UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED A INFORMATIKY

Mnohouholníky v pokrývaní roviny

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.

Katedra matematiky

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Publikácia je podporená z projektu *"Skvalitňovanie praktickej prípravy budúcich pedagogických zamestnancov na UKF" ITMS 312011Z815",* ktorý sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje.

www.esf.gov.sk www.minedu.gov.sk

Názov: Mnohouholníky v pokrývaní roviny

Edícia Prírodovedec č. 800

Autori:

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.

ISBN 978-80-558-1954-9

Obsah

ÚVOD **4**

1 MNOHOUHOLNÍKY V UČIVE MATEMATIKY **5**

1.1 Prehľad učiva o mnohouholníkoch podľa ŠVP pre jednotlivé stupne vzdelávania 5

1.2 Vybrané vlastnosti mnohouholníkov 8

2 POKRÝVANIE ROVINY **24**

2.1 Použitie stavebnice Polydron vo vyučovaní témy „Pokrývanie roviny“ 28

3 AKTIVITY ZAMERANÉ NA ROVINNÉ GEOMETRICKÉ ÚTVARY A POKRÝVANIE ROVINY **30**

3.1 Aktivita: Moje telo vie „kresliť“ geometrické tvary 30

3.2 Aktivita: Cestujeme na dovolenku 31

3.3 Aktivita: Podlaha do detskej izby 32

3.4 Aktivita: Pokrytie roviny pravidelnými mnohouholníkmi (mozaika) 33

ZÁVER **35**

LITERATÚRA **36**

PRÍLOHY **38**

Úvod

Jedným z významných cieľov matematického vzdelávania je rozvoj geometrickej predstavivosti. Vo vyučovaní matematiky je z tohto pohľadu významná tvorba a výber úloh a realizácia zaujímavých aktivít. Je možné inšpirovať sa súčasnými i historickými učebnicami matematiky, zároveň veľa podnetov nachádzame v reálnom živote. Okrem prírody sú bohatým zdrojom inšpirácie výsledky ľudskej činnosti, napríklad inšpiráciu nachádzame aj prostredníctvom umeleckých diel a ich uplatnenia vo výzdobe interiérov a exteriérov rôznych stavieb.

V publikácii sa zaoberáme pokrývaním roviny mnohouholníkmi. Prvú kapitolu sme preto zamerali na zaradenie učiva o mnohouholníkoch do jednotlivých stupňov vzdelávania podľa štátneho vzdelávacieho programu. Venujeme sa v nej tiež prehľadu základných poznatkov o mnohouholníkoch, niektorými z nich musí žiak disponovať, aby zvládol realizáciu neskôr navrhovaných aktivít zameraných na pokrývanie roviny. Obsahom druhej kapitoly sú teoreticky spracované literárne zdroje, ktorými sprostredkovávame rôzne informácie o pokrývaní roviny, teseláciách, zameriavame sa však predovšetkým na pokrývanie roviny mnohouholníkmi. V tretej kapitole uvádzame návrhy aktivít k riešenej problematike s využitím rôznych pomôcok. Táto kapitola obsahuje aktivity vhodné pre predprimárne, primárne i sekundárne vzdelávanie. Aktivita vhodná predovšetkým pre sekundárne je zameraná na pokrývanie roviny pravidelnými mnohouholníkmi.

V predloženej publikácii sme sa snažili pripraviť teoretický základ, ktorý považujeme za postačujúci pri realizácii neskôr uvedených aktivít, zameraných na rovinné geometrické útvary a pokrývanie roviny. Dúfame, že spracovaná problematika bude inšpiratívna pre učiteľov z praxe, budúcich učiteľov matematiky a zároveň pomôže žiakom prepojiť teoretické poznatky s praxou.

Autorky

1 Mnohouholníky v učive matematiky

Žiaci sa s rovinnými útvarmi stretávajú na všetkých stupňoch vzdelávania v rôznom rozsahu. V prvej kapitole uvedieme obsah matematického vzdelávania z pohľadu zaradenia učiva o mnohouholníkoch v štátnom vzdelávacom programe pre jednotlivé stupne vzdelávania. Následne uvádzame aj prehľad vybraných poznatkov o mnohouholníkoch, ktoré možno považovať za základ pri prehlbovaní matematického vzdelávania a ktoré sú významné tiež z hľadiska ich využitia pri realizácii aktivít spracovaných v tretej kapitole publikácie.

1.1 Prehľad učiva o mnohouholníkoch podľa ŠVP pre jednotlivé stupne vzdelávania

Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách (2016) vo svojom obsahu už v predškolskom vzdelávaní uvádza v obsahovom a výkonovom štandarde, že dieťa v skupine rovinných útvarov identifikuje (aj hmatom) a približne nakreslí kruh, štvorec, obdĺžnik, trojuholník, hľadá spoločné aj odlišné vlastnosti dvoch konkrétnych geometrických objektov, pokúša sa popisovať daný geometrický objekt, hľadá a skúša zdôvodniť, prečo daný objekt nemôže byť určený objekt. K tomuto stretávaniu sa s rovinnými útvarmi sa spočiatku využívajú predovšetkým modely telies, ktoré si deti otáčajú, obkresľujú a pod. Deti sú vedené k tvorbe rovinných útvarov činnosťami ako napríklad kreslenie, strihanie, lepenie, skladanie, lámanie, modelovanie. Učiteľ vedie dieťa k tomu, aby vedelo poskladať z primeraného množstva útvarov obrázok podľa predlohy alebo pokynov a na danú tému.

Na primárnom stupni vzdelávania v prvom ročníku žiaci vedia rozlíšiť, pomenovať a nakresliť rovinné geometrické útvary (kruh, štvorec, trojuholník, obdĺžnik), v druhom ročníku základnej školy sa učia identifikovať a pomenovať mnohouholníky (trojuholník, štvoruholník,...) a identifikovať ich strany a vrcholy. V treťom ročníku už vedia narysovať rovinné útvary v štvorcovej sieti a označiť ich vrcholy veľkým tlačeným písmenom, vyznačiť bod, ktorý danému geometrickému útvaru patrí, resp. nepatrí, zväčšiť a zmenšiť rovinné útvary v štvorcovej sieti (štvorec, obdĺžnik). V poslednom ročníku primárneho vzdelávania vie žiak identifikovať a pomenovať mnohouholník (štvoruholník, päťuholník,...), vymenovať vrcholy a strany mnohouholníka (trojuholníka, štvorca a obdĺžnika, štvoruholníka, päťuholníka,...), označiť vrcholy mnohouholníka (trojuholníka, štvorca a obdĺžnika, štvoruholníka, päťuholníka,...), vyznačiť protiľahlé i susedné strany štvorca a obdĺžnika, vo štvorci a obdĺžniku vyznačiť uhlopriečky, popísať vlastnosti rovinných geometrických útvarov (trojuholník, štvorec, obdĺžnik - počet strán, počet vrcholov, dĺžky susedných a protiľahlých strán), odmerať dĺžky strán trojuholníka, štvorca, obdĺžnika (s presnosťou na milimetre), narysovať trojuholník a pomenovať jeho vrcholy, vypočítať obvod trojuholníka, štvorca a obdĺžnika ako súčet dĺžok strán. Vyučujúci v procese nadobúdania nových vedomostí u žiakov využívajú také metódy a formy vyučovania, aby prevažovalo „pozorovanie a experimentovanie v ich prirodzenom prostredí“ a aby naplnili myšlienku „Učenie matematiky by malo byť pre žiakov zaujímavé, aby sa u nich formoval pozitívny vzťah k matematike a aby ju vnímali ako nástroj na riešenie problémových úloh každodenného života.“ (Inovovaný Štátny vzdelávací program pre primárne vzdelávanie pre 1. stupeň ZŠ – matematika, 2015).

