozvíja kľúčové kompetencie žiakov,
- zlepšuje výsledky žiakov z matematiky, pričom kladie silný dôraz na žiakov s menšou sebadôverou a žiakov pochádzajúcich zo znevýhodneného prostredia,

- má pozitívny vplyv na prístup a motiváciu žiakov, matematiku považujú za zaujímavejšiu,
- žiaci si rýchlejšie a ľahšie zapamätajú a pochopia poznatky z matematiky,
- zvyšuje schopnosť žiakov využívať poznatky v nových situáciách a kontextoch (prenos poznatkov),
- poskytuje žiakom ďalšie príležitosti na rozvoj zručností, ako je napríklad práca v skupinách, skúsenosti s riešením otvorených problémov a iné schopnosti týkajúce sa medzipredmetových vzťahov,
- podporuje vyššiu úroveň rozumových zručností a rozvoj kľúčových kompetencií,
- umožňuje žiakom vyrovnanejšie a realistickejšie vnímať matematiku, jej podstatu a spôsob, akým je vytváraná a rozvíjaná,
- robí matematiku prístupnejšou pre všetkých.

3 Rozvoj geometrických predstáv o Pytagorovej vete

Podľa ŠVP ISCED 2 sa v tematickom okruhu Geometria a meranie žiaci na 2. stupni základnej školy v Slovenskej republike zoznamujú so základnými geometrickými útvarmi, skúmajú a objavujú ich vlastnosti. Téma „Pytagorova veta, jej odvodenie a použitie pri riešení praktických úloh“ býva v školských vzdelávacích programoch zaradená do deviateho ročníka ZŠ.

Žiaci po jej prebratí majú poznať a vymenovať základné prvky pravouhlého trojuholníka (odvesna, prepona, súčet dvoch ostrých uhlov je pravý uhol); vedieť, pre aký útvar platí Pytagorova veta; poznať a vedieť formuláciu Pytagorovej vety a jej význam. Zapíšu Pytagorovu vetu vzťahom $c^2 = a^2 + b^2$, ale aj vzťahom pri danom označení strán pravouhlého trojuholníka. Samostatne vyjadrujú a zapisujú zo základného vzťahu Pytagorovej vety obsah štvorca nad odvesnou a ($a^2 = c^2 - b^2$) a nad odvesnou b ($b^2 = c^2 - a^2$), vyjadrujú vzťah pre výpočet odvesien a, b ($a = \sqrt{c^2 - b^2}, b = \sqrt{c^2 - a^2}$) alebo ich druhých mocnín. Vypočítajú dĺžku tretej strany pravouhlého trojuholníka, ak sú známe dĺžky jeho dvoch zvyšných strán a samostatne používajú Pytagorovu vetu na riešenie kontextových úloh z reálneho praktického života.

Propedeutikou Pytagorovej vety môže byť už v nižších ročníkoch ZŠ výpočet obsahu rovinných útvarov v štvorcovej sieti, výpočet obsahov obrazcov zložených zo štvorcov a obdĺžnikov, a tiež analýza takto vytvorených útvarov. V školskej praxi učitelia často využívajú geometrické dôkazy platnosti Pytagorovej vety a motivačne uvádzajú historické poznámky. V tejto kapitole uvádzame už známe obrazce a postupy, ktoré sme sa snažili ucelene spracovať a poukázať na ich využitie v školskom vzdelávaní.

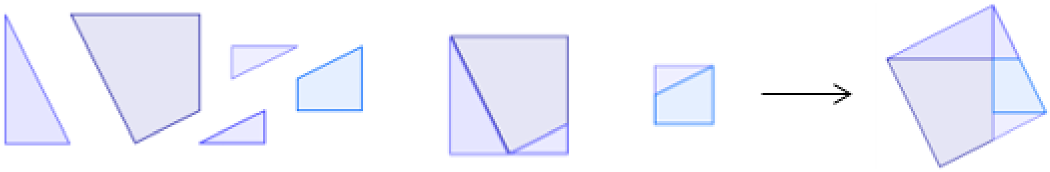
3.1 Objavujeme vzťahy súvisiace s Pytagorovou vetou

S aktivitami, ktoré neskôr môžeme využiť pri objavovaní a zavádzaní Pytagorovej vety, je vhodné začať už na primárnom stupni vzdelávania. V rámci aktivít s geometrickými skladačkami alebo v štvorcovej sieti môžu žiaci objaviť dôležité vlastnosti a vzťahy. Tie neskôr vedú k hlbšiemu porozumeniu Pytagorovej vete, i keď pri ich realizácii ju ešte nepoznajú. Ďalej uvádzame niektoré takéto aktivity bez použitia Pytagorovej vety, ako aj aplikačné úlohy, v riešeniach ktorých Pytagorovu vetu využívame.

<u>Manipulačné aktivity s papierom</u>

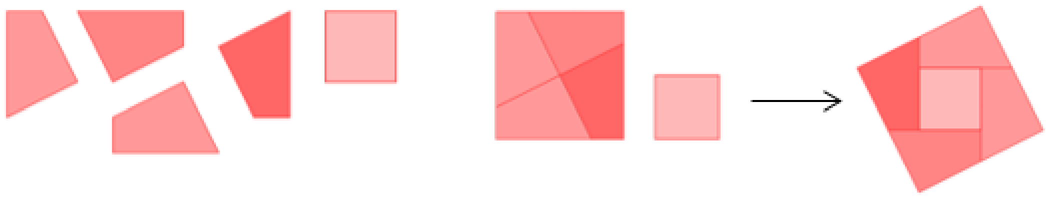
Strihanie a skladanie vhodne vytvorených geometrických obrazcov a skladačiek môže viesť k poznaniu, že ak vieme zložiť z dvoch menších štvorcov jeden veľký štvorec, tak jeho obsah je súčtom obsahov týchto dvoch štvorcov.

A. Z daných častí skladačky (Obr. 16) zložte najskôr dva menšie štvorce a potom zo všetkých častí jeden veľký štvorec.



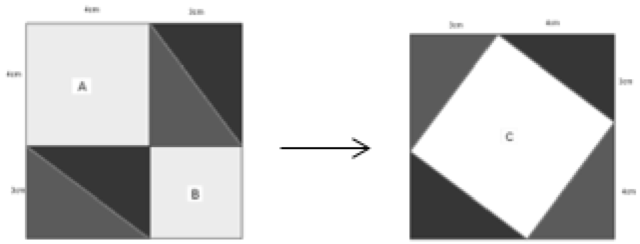
Obr. 16 Časti skladačky 1

B. Z daných častí skladačky zložte k malému štvorcu jeden väčší štvorec a potom zo všetkých častí jeden veľký štvorec.



Obr. 17 Časti skladačky 2

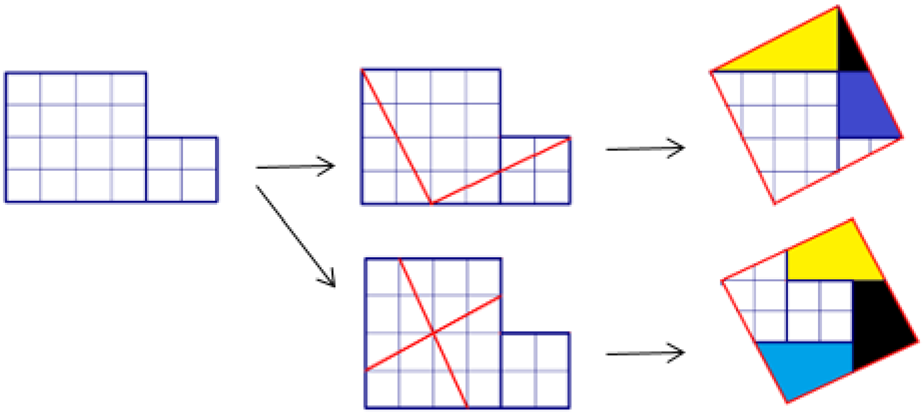
C. Štvorec na obr. 18 vľavo rozstrihajte na jednotlivé časti, pričom dĺžka jeho strany je rozdelená na 3cm a 4cm. Potom zo štyroch trojuholníkov ohraničte ďalší štvorec, tak ako je na obrázku 3 vpravo. Skúste odpovedať na otázky: *Aký je obsah štvorca C, ktorý vznikol?, Prečo je dĺžka prepony trojuholníkov 5 cm?*.



Obr. 18 Štvorec

D. Nastrihajte si štvorce s rôznymi dĺžkami strán, napríklad od 1cm po 15cm. Zisťujte, ktorými trojicami štvorcov vieme ohraničiť pravouhlý trojuholník (štvorce k sebe prikladajte tak, aby sa dotýkali vrcholmi a ich strany vytvorili pravouhlý trojuholník). Zisťujte dĺžky ich strán, určte ich obsahy a hľadajte vzťah medzi trojicami čísel určujúcich obsahy štvorcov. Nájdete tak trojice čísel: 3,4,5; 6,8,10; 5,12,13; 9,12,15 a ich obsahy tvoria tzv. „sčítacie rodinky“.

Vyššie uvedené aktivity A, B môžeme zadať aj ako úlohy v štvorcovej sieti: rozdeľte daný obrázok dvomi čiarami tak, aby sme zo vzniknutých častí mohli zložiť jeden štvorec (viď Obr. 19).



Obr. 19 Využitie štvorcovej sieti

Všetky uvedené aktivity boli realizované aj so žiakmi základnej školy (Pavlovičová, Rumanová, Záhorská, 2013).

4 Aktivita s názvom Pytagorova veta v štvorcovej sieti

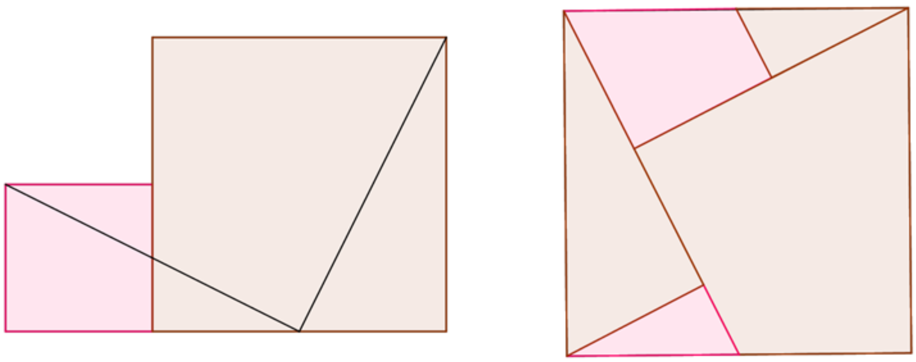
V nasledujúcej kapitole popíšeme aktivitu na objavenie Pytagorovej vety žiakmi základnej školy, pričom je na učiteľovi, ako si ju prispôsobí, aké úlohy vyberie vzhľadom na podmienky triedy. Aktivita ponúka priestor pre slabších žiakov, ktorí môžu experimentovať a je tam teda možnosť, že nájdu aspoň čiastkové riešenie niektorej úlohy. Aktivita je súčasťou publikácie autorov Pavlovičová a kolektív (2012).

Didaktickým prostredím pre túto aktivitu je štvorcová sieť, čo je pre žiakov určite veľmi motivujúce a netradičné na experimentovanie. Postupným zisťovaním obsahov jednotlivých štvorcov žiaci môžu prísť nato, že objavili Pytagorovu vetu. Určite ich to v ďalšej práci povzbudí aj keď len zistia niektoré čiastkové riešenie ktorejkoľvek úlohy, ktorú učiteľ zaradil do série úloh v tejto aktivite. Aktivitu môžeme prispôsobovať úrovni žiakov, prípadne časovej dotácii.

Aktivitu žiakov rozdelíme na dve časti. V prvej časti zadáme žiakom úlohu, ktorou ich môžeme motivovať k objaveniu Pytagorovej vety. Úlohu necháme riešiť žiakov samostatne.

Zadanie úlohy je nasledovné: *„Máme dva štvorce s rôzne dlhými stranami. Rozstrihajte ich čo najmenším počtom strihov tak, aby ste z týchto dielov potom zložili ďalší jeden štvorec.“*

Žiaci budú pracovať, experimentovať s nožničkami a papierom. Objavia aj takéto všeobecné riešenie tejto úlohy (Obr. 20):

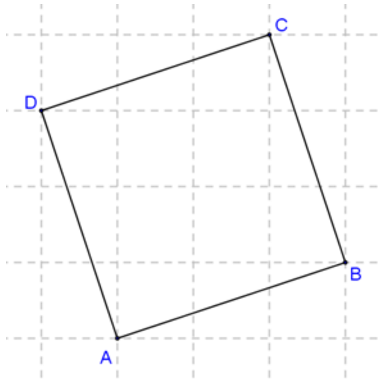


Obr. 20 Experimentovanie v riešení úlohy

Pri strihaní papiera žiaci nemusia prísť na to, že objavia na tomto obrázku Pytagorovu vetu. Môžu však úlohu aj tak vyriešiť. Vedieme po riešení úlohy s nimi rozhovor.

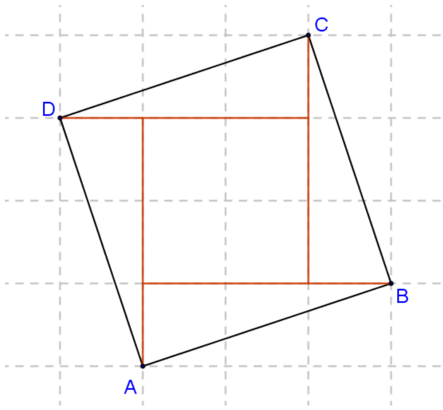
V druhej časti aktivity využijeme ako didaktické prostredie štvorcovú sieť. Pri tejto aktivite postupujeme nasledovne:

Nakreslíme ľubovoľný štvorec (napríklad ako je na obr. 21) do štorcovej siete a zistíme jeho obsah, napríklad zvoľme si štvorec *ABCD*:



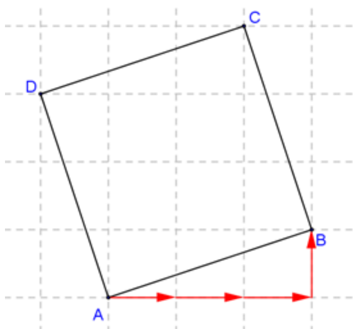
Obr. 21 Štvorec v štvorcovej sieti

Obsah štvorca *ABCD* na obr. 21 vypočítame tak, že štvorec rozdelíme na štyri pravouhlé trojuholníky a štvorec (Obr. 22). Obsah jedného trojuholníka je $S_1 = \frac{3.1}{2} = 1{,}5$ štvorčeka, potom obsah štyroch trojuholníkov je $S_T = 4.S_1 = 4.1{,}5 = 6$ štvorčekov. Obsah malého štvorca je $S_S = 4$ štvorčeky. Z uvedeného vyplýva, že obsah štvorca *ABCD* je desať štvorčekov. Žiaci si môžu dva pravouhlé trojuholníky spojiť do obdĺžnika, získajú tým dva zhodné obdĺžniky a dostanú sa k tomu istému výsledku pre obsah štvorca *ABCD*.



Obr. 22 Rozdelenie štvorca na zhodné trojuholníky a štvorec

Potom do aktivity zavedieme šípkový zápis. Pre náš štvorec *ABCD* sa z bodu *A* do bodu *B* dostaneme podľa zápisu takto: A→→→↑B (Obr. 23). Zápis spoločne so žiakmi popíšeme, prípadne im podrobnejšie vysvetlíme jeho použitie.



Obr. 23 Šípkový zápis pre štvorec *ABCD*

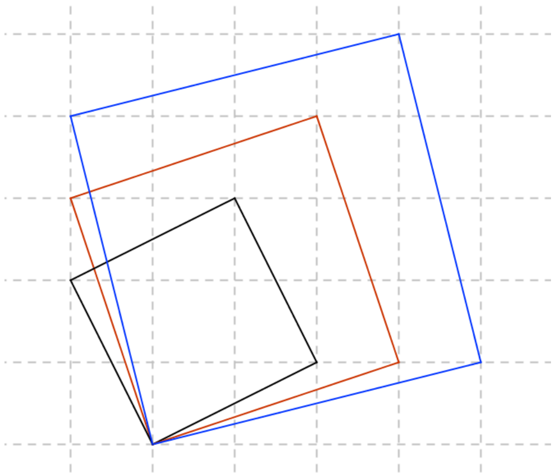
Podobným spôsobom žiaci kreslia rôzne štvorce. Strany štvorcov získame zo šípkových zápisov, pričom zvyšujeme šípky doprava → a šípka hore ↑ je vždy len jedna: *A*→↑*B*.

A→→↑*B*

A→→→↑*B*

A→→→→↑*B*

Následne chceme, aby žiaci vypočítali aj obsahy štvorcov uvedených na obr. 24.



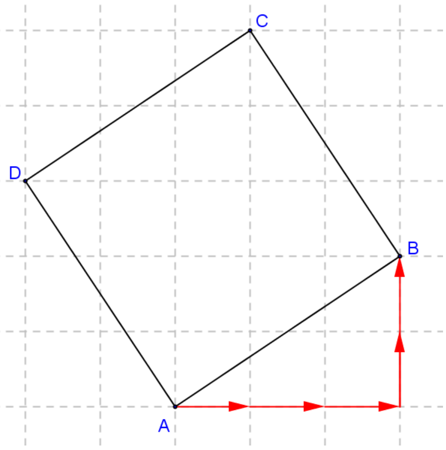
Obr. 24 Rôzne štvorce v štvorcovej sieti

Výsledky si žiaci zapisujú do tabuľky. Snažíme sa žiakov priviesť aj k všeobecnému vzťahu pre obsah štvorca so stranou *a*. V tabuľke 5. sú zapísané zistené obsahy štvorcov, ktoré sú na obr. 24:

Tabuľka 5. Obsah štvorcov pre *A*→ ... ↑*B*

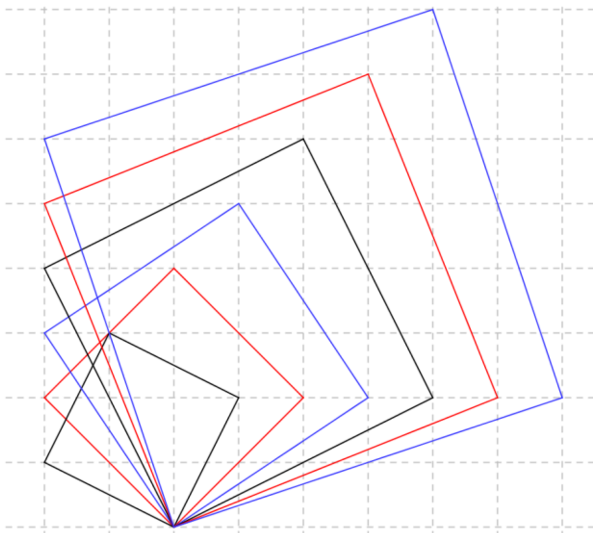
→	↑	Obsah štvorca	
1	1	1 + 1	2
2	1	4 + 1	5
3	1	9 + 1	10
4	1	16 + 1	17
5	1	25 + 1	26
a	1	$a^2 + 1$	$a^2 + 1$

Podobnú tabuľku získame, aj keď budeme chcieť zistiť obsahy štvorcov, ktorých stranu získame šípkovým zápisom, kde postupne zvyšujeme šípky doprava → a šípky hore ↑ sú teraz dve (Obr. 25).



Obr. 25 Šípky pre ďalší štvorec

Rozdelíme žiakov do skupín. Každá skupina vyplní jeden riadok v tabuľke 6., pričom pre každú skupinu načrtneme konkrétny štvorec do štvorcovej siete (napríklad ako je na obr. 26).



Obr. 26 Rôzne štvorce v štvorcovej sieti

Skupiny žiakov vyzveme, aby vyplnili riadky v tabuľke 6. obsahmi jednotlivých štvorcov z obr. 26.

Tabuľka 6. Obsah štvorcov pre *A*→ ... ↑↑*B*

→	↑	Obsah štvorca	
1	2		
2	2		
3	2		
4	2		
5	2		
6	2		

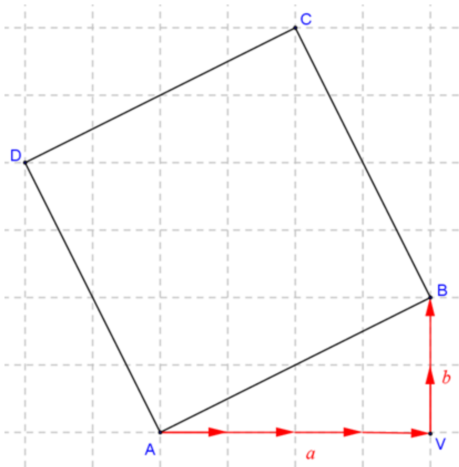
Keď skupiny žiakov vyplnia riadky tabuľky 6., potom spoločne z druhej tabuľky zistíme vzťah $a^2 + 4$ pre obsah štvorca so stranou *a*.

Môžeme pokračovať podobne ďalej a dostaneme nasledujúcu tabuľku 7. pre jednotlivé prípady:

Tabuľka 7. Obsah štvorcov pre *A*→ ... ↑ ... *B*

→	↑	Obsah štvorca
a	1	$a^2 + 1$
a	2	$a^2 + 4$
a	3	$a^2 + 9$
a	4	$a^2 + 16$
a	5	$a^2 + 25$
a	*b*	$a^2 + b^2$

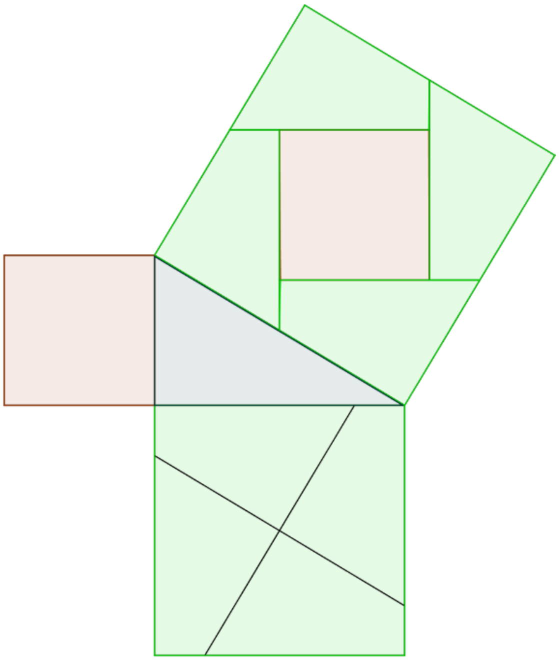
Z tabuľky 7. žiaci zistia, že ak máme úsečku *AB* so šípkovým zápisom *A*→ ... ↑ ... *B*, t. j. zápis obsahuje *a* šípok doprava a *b* šípok hore, potom obsah štvorca je $a^2 + b^2$. Môžeme si všimnúť, že *a* šípok tvorí jednu odvesnu a *b* šípok tvorí druhú odvesnu pravouhlého trojuholníka, pričom súčet $a^2 + b^2$ je obsahom štvorca zostrojeného nad preponou tohto pravouhlého trojuholníka (Obr. 27).