Podľa Štátneho vzdelávacieho programu pre 2.stupeň ZŠ – matematika (2015) sa učivo o mnohouholníkoch nachádza vo výkonových štandardoch jednotlivých ročníkov nasledovne:

5. ročník ZŠ – žiak na konci školského roka vie/dokáže:

rozlíšiť a načrtnúť rovinné útvary trojuholník, štvoruholník, štvorec, obdĺžnik, určiť ich vrcholy a strany, vo štvoruholníku aj uhlopriečky, narysovať trojuholník, štvorec, obdĺžnik, ak pozná dĺžky ich strán, poznať niektoré základné vlastnosti trojuholníka, štvoruholníka, štvorca, obdĺžnika, narysovať trojuholník, štvoruholník, štvorec, obdĺžnik vo štvorcovej sieti, odmerať dĺžky strán s presnosťou na milimetre, vyriešiť slovné úlohy s premenou jednotiek dĺžky a úlohy vyžadujúce základné poznatky o trojuholníku, štvorci a obdĺžniku, vypočítať obvod trojuholníka, štvorca, obdĺžnika, vypočítať obsah štvorca a obdĺžnika s celočíselnými rozmermi ako počet štvorcov, z ktorých sa skladá, zväčšiť a zmenšiť útvary vo štvorcovej sieti podľa návodu alebo pomocou inej siete, identifikovať rovinné geometrické útvary súmerné podľa osi a podľa stredu, nájsť (nakresliť/zostrojiť) osi súmernosti osovo súmerného útvaru, nájsť stred súmernosti stredovo súmerných rovinných útvarov, pracovať s osovo a stredovo súmernými útvarmi vo štvorcovej sieti, dokresliť, opraviť ich.

6. ročník ZŠ – žiak na konci školského roka vie/dokáže:

určiť približný obsah rovinného útvaru v štvorcovej sieti, vypočítať obvod a obsah štvorca a obdĺžnika v obore desatinných čísel, vypočítať obsah pravouhlého trojuholníka ako polovicu obsahu obdĺžnika, zanalyzovať útvary zložené zo štvorcov a obdĺžnikov z hľadiska možností výpočtu ich obsahu a obvodu, vypočítať obvod a obsah obrazcov zložených zo štvorcov a obdĺžnikov, vyriešiť úlohy z praxe na výpočet obvodov a obsahov útvarov zložených zo štvorcov a obdĺžnikov, rozlíšiť základné prvky trojuholníka, vypočítať veľkosť vonkajších uhlov trojuholníka, vyriešiť úlohy s využitím vlastností vnútorných a vonkajších uhlov trojuholníka, rozhodnúť o zhodnosti dvoch trojuholníkov v rovine, zostrojiť trojuholník podľa slovného postupu konštrukcie s využitím vety sss, sus a usu, opísať slovne postup konštrukcie trojuholníka, narysovať pravidelný šesťuholník, vie vetu o trojuholníkovej nerovnosti a rozhodnúť o možnosti zostrojenia trojuholníka z troch úsečiek, opísať rovnostranný a rovnoramenný trojuholník a ich základné vlastnosti (dĺžky strán a veľkosti uhlov, súmernosť), presne a čisto narysovať rovnostranný a rovnoramenný trojuholník, zostrojiť výšky trojuholníka (v ostrouhlom, tupouhlom a pravouhlom) a ich priesečník.

7. ročník ZŠ – žiak sa stretáva s mnohouholníkmi v náčrtoch a rysovaní obrazu kvádra a kocky vo voľnom rovnobežnom premietaní, v náčrte a rysovaní siete kvádra a kocky, v riešení úloh a slovných úloh na výpočet povrchu / objemu kvádra a kocky aj s využitím premeny jednotiek obsahu / objemu.

8. ročník ZŠ – žiak na konci školského roka vie/dokáže:

načrtnúť a pomenovať rovnobežníky: štvorec, kosoštvorec, obdĺžnik, kosodĺžnik, rozlíšiť a vysvetliť rozdiel medzi pravouhlými a kosouhlými rovnobežníkmi, narysovať štvorec, kosoštvorec, obdĺžnik, kosodĺžnik a správne označiť všetky ich základné prvky, zostrojiť a odmerať v rovnobežníku (štvorci, kosoštvorci, obdĺžniku, kosodĺžniku) jeho dve rôzne výšky, načrtnúť lichobežník, pomenovať a opísať jeho základné prvky, zostrojiť ľubovoľný lichobežník (všeobecný, pravouhlý, rovnoramenný) podľa daných prvkov a na základe daného konštrukčného postupu, vyriešiť primerané konštrukčné úlohy pre štvoruholníky s využitím vlastností konštrukcie trojuholníka a s využitím poznatkov o rovnobežníkoch a lichobežníkoch, vypočítať obvod a obsah štvorca, kosoštvorca, obdĺžnika, kosodĺžnika, lichobežníka a trojuholníka, vyriešiť slovné (kontextové a podnetové) úlohy z reálneho života s využitím poznatkov o obsahu a obvode rovnobežníka, lichobežníka a trojuholníka a s využitím premeny jednotiek dĺžky a obsahu, žiak sa, podobne ako v 7. ročníku, stretáva s mnohouholníkmi v náčrtoch a rysovaní obrazu kvádra, kocky a hranola (kolmý, pravidelný, trojboký, štvorboký, šesťboký,...) vo voľnom rovnobežnom premietaní, v náčrte a rysovaní ich sietí, v riešení úloh a slovných úloh na výpočet ich povrchu a objemu.

9. ročník ZŠ – žiak na konci školského roka vie/dokáže:

vymenovať základné prvky a vlastnosti pravouhlého trojuholníka, vyjadriť, zapísať a použiť Pytagorovu vetu na riešenie úloh a kontextových úloh z reálneho praktického života, stretáva sa s mnohouholníkmi v náčrtoch a rysovaní obrazu ihlana (pravidelný, trojboký, štvorboký,...) vo voľnom rovnobežnom premietaní, v náčrte a rysovaní jeho siete, v riešení úloh a slovných úloh na výpočet povrchu a objemu ihlana, vysvetliť podstatu zhodnosti a podobnosti dvoch geometrických útvarov, rozhodnúť o podobnosti dvojice trojuholníkov v rovine, vypočítať pomer podobnosti dvoch podobných trojuholníkov, na základe viet o podobnosti trojuholníkov vyriešiť primerané výpočtové a konštrukčné úlohy, využiť vlastnosti podobnosti trojuholníkov pri riešení praktických úloh zo života pri meraní (odhadovaní) vzdialeností a výšok, určiť skutočnú vzdialenosť (mierka mapy) a skutočné rozmery predmetov (mierka plánu).

Štátny vzdelávací program pre gymnáziá so štvorročným a päťročným vzdelávacím programom - matematika (2015) formuluje požiadavky na žiakov, ktorí nebudú maturovať z matematiky (požiadavky na maturantov určuje dokument Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky). Podľa uvedeného ŠVP žiak v tematickom okruhu Geometria a meranie vie/dokáže:

rozhodnúť, či sú dva trojuholníky zhodné alebo podobné, trojuholník (ostrouhlý, pravouhlý, tupouhlý, rovnoramenný a rovnostranný trojuholník, vrchol, strana a výška trojuholníka, ťažnica a ťažisko trojuholníka, kružnica trojuholníku vpísaná a opísaná), vlastnosti zhodnosti a podobnosti použiť vo výpočtoch a pri odvodzovaní ďalších vzťahov (napr. niektorých vzorcov pre výpočet obsahu alebo vzťahov pre výpočet neprístupných dĺžok), odvodiť Pytagorovu a Euklidove vety, vypočítať dĺžky i vzdialenosti pomocou týchto viet, vysvetliť myšlienku odvodenia vzorcov pre obsah rovnobežníka, trojuholníka a lichobežníka, používať vzorce na výpočet obsahu základných rovinných útvarov (rovnobežník, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec, lichobežník, rovnoramenný a pravouhlý lichobežník, pravidelný mnohouholník), vrátane jednoduchých prípadov, keď je potrebné niektoré údaje dopočítať z ostatných údajov, vypočítať obsah rovinných útvarov rozložiteľných na základné rovinné útvary, približne vypočítať obvod a obsah narysovaných trojuholníkov, n-uholníkov, odvodiť Tálesovu vetu a využiť ju pri jednoduchých konštrukčných úlohách, použiť geometriu pravouhlého trojuholníka na výpočet veľkosti jeho uhlov a dĺžok strán, rozhodnúť, či je daný útvar osovo (stredovo) súmerný, stretáva s mnohouholníkmi v náčrtoch a rysovaní obrazov telies (kocka, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder, ihlan, pravidelný n-boký ihlan, štvorsten, pravidelný štvorsten) vo voľnom rovnobežnom premietaní, v náčrte a rysovaní ich sietí, v konštrukcii rovinných rezov kocky, kvádra rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa, v riešení úloh a slovných úloh na výpočet ich povrchu a objemu.

Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky (2016) zahŕňajú sínusovú a kosínusovú vetu, použitie goniometrie pri výpočtoch vo všeobecnom trojuholníku, zhodné a podobné zobrazenia.

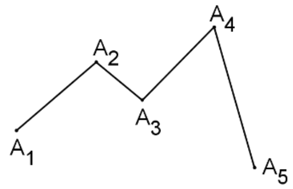
1.2 Vybrané vlastnosti mnohouholníkov

Keďže sa v publikácii venujeme použitiu mnohouholníkov v pokrývaní roviny, v tejto podkapitole uvádzame prehľad základných vlastností mnohouholníkov. Niektoré z nich sú súčasťou učiva základnej školy, niektoré neskôr súčasťou stredoškolského učiva. V tomto teoretickom spracovaní problematiky si učiteľ matematiky nájde informácie, ktoré považuje za potrebné k realizácii neskôr spracovaných aktivít.

Mnohouholníky

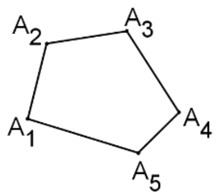
Nech je v rovine daných n rôznych bodov $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ $(n \in N, n \geq 3)$, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Potom:

a) zjednotenie úsečiek $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}\,A_n$ sa nazýva *lomená čiara* (na obrázku $n = 5$),



Obr. 1 Lomená čiara

b) zjednotenie úsečiek $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}\,A_n\,, A_n\,A_1$ sa nazýva *uzavretá lomená čiara* (na obrázku $n = 5$).

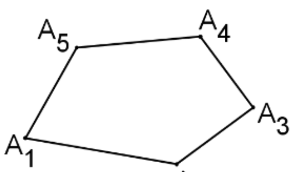


Obr. 2 Uzavretá lomená čiara

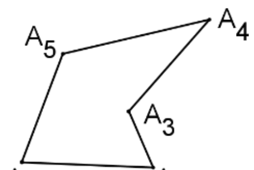
Uzavretá lomená čiara, skladajúca sa z úsečiek, ktoré sa nepretínajú, ohraničuje časť roviny nazývanú *mnohouholník*, resp. n-uholník. Uzavretá lomená čiara $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}\,A_nA_1$ je jeho *hranica* (patrí mnohouholníku), body $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sú jeho *vrcholy* a úsečky $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}\,A_n\,, A_n\,A_1$ sú jeho *strany*. $N - uholník$ má n vrcholov a n strán. Strany so spoločným krajným bodom (vrcholom mnohouholníka) sa nazývajú *susedné strany*. Vrcholy mnohouholníka, ktoré sú krajnými bodmi niektorej jeho strany, sa nazývajú *susedné vrcholy*. Úsečka, ktorej krajnými bodmi sú ľubovoľné dva nesusedné vrcholy, sa nazýva *uhlopriečka* mnohouholníka.

V n-uholníku počet uhlopriečok p vypočítame zo vzťahu: $p = \frac{n.(n-3)}{2}$.

N-uholník $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}\,A_n$ sa nazýva *konvexný* n-uholník, ak je prienikom polrovín $\overrightarrow{A_1A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_3A_4}\,,\ \overrightarrow{A_3A_4A_5}\ \dots, \overrightarrow{A_{n-1}\,A_n\,A_1}$.



Obr. 3 Konvexný 5-uholník



Obr. 4 Nekonvexný 5-uholník

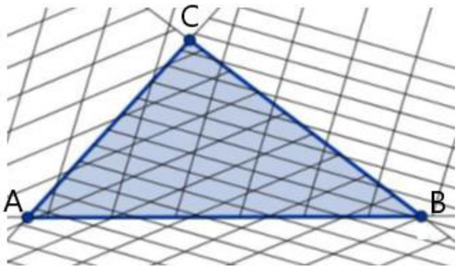
Uhly s ramenami, na ktorých ležia susedné strany n-uholníka a obsahujú aspoň jeden vnútorný bod n-uholníka, sa nazývajú *vnútorné uhly* n-uholníka. Konvexný n-uholník má konvexné vnútorné uhly. Susedné uhly vnútorných uhlov sa nazývajú *vonkajšie uhly* konvexného n-uholníka.

Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov konvexného n-uholníka je $(n-2).180°$.