Obr. 27 Obsah štvorca pre *a* šípok doprava a *b* šípok hore

V závere aktivity žiakom zopakujeme znenie Pytagorovej vety: *Obsah štvorca zostrojeného nad preponou c pravouhlého trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad jeho odvesnami a, b*. Taktiež ju symbolicky zapíšeme: $a^2 + b^2 = c^2$.

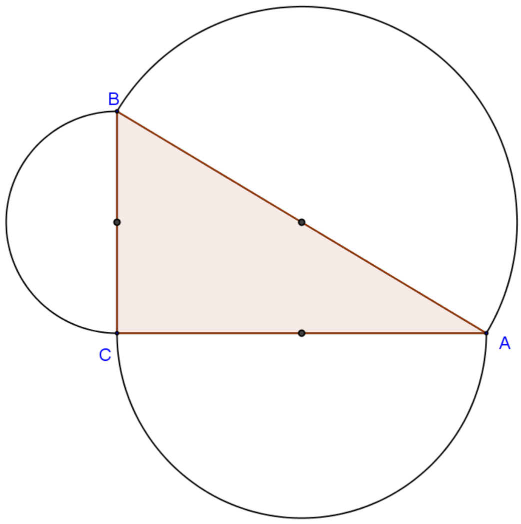
Dôkaz Pytagorovej vety vidieť aj z obr. 28:



Obr. 28 Dôkaz Pytagorovej vety

Odporúčame žiakom uviesť fakt, že Pytagorova veta neplatí len pre štvorce zostrojené nad stranami pravouhlého trojuholníka, ale platí pre ľubovoľné podobné útvary. So žiakmi môžeme experimentovať a zostrojovať rôzne útvary nad stranami pravouhlého trojuholníka. Postupne potom overujeme platnosť Pytagorovej vety na konkrétnych úlohách.

Na obr. 29 uvádzame ukážku, pričom nad stranami pravouhlého trojuholníka zostrojíme polkruhy a žiaci overia platnosť pozmenenej Pytagorovej vety: *obsah polkruhu zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka je rovný súčtu obsahov polkruhov zostrojených nad jeho odvesnami.*



Obr. 29 Iná ukážka Pytagorovej vety

5 Metodika k Pytagorovej vete

K uvedenej problematike sme navrhli konkrétny didaktický materiál vo forme metodiky, ktorý je odporúčaný pre žiakov základnej školy.

Názov metodiky: Čo ešte neviem o pravouhlom trojuholníku (Pytagorova veta)
Tematický celok: Pytagorova veta (Geometria a meranie)
ISCED 2 / 9. ročník / 2 vyučovacie hodiny

Ciele:

- určiť obsah štvorcov, ktorých dĺžky strán sú dĺžkami strán pravouhlého trojuholníka a nájsť vzťah medzi zistenými hodnotami,
- objaviť Pytagorovu vetu a obrátenú Pytagorovu vetu,
- vedieť Pytagorovu vetu a obrátenú Pytagorovu vetu,
- manipulovať s pomôckami, softvérom,
- vedieť formulovať problém, zovšeobecniť výsledky a formulovať závery,
- diskutovať, argumentovať, obhajovať výsledky.

Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti žiaka:

- poznať vlastnosti a prvky trojuholníka,
- poznať vlastnosti a prvky pravouhlého trojuholníka,
- vedieť určiť druhú mocninu čísla,
- mať zvládnuté základné počítačové zručnosti.

Taxonomická úroveň:

- porozumieť,
- aplikovať,
- analyzovať,
- hodnotiť.

Riešený didaktický problém:

Žiaci sa v 9. ročníku ZŠ v súlade so ŠVP naučia Pytagorovu vetu, často však majú problémy v praktickom využití osvojených poznatkov. Tieto vyplývajú podľa nášho názoru z nedostatočnej skúsenosti s jej aplikáciou v pravouhlých trojuholníkoch v rôznych polohách a s rôznym označením vrcholov. Uvedené problémy je možné minimalizovať konštruktivistickým prístupom k osvojeniu problematiky a zvýšeným dôrazom na dodržanie zásady názornosti vo vyučovacom procese.

Vyučovacie metódy a formy:

- riadené bádanie,
- individuálna a skupinová forma vyučovania (jedna skupina pozostáva z 2 – 3 žiakov),
- práca s pracovnými listami.

Pomôcky:

- pracovné listy (sú uvedené v Prílohe),
- nožnice,
- počítač, kalkulačka,
- rysovacie potreby,
- aplikácia - voľne dostupná na:

https://www.geogebra.org/m/aCyxsdGk

https://www.geogebra.org/m/xbs2guhr

Hodnotenie práce žiakov a diagnostika splnenia vzdelávacích cieľov:

Práca žiakov je priebežne počas vyučovacej hodiny slovne hodnotená, učiteľ využíva predovšetkým formatívne hodnotenie. V závere niektorých činností (vypracovanie Pracovného listu č. 3, Pracovného listu č. 6) si žiaci každej skupiny (dvojice, príp. trojice) spoločne sformulujú svoje zistenia a výsledky prezentujú spolužiakom.

Úvod k metodike

Pytagorova veta je učivom 9. ročníka základnej školy podľa inovovaného ŠVP pre 2. stupeň ZŠ (2015) na nasledovnej úrovni: Žiak na konci 9. ročníka základnej školy vie vymenovať základné prvky a vlastnosti pravouhlého trojuholníka, vie formulovať Pytagorovu vetu, pozná jej význam, zapíše Pytagorovu vetu v pravouhlom trojuholníku *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C*, ale aj vzťahom pri inom označení strán pravouhlého trojuholníka, vie ju zapísať ako súčet, či rozdiel druhých mocnín, ako aj pomocou odmocniny, vypočíta dĺžku tretej strany pravouhlého trojuholníka, ak sú známe dĺžky jeho dvoch zvyšných strán a vie samostatne použiť Pytagorovu vetu na riešenie kontextových úloh z reálneho praktického života. Konštruktivistickým prístupom k osvojeniu úvodu do problematiky a zvýšeným dôrazom na dodržanie zásady názornosti vo vyučovaní sa snažíme o to, aby sme minimalizovali problémy žiakov pri zvládnutí učiva a aby boli vedomosti žiakov trvalé. Predpokladáme, že žiaci objavia Pytagorovu vetu, ako aj obrátenú Pytagorovu vetu a budú ich vedieť zapísať pri ľubovoľnom označení strán pravouhlého trojuholníka. Žiaci pracujú samostatne i v skupinách.

Priebeh 1. vyučovacej hodiny

Motivácia (10 minút)

Žiaci si počas domácej prípravy na prvú vyučovaciu hodinu zopakujú učivo o trojuholníku, ktoré je obsiahnuté v študijných materiáloch k Pytagorovej vete „Čo už viem o trojuholníku“. Učiteľ prispôsobí tento materiál vlastným podmienkam (v úprave zohľadní, ktoré učivo majú žiaci prebrané). Žiakom poskytne tento materiál po vlastnej úprave k dispozícii vopred v elektronickej alebo tlačenej podobe. Na začiatku prvej vyučovacej hodiny žiaci vypracujú Pracovný list č. 1, pričom si zopakujú základné prvky a vlastnosti trojuholníka a pravouhlého trojuholníka (vrcholy, strany, vnútorné a vonkajšie uhly), pojmy výška a ortocentrum v pravouhlom trojuholníku, vlastnosti štvorca a výpočet obsahu pravouhlého trojuholníka a štvorca. Touto činnosťou učiteľ motivuje žiakov k ďalšej práci. V prípade, že niektorí žiaci neovládajú danú problematiku, pri kontrole výsledkov učiteľ kladením otázok zopakuje so žiakmi potrebné prvky a vlastnosti trojuholníka, pravouhlého trojuholníka a štvorca. Po vypracovaní Pracovného listu č. 1 učiteľ spolu so žiakmi vyhodnotí správnosť riešení jednotlivých úloh (ústne, nákresom na tabuľu, prípadne si zvolí prezentáciu – dataprojektor, počítač).

Skúmanie (10 minút)

V ďalšej časti vyučovacej hodiny žiaci pracujú vo dvojiciach. Vystrihnú trojuholníky podľa pokynov v Pracovnom liste č. 2 a objavujú vzťah. Snažia sa svoje zistenia sformulovať a navzájom porovnať výsledky s výsledkami spolužiakov vo vlastnej skupine.

Formulácia problému učiteľom, riadené bádanie (10 minút)

Žiaci dostanú Pracovný list č. 3, v ktorom je vyznačený pravouhlý trojuholník . Učiteľ sa žiakov pýta o aký trojuholník ide, pričom očakáva, či žiaci budú vedieť, že daný trojuholník je pravouhlý, čo vyplýva z vlastností uhlopriečok štvorca. V prípade problémov učiteľ so žiakmi vlastnosti štvorca frontálne zopakuje. Počas práce sa môžu žiaci poradiť so žiakmi svojej skupiny, pri určovaní druhých mocnín používajú kalkulačky. Jednotlivé skupiny - dvojice žiakov – prezentujú po vypracovaní Pracovného listu č. 3 svoje zistenia a porovnávajú ich so zisteniami ostatných skupín.

Podľa potreby učiteľ kladie žiakom otázky typu:

- Čo platí o dĺžkach strán trojuholníka? Očakáva vzťah trojuholníkovej nerovnosti, ak ho nevedia, tak ich na túto odpoveď ďalšími otázkami navedie.
- Ako vypočítame obsah štvorca?
- Aké sú vaše zistenia? Jednotlivé dvojice prezentujú svoje závery.

Na záver učiteľ zhrnie zistenia žiakov napríklad takto:

„V tomto trojuholníku ABC sme zistili vzťah $a^2 + b^2 = c^2$*. Našou úlohou bude overiť tento poznatok riešením viacerých úloh, až potom sa budeme snažiť dokázať, či tento vzťah platí v každom pravouhlom trojuholníku, alebo je to len náhodné zistenie."*

Žiaci pokračujú v práci vo dvojiciach, príp. trojiciach riešením úloh Pracovného listu č. 4, každý žiak má vlastný pracovný list. Na urýchlenie práce si môžu žiaci v rámci skupiny rozdeliť úlohy. Vzájomne si skontrolujú výpočty, ktoré robia s použitím kalkulačky, príp. si ich môžu skontrolovať aj na internetových stránkach:

https://www.geogebra.org/m/aCyxsdGk, https://www.geogebra.org/m/xbs2guhr.