Konvexný n-uholník, ktorému možno opísať kružnicu (ležia na nej všetky jeho vrcholy), sa nazýva *tetivový*. Konvexný n-uholník, ktorému možno vpísať kružnicu (dotýka sa všetkých jeho strán), sa nazýva *dotyčnicový.*

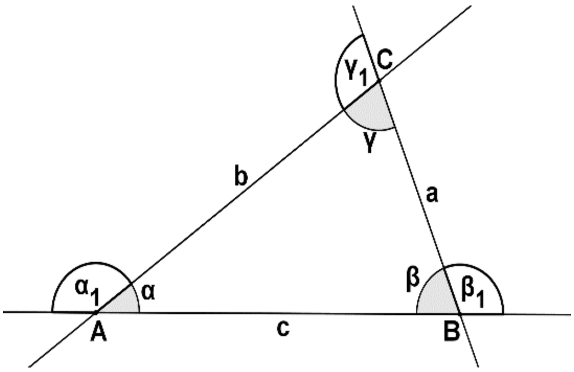
Trojuholník

Trojuholník je jeden zo základných rovinných geometrických útvarov. Nech sú v rovine dané tri rôzne body A, B, C, ktoré neležia na jednej priamke. Trojuholník ABC je útvar, ktorý vznikne prienikom polrovín $\overrightarrow{ABC}, \overrightarrow{BCA}, \overrightarrow{CAB}$ (Obr. 4).



Obr. 5 Trojuholník ako prienik polrovín

Uvedieme ďalej označenie jednotlivých strán a uhlov v trojuholníku ABC (Obr. 5):



Obr. 6 Označenie strán a uhlov v trojuholníku

A, B, C ... vrcholy trojuholníka ABC
$a = BC, b = AC, c = AB$ ... strany trojuholníka ABC
$\alpha = \sphericalangle BAC, \beta = \sphericalangle ABC, \gamma = \sphericalangle ACB$ ... vnútorné uhly trojuholníka ABC
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ... vonkajšie uhly trojuholníka ABC
(dvojice uhlov: $\alpha, \alpha_1; \beta, \beta_1; \gamma, \gamma_1$ sú susedné uhly)

Vlastnosti a prvky trojuholníka

Súčet dĺžok ľubovoľných dvoch strán každého trojuholníka je väčší ako dĺžka tretej strany, rozdiel dĺžok ľubovoľných dvoch strán každého trojuholníka je menší ako dĺžka tretej strany. Vlastnosť sa nazýva trojuholníková nerovnosť.

Súčet veľkostí vnútorných uhlov každého trojuholníka je $180°$.

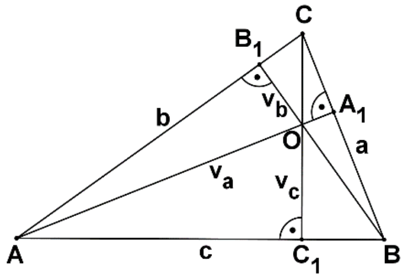
Oproti dlhšej (kratšej) strane trojuholníka leží väčší (menší) vnútorný uhol tohto trojuholníka. Oproti zhodným stranám trojuholníka ležia zhodné vnútorné uhly.

Veľkosť vonkajšieho uhla trojuholníka sa rovná súčtu veľkostí vnútorných uhlov tohto trojuholníka, ktoré sú susednými uhlami zvyšných dvoch vonkajších uhlov daného trojuholníka.

Výšky trojuholníka

Výšky každého trojuholníka sa pretínajú práve v jednom bode, ktorý sa nazýva ortocentrum, ozn. *O* (pozri Obr. 7, Obr. 8).

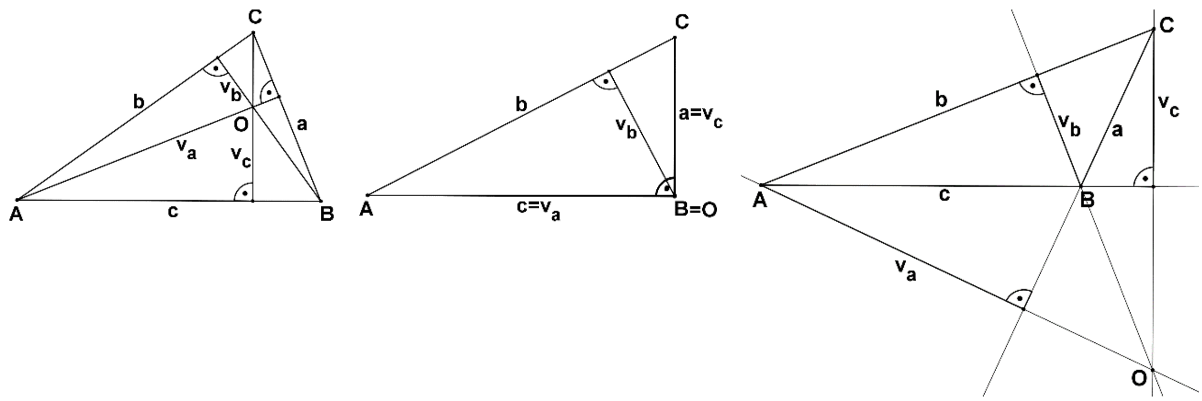
Kolmica zostrojená z vrcholu trojuholníka na priamku, na ktorej leží protiľahlá strana trojuholníka, sa nazýva *výška trojuholníka*. Priesečník výšok *O* sa nazýva ortocentrum. Výšky trojuholníka ABC na obr. 7 sú úsečky AA_1, BB_1, CC_1.



Obr. 7 Výšky trojuholníka

Výšky trojuholníka a ortocentrum v rôznych typoch trojuholníka

Ostrouhlý trojuholník Pravouhlý trojuholník Tupouhlý trojuholník

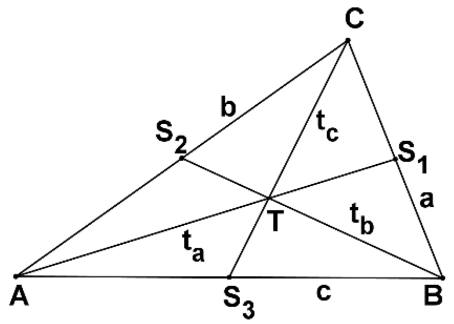


Obr. 8 Výšky a ortocentrum trojuholníka

Ťažnice trojuholníka

Ťažnice každého trojuholníka sa pretínajú práve v jednom bode, ktorý nazývame ťažisko, ozn. T (pozri Obr. 9).

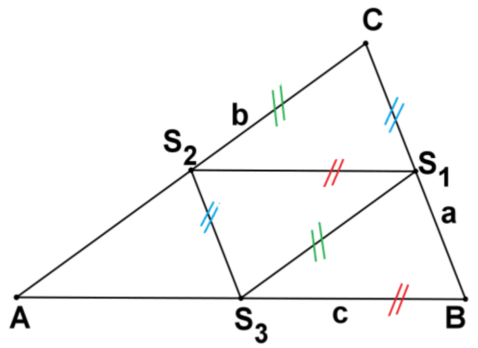
V trojuholníku ABC sú body S_1, S_2, S_3 postupne stredmi strán a, b, c.
Úsečky $AS_1 = t_a$, $BS_2 = t_b$, $CS_3 = t_c$ sú *ťažnice trojuholníka* ABC. Priesečník ťažníc T sa nazýva ťažisko a platí: $|AT|:|S_1T| = |BT|:|S_2T| = |CT|:|S_3T| = 2:1$.



Obr. 9 Ťažnice trojuholníka

Stredné priečky trojuholníka (pozri Obr. 10)

V trojuholníku ABC sú body S_1, S_2, S_3 postupne stredmi strán a, b, c.
Úsečky S_1S_2, S_2S_3, S_1S_3 sú stredné priečky trojuholníka ABC. Platí: $S_1S_2 \parallel AB$ a $|S_1S_2| = \frac{1}{2}|AB|$, $S_2S_3 \parallel BC$ a $|S_2S_3| = \frac{1}{2}|BC|$, $S_1S_3 \parallel AC$ a $|S_1S_3| = \frac{1}{2}|AC|$.

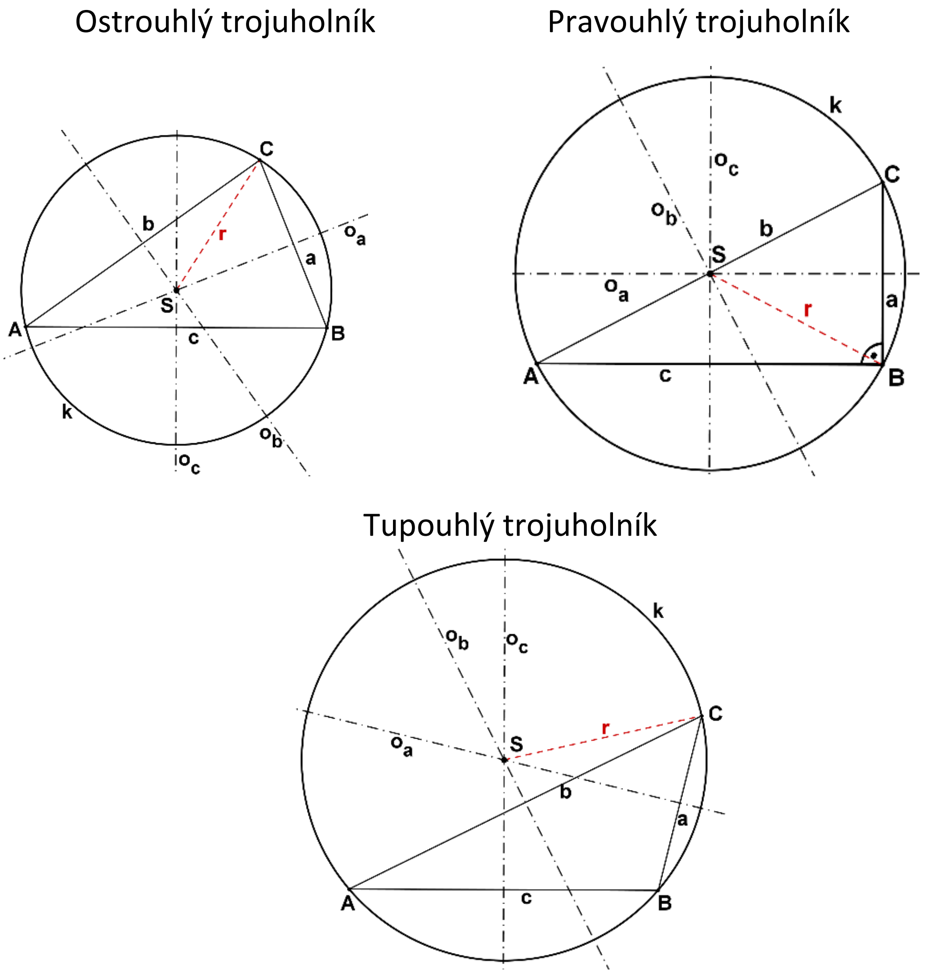


Obr. 10 Stredné priečky trojuholníka

Kružnica opísaná a vpísaná trojuholníku (pozri Obr. 11, Obr. 12)

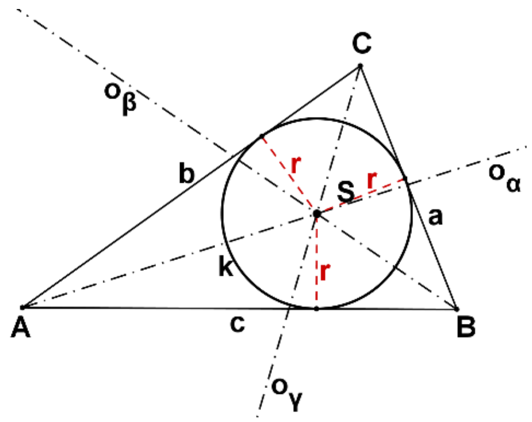
Osi strán každého trojuholníka sa pretínajú práve v jednom bode S. Tento bod S je stredom opísanej kružnice trojuholníka $k(S, r)$, polomer $r = |SA| = |SB| = |SC|$.

Na obr. 10 je kružnica opísaná danému trojuholníku pre rôzne typy trojuholníkov.



Obr. 11 Opísaná kružnica trojuholníku

Osi vnútorných uhlov každého trojuholníka sa pretínajú práve v jednom bode S (Obr. 12). Tento bod S je stredom vpísanej kružnice $k(S, r)$ do trojuholníka (stred S vpísanej kružnice je vnútorným bodom trojuholníka).



Obr. 12 Vpísaná kružnica trojuholníku

Zhodnosť trojuholníkov

Dva trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú zhodné, ak $A'B' \cong AB, B'C' \cong BC, A'C' \cong AC$, čiže $|A'B'| = |AB|, |B'C'| = |BC|, |A'C'| = |AC|$ a zároveň $\alpha' = \alpha, \beta' = \beta, \gamma' = \gamma$. Zápis: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

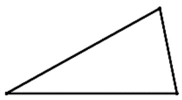
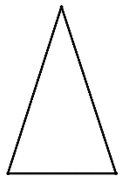
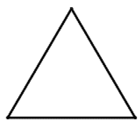
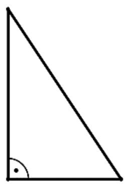
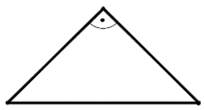
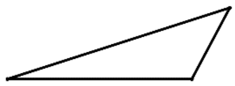
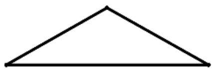
Vety o zhodnosti trojuholníkov

Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú:

- vo všetkých troch stranách (veta *sss*),
- v dvoch stranách a v uhle nimi určenom (veta *sus*),
- v dvoch stranách a uhle ležiacom oproti dlhšej z nich (veta *Ssu*),
- v jednej strane a dvoch uhloch k nej priľahlých (veta *usu*).

Typy trojuholníkov (pozri Tabuľku 1.)

Tabuľka 1 Delenie trojuholníkov podľa dĺžok strán a veľkosti vnútorných uhlov

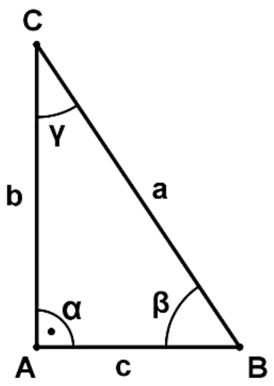
Podľa veľkosti vnútorných uhlov		Podľa dĺžok strán		
		rôznostranný	rovnoramenný	rovnostranný
	ostrouhlý			
	pravouhlý			
	tupouhlý			

Obvod a obsah trojuholníka

Obvod trojuholníka počítame podľa vzorca: $o = a + b + c$.
Na výpočet obsahu trojuholníka používame vzorce:

$S = \frac{a \cdot v_a}{2}, S = \frac{b \cdot v_b}{2}, S = \frac{c \cdot v_c}{2}$, kde v_a, v_b, v_c sú dĺžky výšok na príslušné strany.