Zhrnutie, zápis a dôkaz Pytagorovej vety (10 minút)

V závere prvej vyučovacej hodiny učiteľ zapíše na tabuľu Pytagorovu vetu spolu s náčrtom príslušného pravouhlého trojuholníka (žiaci si zapíšu poznámky z tabule do zošitov), učiteľ využije Pracovný list č. 5, ktorý dá k dispozícii každému žiakovi. Dôkaz Pytagorovej vety realizuje vysvetlením dôkazu uvedeného v Pracovnom liste č. 5, pričom si žiaci priamo do Pracovného listu č. 5 zakresľujú a farebne vyznačujú jednotlivé trojuholníky. Dôkaz si neprepisujú do zošitov. Na domácu úlohu si žiaci zistia približný počet doteraz zverejnených dôkazov Pytagorovej vety na internete a na najbližšej vyučovacej hodine odovzdajú najzaujímavejší z nich.

Hodnotenie (5 minút)

Učiteľ formatívne vyhodnotí prácu žiakov na vyučovacej hodine, využije predovšetkým slovnú pochvalu jednotlivcov a skupín.

<u>Priebeh 2. vyučovacej hodiny</u>

Vyhodnotenie domácej úlohy (5 minút)

Po odovzdaní domácich úloh učiteľ vyhodnotí prístup žiakov k plneniu domácej úlohy, ohodnotí estetickú úroveň domácich úloh a až na ďalšej vyučovacej hodine pripomienkuje kladné, či záporné stránky odovzdaných domácich prác. Veľmi pekne vypracované domáce úlohy môže prípadne hodnotiť známkou (vybraní žiaci môžu prezentovať dôkaz, ktorý si vybrali, v závere vyučovacej hodiny).

Rozpracovanie (10 minút)

Žiaci s použitím rysovacích pomôcok samostatne riešia úlohy z Pracovného listu č. 6. Na vyučovacej hodine každý žiak zostrojí jeden trojuholník podľa pokynov v pracovnom liste (ostatné trojuholníky môže zostrojiť v rámci domácej prípravy na ďalšiu vyučovaciu hodinu; nepovažujeme za potrebné však dať povinne všetkým žiakom zostrojiť zvyšné trojuholníky). Učiteľ určí každému žiakovi, ktorý trojuholník má zostrojiť. Trojuholník zostroja žiaci, ktorí dosahujú lepšie výsledky v matematike, resp.

nemajú výraznejší problém s konštrukčnými úlohami a konštrukciami trojuholníkov. Ak niektorí žiaci pracujú rýchlejšie, môžu zostrojiť ešte jeden trojuholník. Žiaci po konštrukcii určia odmeraním chýbajúce veľkosti vnútorných uhlov a chýbajúcu dĺžku strany zostrojených trojuholníkov, doplnia ich do zadania a následne určia druh trojuholníka.

Riadené bádanie, vysvetlenie (10 minút)

Učiteľ v riadenom rozhovore v spolupráci so žiakmi formuluje obrátenú Pytagorovu vetu, ktorú žiaci následne zapíšu do zošitov (môžu využiť Pracovný list č. 7). Pri formulácii záverov, vyplývajúcich z vlastných konštrukcií a meraní, učiteľ pomáha žiakom napríklad otázkami:

- Aké druhy trojuholníkov ste zostrojili?
- Boli všetky trojuholníky pravouhlé?
- Odmerali ste si dĺžky jednotlivých strán trojuholníkov?
- Aký vzťah ste by ste vedeli určiť zo zistených údajov?
- Musíme porovnávať len dĺžky jednotlivých strán trojuholníkov?
- Ak vypočítate druhé mocniny dĺžok jednotlivých strán trojuholníkov, vidíte medzi nimi nejaký vzťah? Žiaci vypočítajú druhé mocniny s použitím kalkulačky a zistené hodnoty vyjadrujú vzťahom – Pytagorovou vetou.

Rozpracovanie (15 minút)

Práca žiakov pokračuje vypracovaním úloh obsiahnutých v Pracovnom liste č. 7. Žiaci pracujú vo dvojiciach (trojiciach), navzájom si radia a pomáhajú. V prípade potreby učiteľ pomáha žiakom aplikovať nadobudnuté poznatky pri riešení jednotlivých úloh. Riešením týchto úloh si žiaci osvojujú použitie Pytagorovej vety v ľubovoľne označenom trojuholníku, ktorý je v rôznych polohách. Za každú skupinu zapíše jeden žiak vyjadrenie Pytagorovej vety ku každému trojuholníku, ktorý je vopred pripravený náčrtom na tabuli (prípadne inou formou). Všetky strany v každom trojuholníku sú vyjadrené aj vzťahom s druhou odmocninou. Spoločne je skontrolované a odsúhlasené vyjadrenie Pytagorovej vety v každom z daných trojuholníkov. Ak majú jednotlivci problémy s vyjadrením Pytagorovej vety v daných trojuholníkoch, je potrebné zopakovať pojmy prepona, odvesna a v daných trojuholníkoch ich tiež označiť aj slovne k jednotlivým stranám trojuholníkov v úlohách Pracovného listu č. 7.

Motiváciou k ďalšej práci je rozhovor učiteľa so žiakmi na tému, kde sa v praktickom živote stretnú s pravouhlým trojuholníkom, ktoré rovinné útvary poznajú a či možno v nich využiť poznatky o pravouhlom trojuholníku. Po tomto krátkom rozhovore pokračujú žiaci vypracovaním úloh Pracovného listu č. 8. Na vyučovacej hodine učiteľ vyberie niektoré z rovinných útvarov, ktoré riešia spoločne, ostatné ponechá žiakom na vypracovanie ako domácu úlohu.

Hodnotenie (5 minút)

Žiaci spoločne s učiteľom vyhodnotia prácu z obidvoch vyučovacích hodín. Učiteľ hodnotí prístup žiakov k plneniu jednotlivých úloh, ich disciplínu, aktivitu a záujem o prácu. Žiaci hodnotia prípravu a výber úloh, pracovné listy, prípadne navrhnú zmeny. Odporúčame hodnotiť prácu na obidvoch vyučovacích hodinách formatívne, za dôležité považujeme vyzdvihnúť pracovnú atmosféru, spoluprácu a pomoc v skupinách. Potrebné je kladne hodnotiť závery, ku ktorým žiaci dospeli.

Poznámka k metodike

V predloženej metodike je významný konštruktivistický prístup vo vyučovaní a riadené bádanie, ktorých zaradením predpokladáme zvýšenie záujmu žiakov o preberanú problematiku. Zaradením jednotlivých úloh v Pracovnom liste č. 7 a Pracovnom liste č. 8 zároveň očakávame, že žiaci budú dostatočne pripravení na využitie Pytagorovej vety pri riešení pravouhlého trojuholníka. Práca v skupinách pomáha jednotlivcom, ktorí majú problém s prezentovaním výsledkov vlastnej práce, aby takéto situácie ľahšie zvládli. Žiaci si zároveň vzájomne pomáhajú a spoluprácou zlepšujú vzájomné vzťahy, učia sa tak vzájomne si pomáhať.

6 Zaujímavé a aplikačné úlohy s využitím Pytagorovej vety

V nasledujúcej kapitole uvádzame zbierku úloh, ktoré využívajú v riešení Pytagorovu vetu. Aplikačné úlohy rozvíjajú u žiakov samostatnosť, aktivitu a tvorivosť už od najnižších ročníkov základnej školy. Sú to úlohy, v ktorých sa prelínajú vedomosti z rôznych tematických celkov, prípadne sa budujú vzťahy matematiky k ostatným vyučovacím predmetom. Riešením aplikačných úloh by sa žiaci mali naučiť formulovať problémy, vedieť získavať informácie, potrebné k ich riešeniu, vedieť ich riešiť v súvislostiach a napokon vedieť sformulovať názory a závery týchto riešení. Určite motivačne na žiakov pôsobia aj zábavné matematické úlohy alebo úlohy z bežného života.

Uvádzame ukážky dvoch aplikačných úloh vhodných pre školskú prax. Prvá je ukážka využitia nadobudnutých vedomostí o trojuholníku, jeho vlastnostiach a aplikácie Pytagorovej vety v jej riešení. Druhá úloha poukazuje na možnosti použitia Pytagorovej vety v riešení problému o kružniciach. Využívame tu všeobecné znenie Pytagorovej vety (platí pre všetky navzájom podobné útvary, ktoré sú zostrojené nad stranami trojuholníka).

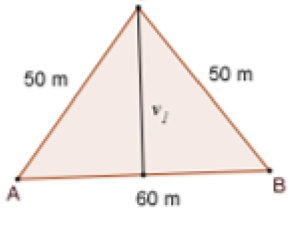
<u>Úloha 1.</u>

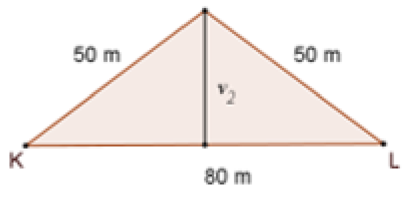
Dvaja majitelia pozemkov sa nemohli zhodnúť na tom, kto má väčší pozemok. Oba pozemky mali tvar trojuholníkov. Rozmery prvého pozemku boli 50 m, 50 m, 80 m; druhý pozemok mal rozmery 50 m, 50 m, 60 m. Prvý majiteľ tvrdil, že jeho pozemok má dlhšiu základňu, preto má aj väčšiu výmeru. Druhý bol presvedčený, že na dĺžke základne nezáleží a výmera je rovnaká. Kto z nich mal pravdu? (Šedivý a kol., 2008)

<u>Riešenie úlohy 1.</u>

Toto riešenie pozostáva z niekoľkých krokov:

1) V rozbore úlohy načrtneme oba pozemky a konštatujeme, že ide o rovnoramenné trojuholníky s rovnakou dĺžkou ramien, ale rôznou dĺžkou základní (Obr. 30).





Obr. 30 Náčrt pozemkov v tvare trojuholníka

2) Zopakujeme si vlastnosti rovnoramenného trojuholníka a doplníme náčrty o výšky na základne, ktoré rozdelia oba trojuholníky na dva zhodné pravouhlé trojuholníky.

3) S použitím Pytagorovej vety dopočítame dĺžky znázornených výšok.

4) Po zistení, že znázornené pravouhlé trojuholníky majú zhodné dĺžky strán prijmeme záver, že podľa vety sss sú trojuholníky zhodné.

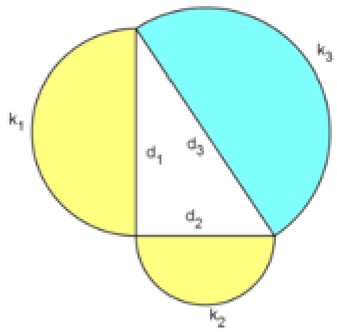
Pre žiakov je náročné sformulovať záver v znení *„zhodné útvary majú zhodný obsah"*, častejšie dokončia riešenie úlohy výpočtom obsahov obidvoch trojuholníkov „pre istotu". V závere riešenia uvedieme správne sformulovanú slovnú odpoveď.

Úloha 2.

Dané sú dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Zostrojte kružnicu k_3, ktorej obsah je súčtom obsahov kružníc k_1 a k_2.

Riešenie úlohy 2.

Z rôznych možných riešení úlohy uvádzame aplikáciu Pytagorovej vety. Vzťah medzi obsahmi daných kružníc a hľadanej kružnice je $S_3 = S_1 + S_2$. Po dosadení do vzorca pre výpočet obsahu kruhu dostaneme vzťah pre polomery kružníc: $r_3^2 = r_1^2 + r_2^2$. Dĺžku polomeru hľadanej kružnice teda vieme zostrojiť ako preponu pravouhlého trojuholníka, ak využijeme nasledovné všeobecné znenie Pytagorovej vety: Súčet obsahov dvoch podobných útvarov zostrojených nad odvesnami pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu útvaru s nimi podobného zostrojeného nad preponou tohto trojuholníka. Na obr. 31 prezentujeme tento vzťah analogicky medzi polkruhmi, kde strany trojuholníka tvoria priemery týchto polkruhov.