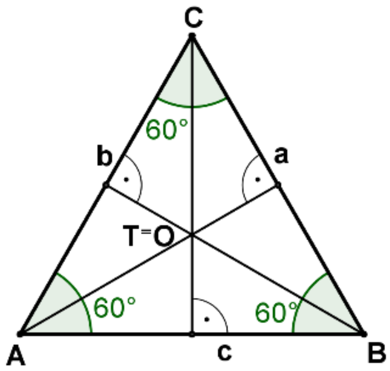
Pravouhlý trojuholník (Obr. 13)



Obr. 13 Pravouhlý trojuholník

a ... prepona (najdlhšia strana; ležiaca oproti pravému uhlu)
b, c ... odvesny
$c = v_b, b = v_c,$ ortocentrum leží vo vrchole pravého uhla
stred opísanej kružnice leží v strede prepony
obsah $S = \frac{b \cdot c}{2}$, kde *b*, *c* sú dĺžky odvesien

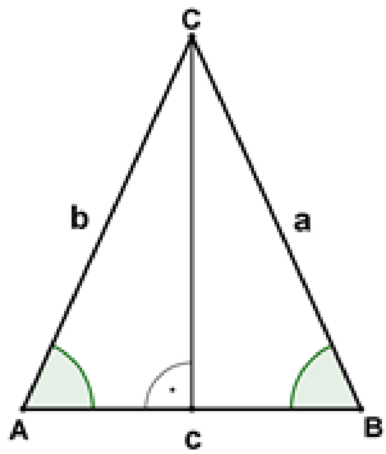
Rovnostranný trojuholník (Obr. 14)



Obr. 14 Rovnostranný trojuholník

$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = 60°$
a = *b* = *c*
$v_a = v_b = v_c = t_a = t_b = t_c$
T = *O* ... bod *T* je ťažisko, bod *O je* ortocentrum
stred opísanej a vpísanej kružnice leží v jednom bode

Rovnoramenný trojuholník (Obr. 15)



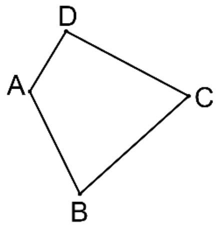
Obr. 15 Rovnoramenný trojuholník

a, b ... ramená (strany rovnakej dĺžky)
c ... základňa
$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA|$ ... uhly pri základni majú rovnakú veľkosť (sú zhodné)
výška na základňu je osou súmernosti rovnoramenného trojuholníka

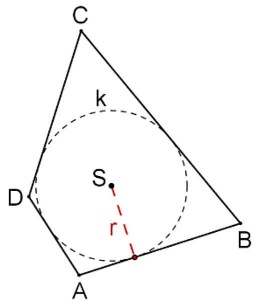
__Konvexné štvoruholníky__

Podľa vzájomnej polohy strán konvexné štvoruholníky rozdeľujeme na :

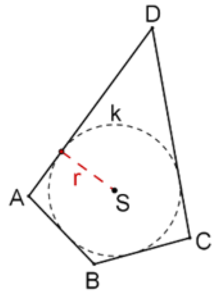
a) ***Rôznobežníky*** - každé dve protiľahlé strany sú navzájom rôznobežné (Obr. 16 až Obr. 19).



Obr. 16 Všeobecný štvoruholník

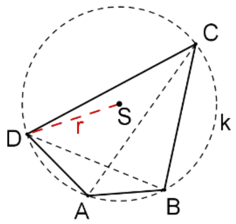


Obr. 17 Dotyčnicový štvoruholník



Obr. 18 Deltoid

Deltoid (Obr. 18) je osovo súmerný dotyčnicový štvoruholník (jeho osou súmernosti je priamka $\overleftrightarrow{BD}$). Uhlopriečky sú navzájom kolmé a rozpoľujú sa.

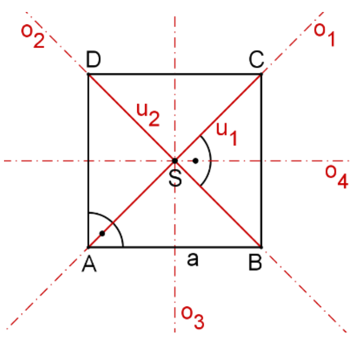


Obr. 19 Tetivový štvoruholník

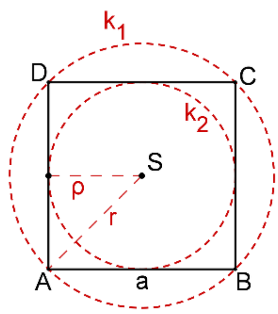
V tetivovom štvoruholníku platí:
Obvod: $o = a + b + c + d$
Obsah: $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$,
kde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$
a, b, c, d ... dĺžky strán

b) ***Rovnobežníky*** - každé dve protiľahlé strany sú navzájom rovnobežné (Obr. 20 až Obr. 29). Úsečky (aj ich dĺžky), ktorých krajnými bodmi sú stredy protiľahlých strán, sa nazývajú *stredné priečky* rovnobežníka. Vzdialenosti protiľahlých strán sa nazývajú výšky rovnobežníka. Do skupiny rovnobežníkov patrí štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, kosodĺžnik.

➢ ***Štvorec***



Obr. 20 Osi súmernosti a uhlopriečky štvorca



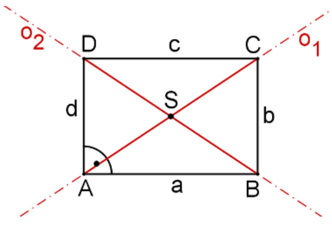
Obr. 21 Kružnica opísaná a vpísaná štvorcu

Vlastnosti:

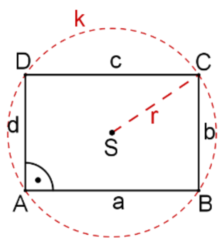
- každé dve protiľahlé strany sú rovnobežné,
- susedné strany sú na seba kolmé,
- všetky strany sú zhodné,
- uhlopriečky sú zhodné ($|AC| = |BD|$), navzájom sa rozpoľujú ($|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$) a sú na seba kolmé ($AC \perp BD$),
- každá uhlopriečka delí štvorec na dva zhodné pravouhlé rovnoramenné trojuholníky,
- priesečník uhlopriečok S je stredom kružnice opísanej $k_1(S; r)$ a kružnice vpísanej $k_2(S; \rho)$ tomuto štvorcu,
- je stredovo a osovo súmerný (stred súmernosti je priesečník uhlopriečok S, osi súmernosti sú štyri – na obrázku o_1, o_2, o_3, o_4).