Obr. 31 Obmena Pytagorovej vety

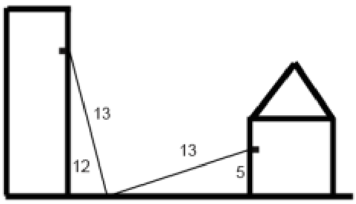
Poznámka: Pôvodné znenie tejto vety uvedené v knihe Euklides: Základy, kniha VI, veta 31; nájdeme aj v knihe Fulier, J. a kol., 2011, s.197.

Učiteľ ich môže zaradiť do vyučovacieho procesu v rámci opakovania danej problematiky alebo aj ako motivačný aspekt. Uvádzame aj výsledky k daným úlohám.

Zadania úloh

1. Vypočítajte výšku rovnostranného trojuholníka s dĺžkou strany $2\sqrt{3}$.
2. Záhrada tvaru rovnostranného trojuholníka má plochu 1000 m^2. Aký je obvod záhrady?

3. Do kruhu chceme vpísať rovnostranný trojuholník s dĺžkou strany 24 cm. Aký musí byť najmenší priemer kruhu?
4. Pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny sú v pomere 5:12, má preponu dĺžky 26 m. Ako dlhé sú odvesny?
5. Rovnoramenný trojuholník má výšku 35 cm. Pomer dĺžok základne ku ramenu je 48 : 25. Akú dĺžku má rameno trojuholníka?
6. Kosoštvorec má uhlopriečky dĺžok 12 cm a 16 cm. Vypočítajte výšku kosoštvorca.
7. Daný je pravouhlý trojuholník s odvesnami 3 cm a 6 cm a stredom prepony prechádza kolmica. V akej vzdialenosti od vrcholu s pravým uhlom pretína kolmica odvesnu?
8. Na jednej ulici priniesli požiarnici 13 m dlhý rebrík. Najprv ho opreli o jeden vežiak. Rebrík dosiahol do výšky 12 m. Keď ho bez premiestnenia opreli o dom na druhej strane ulice, dosiahol do výšky 5 m. Ako ďaleko sú od seba domy?



9. Kmeň stromu má priemer 18 cm. Možno z neho odpíliť hranol s podstavou 10 cm?
10. Z bodu na kružnici sú zostrojené dve na seba kolmé tetivy, ktorých vzdialenosti od stredu kružnice sú 6 cm a 10 cm. Vypočítajte dĺžky tetív a polomer kružnice.
11. Kružnice k(S, R) a m(O, r) majú vonkajší dotyk a spoločnú dotyčnicu t. Vypočítajte polomer kružnice, ktorá sa dotýka oboch kružníc a súčasne aj dotyčnice t.
12. Topoľ vysoký 32 m sa zlomil a jeho vrchol padol 16 m od päty stromu. V akej výške sa strom zlomil?
13. Dve rovnobežné tetivy jednej kružnice majú dĺžky 40 cm a 48 cm, pričom sú od seba vzdialené 22 cm. Aký je polomer kružnice?
14. Pravouhlému trojuholníku s odvesnami 6 cm a 8 cm je opísaná kružnica. Aký je polomer kružnice?
15. Pravouhlému trojuholníku s odvesnami 3 cm a 6 cm je vpísaná kružnica. Aký je polomer kružnice?
16. Dvaja majitelia pozemkov nemohli zhodnúť na tom, kto má väčší pozemok. Oba pozemky mali tvar trojuholníkov. Rozmery prvého pozemku boli 50 m, 50 m, 80 m; druhý pozemok mal rozmery 50 m, 50 m, 60 m. Prvý majiteľ tvrdil, že jeho pozemok má dlhšiu základňu, preto má aj väčšiu výmeru. Druhý bol presvedčený, že na dĺžke základne nezáleží a výmera je rovnaká. Kto z nich mal pravdu?

17. Dva stožiare vysokého napätia sú umiestnené na kopci. Výškový rozdiel ich piat je 23 m, vodorovná vzdialenosť je 54 m. Aká je dĺžka elektrického vedenia medzi nimi, ak 5% drôtu sa počíta na previsnutie?
18. Dve borovice sú od seba vzdialené 40 m. Jedna má výšku 31 m, druhá 6 m. Aká je vzdialenosť od jedného vrcholu po druhý?
19. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou c sú dané dĺžky: $a = 10\ cm, v_c = 9{,}5\ cm$. Vypočítajte obvod a obsah trojuholníka ABC.
20. V kružnici s polomerom 7,5 cm sú zostrojené dve rovnobežné tetivy, ktorých dĺžky sú 9 cm a 12 cm. Vypočítajte vzdialenosť týchto tetív (nájdite všetky riešenia).
21. V pravouhlom trojuholníku KLM s preponou $m = KL$ poznáme dĺžky odvesien $|KM| = 20\ mm$ a $|LM| = 15\ mm$. Určte dĺžku ťažnice t_m na preponu, výšky v_m na preponu a dĺžku úsekov prepony vytvorených pätou výšky v_m.
22. Kosoštvorec má stranu a = 6 cm, polomer vpísanej kružnice je r = 2 cm. Vypočítajte dĺžky oboch uhlopriečok.
23. Obdĺžnik ABCD má strany AB, AD v pomere 3:4. Obdĺžniku ABCD je opísaná kružnica k s polomerom 5 cm. Vypočítajte dĺžky strán obdĺžnika ABCD.
24. Nad dvoma stranami trojuholníka ABC sú zostrojené štvorce (strana AC je dlhšia ako strana BC). Obsah štvorca nad stranou BC je 25 cm^2, dĺžka výšky v_c na stranu AB je 3 cm, päta P výšky v_c delí stranu AB v pomere 2:1. Vypočítajte dĺžku strany AB. Vypočítajte obsah štvorca nad stranou AC.
25. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou c je dané: $a = 10\ cm, c = 12{,}5\ cm$, bod P je päta výšky v_c, M je stred úsečky BC. Vypočítajte obsah trojuholníka PBM.

Výsledky úloh

1. 3 2. $\frac{4000.\sqrt{3}}{3}$ 3. $12.\sqrt{\frac{7}{3}}$ 4. 10, 24 5. 125 cm 6. $9\frac{3}{5}$ 7. $2\frac{1}{4}$ 8. 17 m
9. polomer je 9 cm, polovica uhlopriečky má dĺžku $5\sqrt{2}$ cm t. j. trojuholník možno vpísať
10. odvesny majú dĺžky 12 cm a 20 cm, polomer kružnice je $2\sqrt{34}$ 11. úloha má dve riešenia, $r'_{1,2} = \frac{R.r}{\sqrt{R \mp r}}$ 12. 12 m 13. $5.\sqrt{17}$ 14. 10 15. $\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ 16. druhý, oba pozemky majú rovnakú výmeru 17. približne 137,80 m 18. $5\sqrt{89}$ m 20. 10,5 cm, 1,5 cm 20. 12,5 mm, 12 mm, 9 mm, 16 mm 21. 4,28 cm, 11,21 cm 22. 6 cm, 8 cm 23. 73 cm^2 24. 12 cm^2

Úlohy riešenie s využitím informačno-technologických technológií

Budovanie a rozvoj geometrických predstáv je už od útleho veku spojený s prostredím, v ktorom dieťa vyrastá. Na získavanie trvalých a neformálnych vedomostí žiakov vo vyučovacom procese je potrebné zachovávať spojitosť nových poznatkov s reálnym životom. To môžeme realizovať aj riešením matematických aplikačných úloh, ktoré rozvíjajú u žiakov samostatnosť, aktivitu a tvorivosť už od najnižších ročníkov základnej školy. Riešením aplikačných úloh by sa žiaci mali naučiť formulovať problémy, vedieť získavať informácie potrebné k ich riešeniu, vedieť ich riešiť v súvislostiach a napokon vedieť sformulovať názory a závery týchto riešení.

Ďalej uvádzame ukážky tvorby rôznych matematických úloh vychádzajúcich z jedného obrázka. Môže ním byť obrázok trojuholníka bežný v školskej praxi alebo fotografia, v ktorej sa priamo trojuholník nenachádza ale môžeme ho dotvoriť a využiť pri tvorbe zadania úloh. Uvedené úlohy majú charakter otvorených neparametrických úloh, ktoré môže učiteľ sám modifikovať primerane veku a matematickým schopnostiam žiakov. Riešenie geometrických úloh je vhodné vizualizovať aj využitím prostriedkov IKT, my sme konkrétne využili softvér GeoGebra.

Zadanie aplikačnej úlohy

Stĺp na obr. 32 je na móle pri jazierku a slúži na uchytenie lodiek.

Obr. 32 Fotografia móla so stĺpom

- Aký vysoký môže byť stĺp, ak by sme poznali dĺžku jeho tieňa?
- Aká bude dĺžka lana, ktoré upevníme cez oká na stĺpe a do dosiek na móle, pričom lano so stĺpom zviera ľubovoľný uhol?
- Medzi stĺp a jeho tieň natiahneme lano tak, aby vytvorili trojuholník. Aké dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov bude mať takto vytvorený trojuholník?

- Mólo tvaru obdĺžnika so stranami a, b je pokryté drevenými latkami v dvoch radoch, ako je to na obrázku. Aký približne je rozmer jednej drevenej latky na móle, ak jedna latka tvorí priemerne 3% z plochy tohto móla?

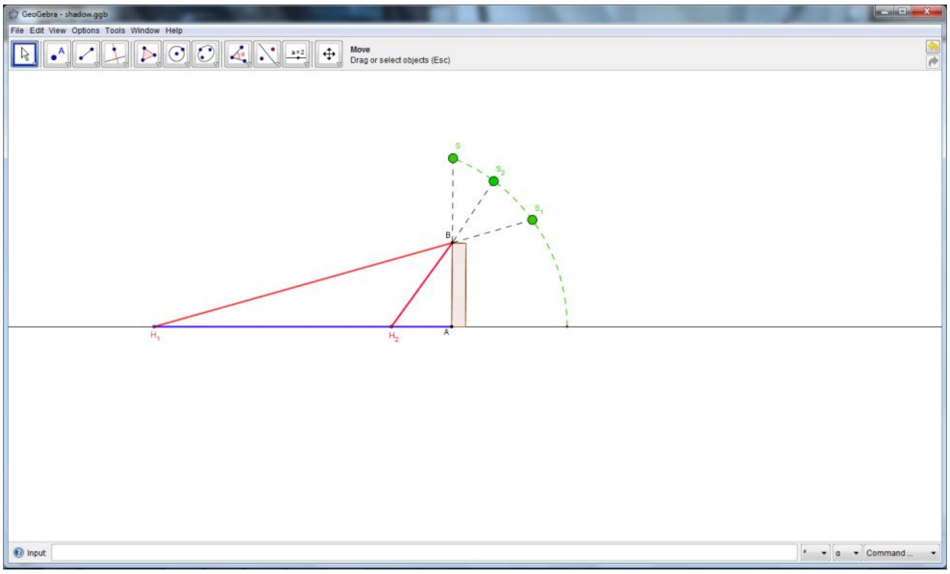
Pri riešení danej úlohy využijeme prostredie dynamického softvéru GeoGebra (Obr. 33).

Obr. 33 Fotografia upravená v GeoGebre

Stĺp na obrázku je postavený na móle pri rybníku a slúži na prichytenie lode. Medzi stĺp a jeho tieň natiahneme lano tak, aby vytvorili trojuholník.

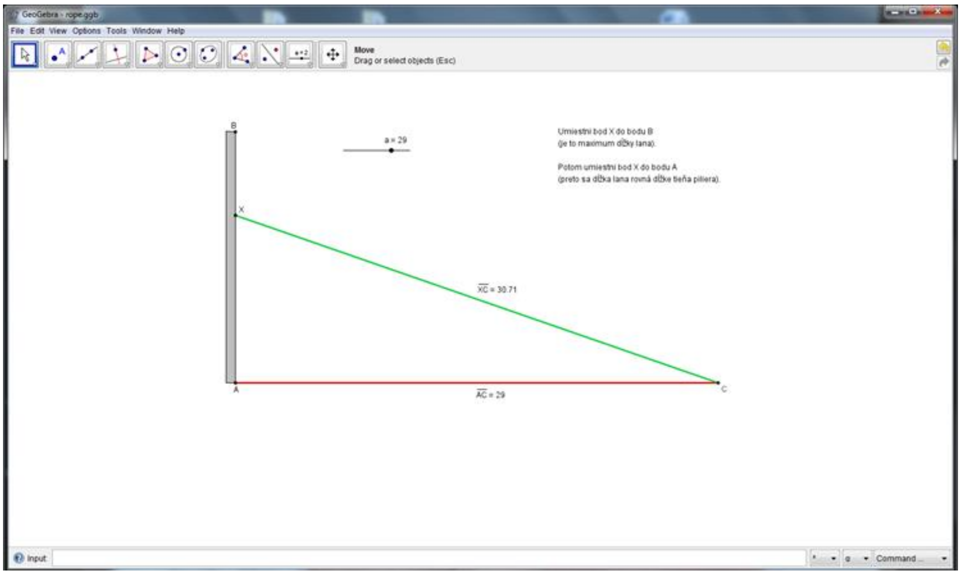
- Ako závisí dĺžka lana od dĺžky tieňa stĺpu? Kedy má tieň maximálnu a kedy minimálnu dĺžku?
- Ako závisí dĺžka lana od jeho uchytenia na stĺpe?

Pri riešení prvej úlohy použijeme vlastnosť, že dĺžka tieňa závisí od dopadu slnečného svetla na stĺp. S využitím softvéru GeoGebra môžeme danú situáciu prezentovať pohybom bodu S po kružnici, ktorej polomer je vzdialenosť medzi Slnkom a Zemou. Situácia na obr. 34 je modelom, v ktorom zanedbáme polohu tieňa a zameriame sa na jeho dĺžku. To nám umožní simulovať trojrozmerný jav v rovine, pričom polomer Zeme a Slnka zanedbáme.



Obr. 34 Závislosť tieňa stĺpu od polohy Slnka

V druhej úlohe dĺžka lana závisí od jeho umiestnenie na stĺpe. V GeoGebre môžeme meniť dĺžku lana pohybom bodu X na úsečke AB (X je bod, v ktorom je upevnené lano na stĺpe a úsečka AB predstavuje daný stĺp). Ak umiestnime bod X do bodu B, dostaneme maximálnu dĺžku lana. Umiestnením bodu X do bodu A sa dĺžka lana rovná dĺžke tieňa (Obr. 35).



Obr. 35 Dĺžka lana v závislosti od jeho umiestnenie na stĺpe

Využitím možností použitého softvéru môžeme uvedené riešenia úloh prezentovať v dynamickom prostredí. Žiaci tak môžu konkrétnu situáciu vnímať „v pohybe“ a skúmať požadované vzťahy a vlastnosti objektov. Učiteľ si môže pripraviť takéto úlohy aj formou apletov (Rumanová, Pavlovičová, 2012).

Záver

Význam Pytagorovej vety v školskej praxi je veľký, pretože je použiteľná hlavne v praktických situáciách prepojených na bežný život. Spomenieme teda fakt, že sledovaním vieme zistiť, či napríklad dve priamky alebo trojuholníky vyskytujúce sa v akejkoľvek situácii okolo nás, sú kolmé alebo pravouhlé. Potom vieme použiť Pytagorovu vetu na zistenie dĺžky potrebnej strany, ak sú známe dĺžky zvyšných strán na danom predmete. Podobných praktických úloh nájdeme viacej, a preto aj implementácia uvedenej problematiky do školskej praxe je významná a potrebná.

Pytagorova veta určite patrí medzi najčastejšie používanú vetu v školskej praxi a je pravdepodobne aj najslávnejšou matematickou vetou vôbec. Je to zároveň veta s najväčším počtom dôkazov, v dostupných zdrojoch sa ich uvádza až okolo 300. Táto geometrická veta je použiteľná aj v praktickom živote. Popísané aktivity v príspevku sú riešiteľné aj pre slabších žiakov, čo môže byť pre nich zároveň silne motivujúce. Motiváciou pre žiakov môžu byť aj konkrétne ukážky využitia všeobecného znenia Pytagorovej vety, prípadne aj historický pohľad na túto vetu.

Popísanú problematiku je vhodné prepojiť s bádateľsky orientovaným vyučovaním. Taktiež moderné digitálne technológie podporujú experimentálnu činnosť žiakov. Vhodne pripravená bádateľská aktivita je vhodná pre rôzne stupne vzdelávania a môže mať výrazný pozitívny efekt na zlepšenie konceptuálneho porozumenia učiva žiakmi v rôznych prírodovedných predmetoch ako dôsledok aktívnej práce v bádateľskom procese. Uvádzame preto niekoľko aktivít k téme Pytagorova veta s prepojením na bádateľsky orientované vyučovanie s podporou dynamického softvéru využívaného vo vyučovaní geometrie.

Veríme, že sme touto publikáciou ukázali, aké môže byť vyučovanie matematiky zaujímavé a podnetné.

Literatúra

[1] Banchi, H. a Bell, R. 2008. The many levels of inquiry. In Science and children. ISSN: 00368148, 2008, 46, 2, 26-29.

[2] Bell, G. G. 2005. Clusters, networks, and firm innovativeness. In Strategic management journal. ISSN: 01432095, 2005, 26, 3, 287-295.

[3] Fulier, J. a kol. (2011). Nové aspekty reformy matematického vzdelávania. Nitra: Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2011. 241 s. ISBN 978-80-558-0013-4

[4] Herron, M. D. 1971. The nature of scientific enquiry. In The school review. ISSN: 00366773, 79, 1971, 2, 171-212.

[5] Ješková, Z., Lukáč, S., Šnajder, Ľ., Guniš, J., Balogová, B. a Kireš, M. (2016). Hodnotenie bádateľských zručností žiakov gymnázia. Scientia in Educatione, 7(2), s. 48 – 70.

[6] Jirotková, D. a Kloboučková, J. (2011). Pythagorova věta tvořivě. In Tvořivosť v počátečním vyučování matematiky. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011, s. 100-104. ISBN 978-80-7043-992-0.

[7] Kireš, M. a Ješková, Z. (2016). Pripravenosť učiteľa fyziky na bádateľsky orientovanú výučbu. Tvorivý učiteľ fyziky VIII, Národný festival fyziky 2015. Slovenská fyzikálna spoločnosť, 231 s.

[8] Kireš, M., Ješková, Z., Ganajová, M. a Kimáková, K. (2016). Bádateľské aktivity v prírodovednom vzdelávaní. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. 128 s.

[9] Llewellyn, D. 2002. Inquire Within: Implementing Inquiry-Bases Science Standards. Corwin Press, 2002. 258 s. ISBN 978-1-4522-4445-7.

[10] Lukáč, S., Šnajder, Ľ., Guniš, J. a Ješková, Z. (2016). Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách. 1. vydanie. Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, 2016. 220 s. ISBN 978-80- 8152-471-4.

[11] Pavlovičová, G., Čeretková, S., Melušová, J., Rumanová, L., Sovičová, M. a Šunderlík, J. (2012). Experimentujeme v elementárnej matematike. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2012. 122 s. ISBN 978-80-558-0126-1.

[12] Pavlovičová, G., Rumanová, L. a Vidermanová, K. (2010). Zábavné úlohy z geometrie. Nitra: Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2010. 90 s. ISBN 978-80-8094-789-7.

[13] Pavlovičová, G., Rumanová, L. a Záhorská, K. (2013). Rozvoj geometrických predstáv o Pytagorovej vete. In Acta Mathematica 16: zborník príspevkov z 11. nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre. 1. vydanie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2013. ISBN 978-80-558-0365-4, s. 167-172.

[14] Páleníková, K., Záhorská, J., Vargová, M. a Rumanová, L. (2020). Základy matematiky 2. 1 vydanie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2020. 276 s. ISBN 978-80-558-1606-7.

[15] Rumanová, L. a Pavlovičová, G. (2012). Rôzne prístupy k tvorbe geometrických úloh. In Acta Mathematica 15: zborník príspevkov z X. nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky Fakulta prírodných vied Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre dňa 13. septembra 2012. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2012. ISBN 978-80-558-0135-3, s. 115-120.

[16] Rumanová, L. a Záhorská, J. (2021). Námety k vyučovaniu geometrie v sekundárnom matematickom vzdelávaní s akcentom na riadené bádanie. In Acta Mathematica Nitriensia. - ISSN 2453-6083, Roč. 7, č. 2 (2021), s. 1-7.

[17] Schwab, J. J. a Brandwein, P. F. 1962. The teaching of science as enquiry. Harvard University Press, 1962. 152 s. ISBN 978-0674870468.

[18] Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. In Teaching and Teacher Education, 2001, 17, s. 213-226.

[19] Šedivý, O., Melušová, J., Pavlovičová, G., Rumanová, L., Švecová, V., Vallo, D. a Vidermanová, K. (2008). Zbierka zaujímavých, zábavných a aplikačných úloh z matematiky. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2008. 140 s. ISBN 978-80-8094-421-6.

[20] ŠPÚ. (2015). Štátny vzdelávací program pre nižšie sekundárne vzdelávanie – 2. stupeň základnej školy. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. Dostupné na: https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf

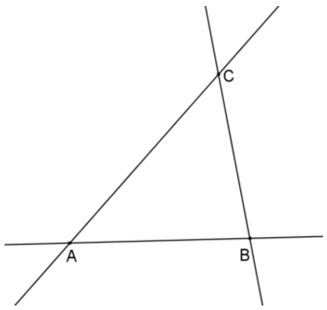
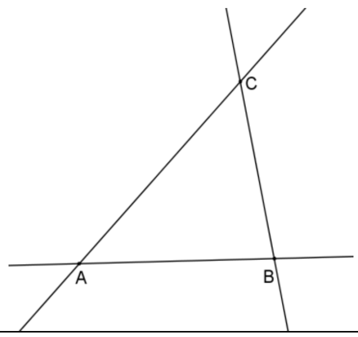
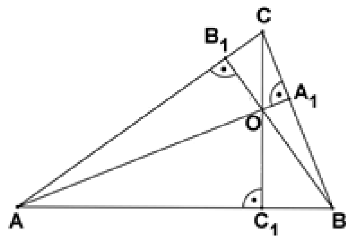
[21] Tomengová, A. (2012). Aktívne učenie sa žiakov – stratégie a metódy. Bratislava: Metodicko – pedagogické centrum. ISBN 9 78-80-8052-421-0, 64 s.