Obvod:	$o = 4a,$	a ... strana štvorca
Obsah:	$S = a^2,$	a ... strana štvorca
	$S = \frac{1}{2}u^2,$	u ... uhlopriečka štvorca
	$S = 2r^2,$	r ... polomer opísanej kružnice
	$S = 4\rho^2,$	ρ ... polomer vpísanej kružnice
Uhlopriečka štvorca u:	$u = a\sqrt{2},$	a ... strana štvorca

- ***Obdĺžnik***



Obr. 22 Osi súmernosti a uhlopriečky obdĺžnika



Obr. 23 Kružnica opísaná obdĺžniku

Vlastnosti:

- každé dve protiľahlé strany sú rovnobežné,
- susedné strany sú na seba kolmé,
- protiľahlé strany sú zhodné, susedné strany nie sú zhodné,

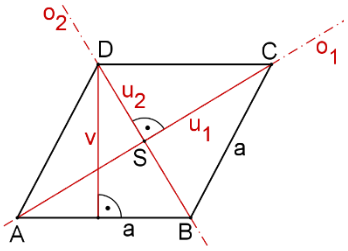
- uhlopriečky sú zhodné ($|AC| = |BD|$), navzájom sa rozpoľujú ($|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$),
- každá uhlopriečka rozdeľuje obdĺžnik na dva zhodné pravouhlé trojuholníky,
- priesečník uhlopriečok S je stredom opísanej kružnice $k(S; r)$,
- je stredovo a osovo súmerný (stred súmernosti je priesečník uhlopriečok S, osi súmernosti sú dve - na obr. 22 osi sú o_1, o_2).

Obvod: $o = 2(a + b)$, a, b ... strany obdĺžnika

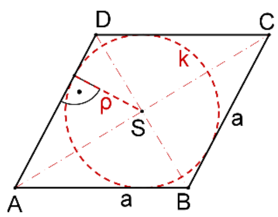
Obsah: $S = a \cdot b$, a, b ... strany obdĺžnika

Uhlopriečka obdĺžnika u: $u = \sqrt{a^2 + b^2}$, a, b ... strany obdĺžnika

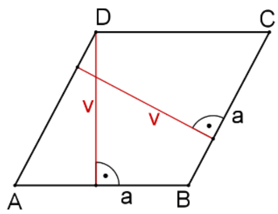
- ***Kosoštvorec***



Obr. 24 Osi súmernosti a uhlopriečky kosoštvorca



Obr. 25 Kružnica vpísaná do kosoštvorca



Obr. 26 Výšky kosoštvorca

Vlastnosti:

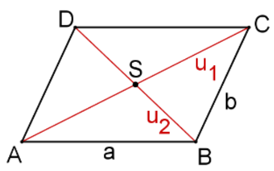
- každé dve protiľahlé strany sú rovnobežné,
- susedné strany nie sú na seba kolmé (dva vnútorné uhly sú ostré a dva tupé, protiľahlé vnútorné uhly sú zhodné, súčet susedných vnútorných uhlov je $180°$),
- susedné strany sú zhodné (všetky strany sú zhodné),
- každé dva protiľahlé uhly sú zhodné,
- uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú ($|AS| = |CS|, |BS| = |DS|$), a sú na seba kolmé ($AC \perp BD$),
- priesečník uhlopriečok S je stredom vpísanej kružnice $k(S; \rho)$,
- je osovo súmerný (osi súmernosti sú dve - na obr. 24 osi sú o_1, o_2).

Obvod: $o = 4a$, a ... strana kosoštvorca

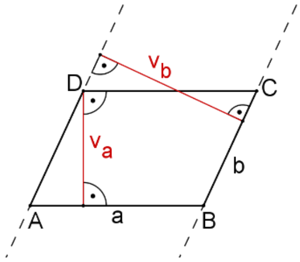
Obsah: $S = a \cdot v$, a ... strana kosoštvorca, *v* ... výška kosoštvorca

$S = \frac{u_1 \cdot u_2}{2}$, u_1, u_2 ... uhlopriečky kosoštvorca

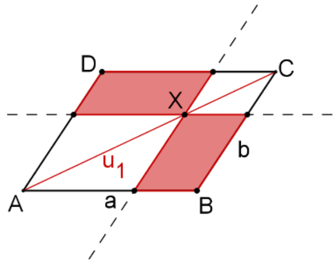
➢ ***Kosodĺžnik***



Obr. 27 Uhlopriečky kosodĺžnika



Obr. 28 Výšky kosodĺžnika



Obr. 29 Porovnanie obsahov vyfarbených kosodĺžnikov

Vlastnosti:

- každé dve protiľahlé strany sú zhodné a rovnobežné (susedné strany nie sú zhodné),
- susedné strany nie sú na seba kolmé (dva vnútorné uhly sú ostré a dva tupé, protiľahlé vnútorné uhly sú zhodné, súčet susedných vnútorných uhlov je $180°$),
- obsahy farebne odlíšených dvoch kosodĺžnikov na obr. 29 sú rovnaké, pričom bod X je ľubovoľným bodom ktorejkoľvek uhlopriečky a priamky prechádzajúce bodom X sú rovnobežné s príslušnými stranami kosodĺžnika.

Obvod: $o = 2(a + b)$, a, b ... strany kosodĺžnika

Obsah: $S = a \cdot v_a$, a, b .. strany kosodĺžnika, v_a .. výška na stranu a,

$S = b \cdot v_b$, v_b ... výška na stranu b

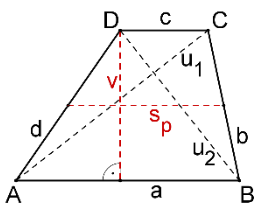
c) ***Lichobežníky*** - dve protiľahlé strany sú navzájom rovnobežné a zvyšné dve strany sú rôznobežné.

➢ *všeobecný* lichobežník (Obr. 30)

strany a, c sú základne a platí: $a \parallel c$

strany b, d sú ramená a platí:

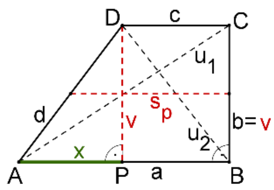
$b \nparallel d \wedge b \neq d \wedge$ strany b, d nie sú kolmé na a



Obr. 30 Všeobecný lichobežník

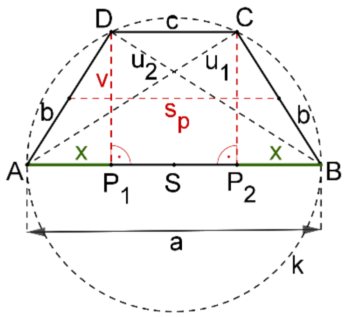
- *pravouhlý* lichobežník (Obr. 31)

(jedno rameno je kolmé na základne)



Obr. 31 Pravouhlý lichobežník

- *rovnoramenný* lichobežník (ramená sú zhodné) (Obr. 32)



Obr. 32 Rovnoramenný lichobežník

Vlastnosti:

- práve jedna dvojica protiľahlých strán je rovnobežná, tieto strany sa nazývajú základne, zvyšné dve strany sú ramená lichobežníka (sú rôznobežné),
- rovnoramenný lichobežník (je to tetivový štvoruholník) má uhly priľahlé k tej istej základni zhodné (platí pre obidve základne), je súmerný podľa osi, ktorá prechádza stredmi základní a možno mu opísať kružnicu,
- úsečku, ktorej krajnými bodmi sú stredy ramien, nazývame strednou priečkou lichobežníka (na obr. 30 až 32 je označená s_p; stredná priečka je rovnobežná so základňami).