Internetový zdroj

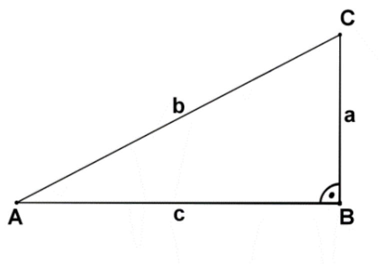
[22] https://oskole.detiamy.sk/clanok/pytagorova-veta-a-jej-odvodenie

Prílohy – pracovné listy

Už ste si zopakovali, čo ste sa už učili o trojuholníku. Využite svoje vedomosti a vypracujte predložený pracovný list.

1.) Farebne vyznačte trojuholník ABC. Označte v obrázku jeho strany a vnútorné uhly. 	2.) Označte v obrázku vonkajšie uhly trojuholníka ABC. 	3.) Úsečky sú AA_1, BB_1, CC_1 .... trojuholníka. Bod *O* sa nazýva .... 

4.) Trojuholník na obrázku je .... Dorysujte chýbajúce výšky trojuholníka do obrázka, označte ich a vyznačte aj ortocentrum.



Doplňte názvy jednotlivých strán trojuholníka ABC na obrázku:

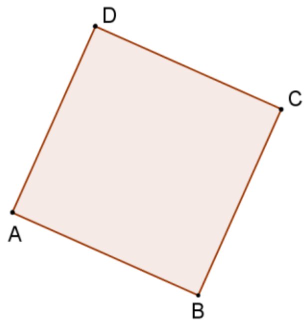
a ....

b ....

c ....

Napíšte vzorec na výpočet obsahu trojuholníka ABC : ....

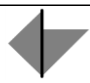
Určite si spomeniete aj na nasledovné:

5.) Rovinný útvar *ABCD* na obrázku je .... Narysujte jeho uhlopriečky.  	Doplňte chýbajúci text: Uhlopriečky štvorca zvierajú .... uhol. Uhlopriečky štvorca majú .... dĺžku. Spoločný bod (priesečník) uhlopriečok ich rozdeľuje na .... Doplňte vzorce na výpočet obvodu a obsahu štvorca: Obvod .... Obsah .... Vypočítajte obvod a obsah štvorca s dĺžkou strany $2,9\ cm$ (v riešení uveďte správne jednotky).

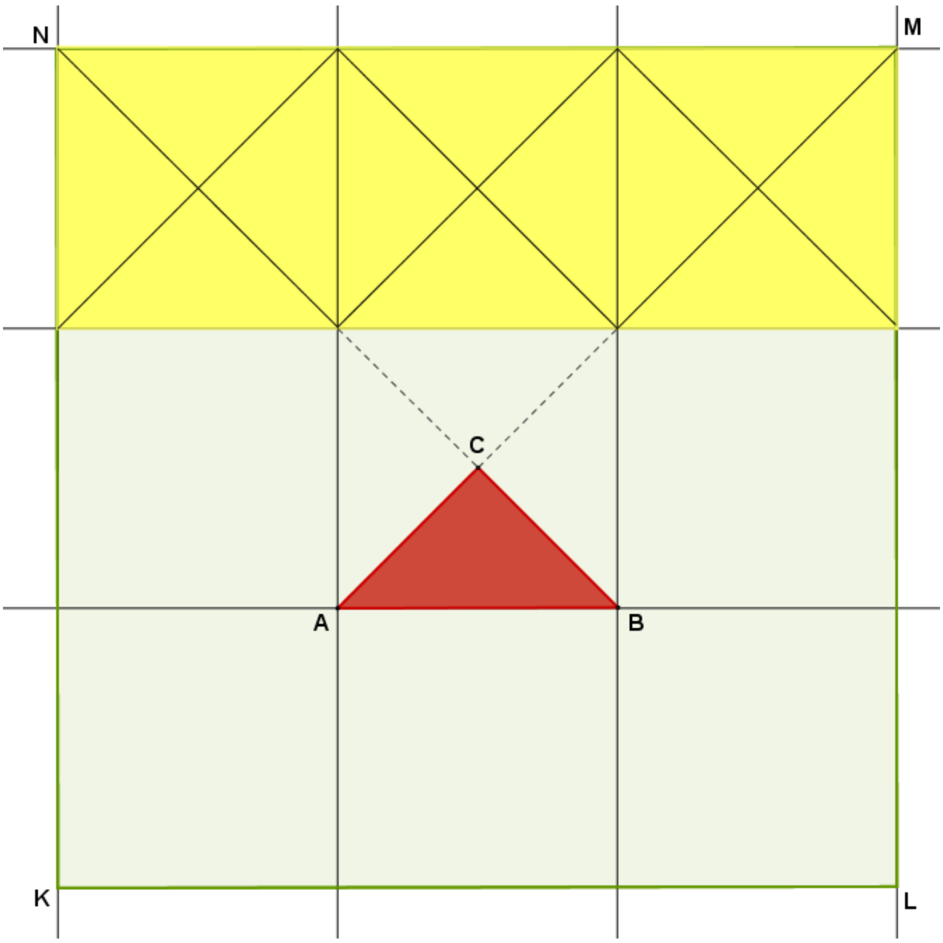
Zo štvorca $KLMN$ zostrojeného v štvorcovej sieti nižšie si vystrihnite dvanásť žltých trojuholníkov.

Popíšte vlastnosti týchto trojuholníkov. Svoje tvrdenia zdôvodnite.

Chvíľu sa zabavte ukladaním žltých trojuholníkov „okolo“ trojuholníka ABC tak, aby ste vždy jednu stranu vystrihnutého žltého trojuholníka priložili ku strane trojuholníka ABC a aby sa tieto strany prekrývali.

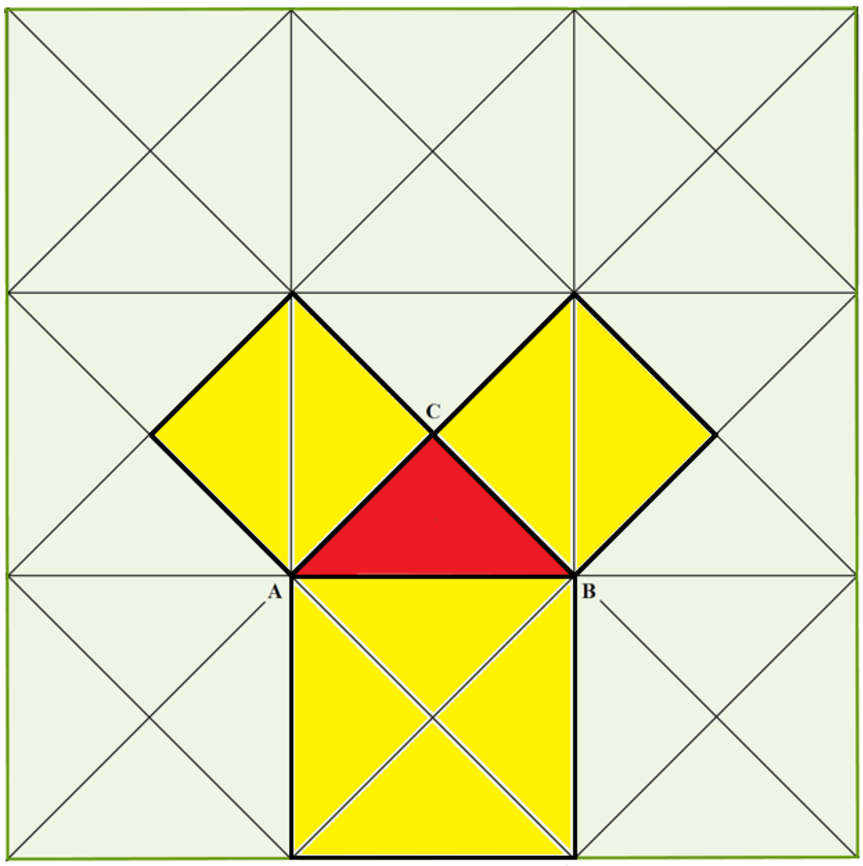
Správne prikladanie:			Nesprávne prikladanie:		

Ďalším prikladaním žltých trojuholníkov k už uloženým žltým trojuholníkom k trojuholníku ABC vytvorte žlté štvorce. Pokúste sa sformulovať svoje zistenia.



Pracovný list č. 3

Svoje zistenia z Pracovného listu č. 2 porovnajte s nasledovným obrázkom:



Odmerajte a zapíšte dĺžky strán trojuholníka ABC: $a =$ $mm, b =$ $mm, c =$ $mm.$
Vypočítajte:

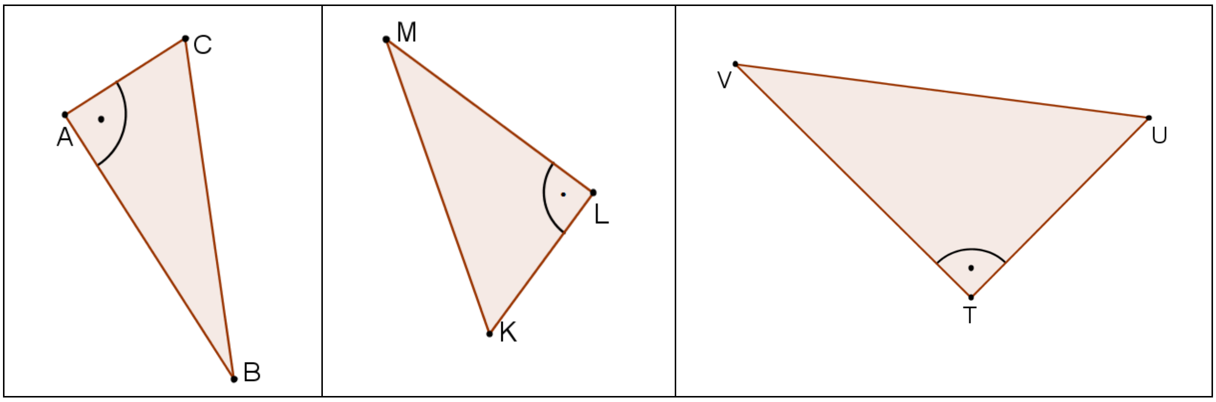
obsah štvorca s dĺžkou strany *a*:

obsah štvorca s dĺžkou strany *b*:

obsah štvorca s dĺžkou strany *c*:

Pokúste sa nájsť vzťah medzi vypočítaným hodnotami. Svoje zistenia porovnajte so zisteniami ostatných spolužiakov.

Odmeraním zistite dĺžky strán pravouhlých trojuholníkov ABC, KLM a TUV (dĺžky uveďte v milimetroch). Na výpočet druhých mocnín použite kalkulačku. Hodnoty zapíšte so správnymi jednotkami.



Doplnením znakov: $=$, $\doteq$, $+$ do prázdnych rámikov zapíšte vzťah medzi hodnotami druhých mocnín.

$\triangle\ ABC$	$a =$	$a^2 =$	$a^2 \ \boxed{}\ b^2 \ \boxed{}\ c^2$
	$b =$	$b^2 =$	
	$c =$	$c^2 =$	

$\triangle\ KLM$	$k =$	$k^2 =$	$l^2 \ \boxed{}\ m^2 \ \boxed{}\ k^2$
	$l =$	$l^2 =$	
	$m =$	$m^2 =$	

<table>
<tr><td>$\triangle TUV$</td><td>$t =$ ....</td><td>$t^2 =$ ....</td><td rowspan="3">$t^2 \; \square \; u^2 \; \square \; v^2$</td></tr>
<tr><td></td><td>$u =$ ....</td><td>$u^2 =$ ....</td></tr>
<tr><td></td><td>$v =$ ....</td><td>$v^2 =$ ....</td></tr>
</table>

Na základe vlastných výpočtov sformulujte závery.

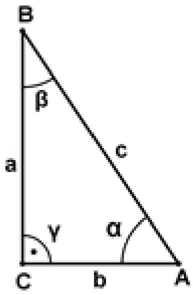
Svoje závery porovnajte s údajmi/hodnotami na internetových stránkach:

https://www.geogebra.org/m/aCyxsdGk	https://www.geogebra.org/m/xbs2guhr

Pracovný list č. 5

Pytagorova veta:

Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad obidvomi odvesnami.



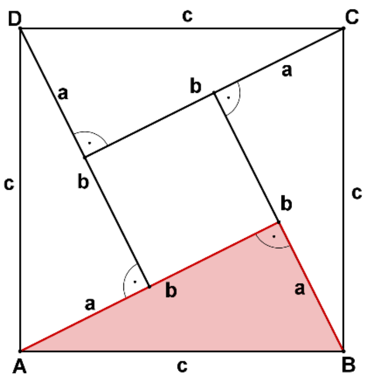
Zápis Pytagorovej vety

v pravouhlom trojuholníku ABC s <u>preponou</u> c, <u>odvesnami</u> a, b:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Existuje veľa dôkazov Pytagorovej vety, jeden uvádzame nižšie.

Dôkaz Pytagorovej vety:



Štvorec $ABCD$ s obsahom S tvoria štyri pravouhlé trojuholníky s rovnakým obsahom $S_t = \frac{ab}{2}$ a štvorec so stranou $b - a$ a obsahom $S_š = (b-a)^2$. Obsah štvorca $ABCD$ je $S = 4S_t + S_š$ a súčasne $S = c^2$. Z rovnosti $4S_t + S_š = c^2$ po dosadení $4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2 = c^2$ dostávame rovnosť: $2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2$, z ktorej vyplýva: $c^2 = a^2 + b^2$, čo sme chceli aj dokázať.

Úloha 1: Porovnajte uvedené informácie so zisteniami z Pracovného listu č. 4.

Úloha 2: Zistite približný počet doteraz zverejnených dôkazov Pytagorovej vety na internete a najzaujímavejší si zapíšte (narysujte) a odovzdajte na najbližšej vyučovacej hodine.

Zostrojte trojuholníky podľa zadaní. Určte odmeraním a zapíšte dĺžky strán a aj veľkosti vnútorných uhlov, ktoré chýbajú.

Zadanie: $\triangle ABC$ *a* = 6 cm *b* = 8 cm *c* = 10 cm	Meranie: $\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$
Zadanie: $\triangle TUV$ *t* = 5 cm *u* = 4 cm *v* = 3 cm	Meranie: $\lvert\sphericalangle TUV\rvert =$ $\lvert\sphericalangle UVT\rvert =$ $\lvert\sphericalangle VTU\rvert =$
Zadanie: $\triangle XYZ$ *x* = 12 cm *y* = 13 cm *z* = 5 cm	Meranie: $\lvert\sphericalangle XYZ\rvert =$ $\lvert\sphericalangle YZX\rvert =$ $\lvert\sphericalangle ZXY\rvert =$
Zadanie: $\triangle MNO$ *m* = 12 cm *n* = 13 cm $\lvert\sphericalangle MON\rvert = 90°$	Meranie: *o* = $\lvert\sphericalangle MNO\rvert =$ $\lvert\sphericalangle OMN\rvert =$

Náčrt:	Konštrukcia:
Náčrt:	Konštrukcia:
Náčrt:	Konštrukcia:
Náčrt:	Konštrukcia:

Ostrouhlé trojuholníky sú: Pravouhlé trojuholníky sú: Tupouhlé trojuholníky sú:

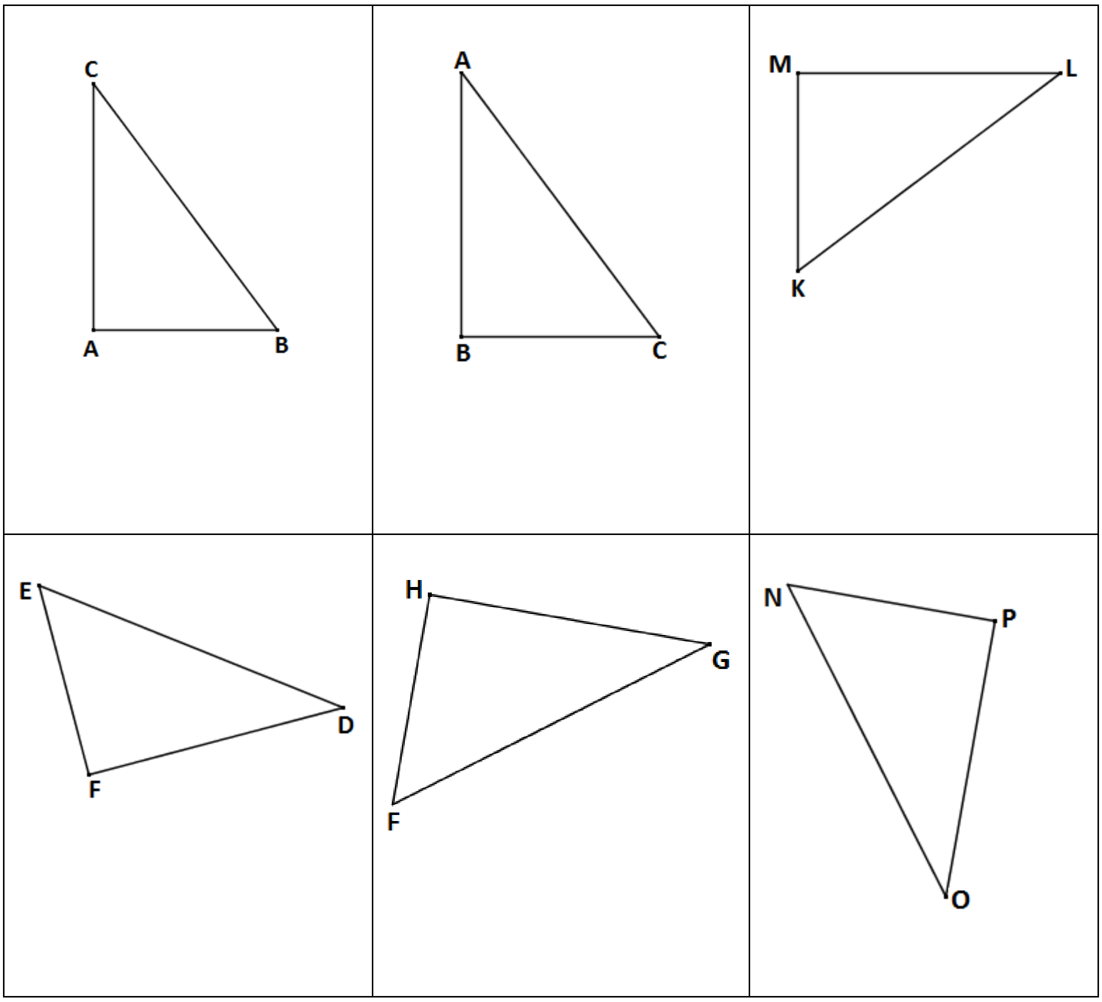
Pracovný list č. 7

<u>Obrátená Pytagorova veta:</u>

Ak pre dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka ABC so stranami a, b, c pričom najdlhšou stranou je strana c platí: $c^2 = a^2 + b^2$, tak je tento trojuholník pravouhlý a jeho preponou je strana c a odvesnami sú strany a, b.

S použitím obrátenej Pytagorovej vieme výpočtom overiť, či trojuholník určený dĺžkou všetkých jeho strán je, alebo nie je, pravouhlý.

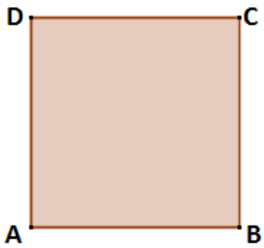
Úloha: V nasledovných trojuholníkoch vyznačte pravý uhol a zapíšte ku každému z nich Pytagorovu vetu.

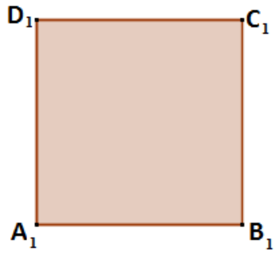


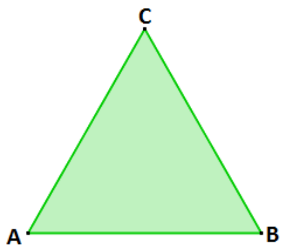
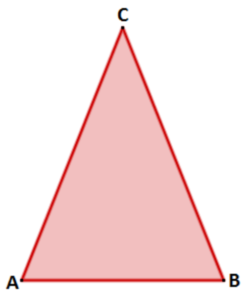
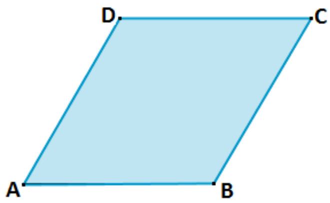
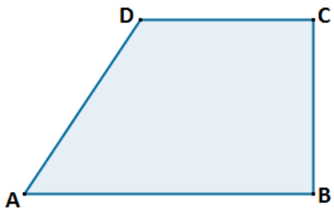
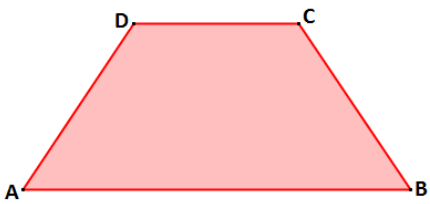
Domáca úloha: Zistite, aké čísla (prípadne skupiny čísel) sa označujú ako pytagorejské (pytagorovské).

Úloha 1: V rovinných útvaroch pohľadajte a farebne vyznačte pravouhlé trojuholníky, ktoré by vám mohli pomôcť pri riešení rôznych úloh (napríklad pri určovaní dĺžky úsečky nevyhnutnej k vyriešeniu úlohy). Ak je viac možností, nájdite ich.

Úloha 2: Označte strany vyznačených pravouhlých trojuholníkov a zapíšte Pytagorovu vetu.

<table>
<tr><td colspan="2">štvorec



</td></tr>
<tr><td>obdĺžnik

</td><td>rovnostranný trojuholník

</td></tr>
<tr><td>rovnoramenný trojuholník

</td><td>kosoštvorec

</td></tr>
<tr><td>pravouhlý lichobežník

</td><td>rovnoramenný lichobežník

</td></tr>
</table>

Pytagorova veta v školskej praxi

Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Názov:	Pytagorova veta v školskej praxi
Autor:	doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
	PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
Vydavateľ:	Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Edícia:	Prírodovedec č. 799
Rok vydania:	2022
Miesto vydania:	Nitra
Počet strán:	59 (3,11 AH)

ISBN 978-80-558-1953-2

9 788055 819532