Obvod:	$o = a + b + c + d,$	a, b, c, d ... strany lichobežníka
Obsah:	$S = \frac{(a+c)\cdot v}{2},$	a, c ... základne lichobežníka
		v ... výška lichobežníka
Stredná priečka s_p:	$s_p = \frac{a+c}{2},$	a, c ... základne lichobežníka
Pravouhlý lichobežník:	$x = \lvert AP\rvert = a - c$	
Rovnoramenný lichobežník:	$x = \lvert AP_1\rvert = \lvert P_2B\rvert = \dfrac{a-c}{2}$	

Pravidelné n–uholníky

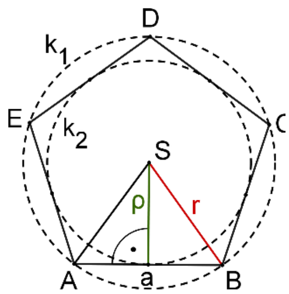
Pravidelným n-uholníkom ($n \geq 3$) nazývame n-uholník, ktorého všetky strany sú zhodné a všetky vnútorné uhly sú zhodné. Pravidelný trojuholník sa nazýva rovnostranný trojuholník, pravidelný štvoruholník je štvorec, ďalšími pravidelnými n-uholníkmi sú pravidelný päťuholník, pravidelný šesťuholník, atď.

Uvedieme ďalej niektoré vlastnosti pravidelného n-uholníka s dĺžkou strany a:

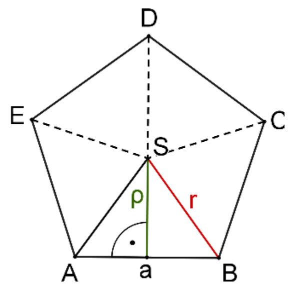
- všetkým pravidelným n-uholníkom možno opísať a vpísať kružnicu,
- veľkosť vnútorného uhla α pravidelného n-uholníka je $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$,
- polomer r opísanej kružnice je $r = \frac{a}{2\cdot sin\frac{180°}{n}}$,
- polomer ρ vpísanej kružnice je $\rho = \frac{a}{2\cdot tg\frac{180°}{n}}$,
- obvod $o = n \cdot a$,
- obsah $S = \frac{n\cdot a^2}{4\cdot tg\frac{180°}{n}}$.

Rovnostrannému trojuholníku a štvorcu sme sa venovali v predchádzajúcom texte, ďalej sa budeme venovať vybraným pravidelným n-uholníkom.

Pravidelný päťuholník *(Obr. 33 až 35)*



Obr. 33 Pravidelný päťuholník



Obr. 34 Rozdelenie pravidelného päťuholníka na zhodné trojuholníky

Možno ho rozdeliť na päť zhodných rovnoramenných trojuholníkov s hlavným vrcholom S t. j. stredom opísanej, resp. vpísanej kružnice.

$|\sphericalangle ASB| = 360°: 5 = 72°$

Postup konštrukcie:

1.) $k;\, k(S; r)$

2.) $XY;\, X \in k \wedge Y \in k \wedge S \in XY$

3.) $SA;\, SA \perp XY \wedge A \in k$

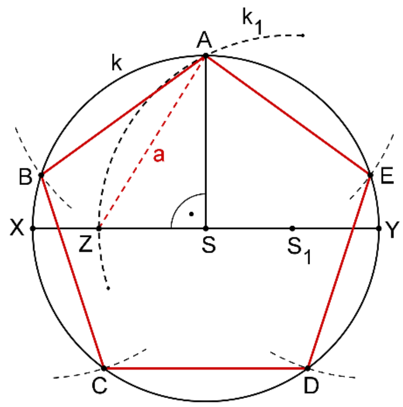
4.) $S_1;\, S_1 \in SY \wedge |SS_1| = |S_1Y|$

5.) $k_1;\, k_1(S_1; r_1 = |S_1A|)$

6.) $Z;\, k_1 \cap XS = \{Z\}$

7.) $A, B, C, D, E;\; \{A, B, C, D, E\} \in k \wedge$
$\wedge |AZ| = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA|$

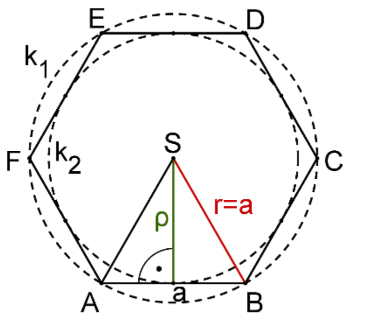
8.) *pravidelný päťuholník ABCDE*



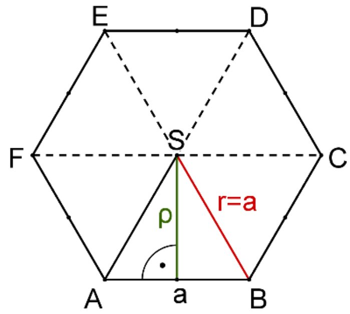
Obr. 35 Konštrukcia pravidelného päťuholníka

Pravidelný šesťuholník

(Obr. 36 až 38)



Obr. 36 Pravidelný šesťuholník



Obr. 37 Rozdelenie pravidelného šesťuholníka na zhodné trojuholníky

Možno ho rozdeliť na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov so spoločným vrcholom S, t. j. stredom opísanej, resp. vpísanej kružnice.

$|\sphericalangle ASB| = 360°: 6 = 60°$

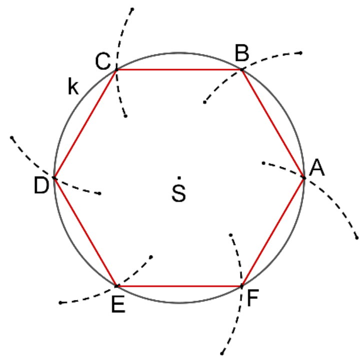
Postup konštrukcie:

1.) $k;\, k(S; r)$

2.) $A;\, A \in k$

3.) $B, C, D, E, F;\; \{B, C, D, E, F\} \in k \wedge$
$\wedge |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA|$

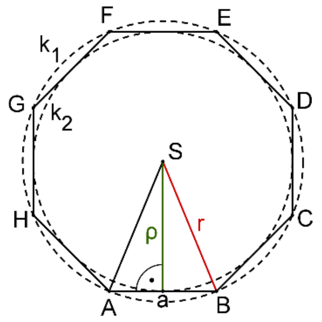
4.) *pravidelný šesťuholník ABCDEF*



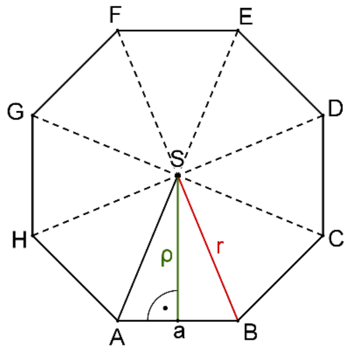
Obr. 38 Konštrukcia pravidelného šesťuholníka

Pravidelný osemuholník

(Obr. 39 až 41)



Obr. 39 Pravidelný osemuholník



Obr.40 Rozdelenie pravidelného osemuholníka na zhodné trojuholníky

Možno ho rozdeliť na osem zhodných rovnoramenných trojuholníkov s hlavným vrcholom S, t. j. stredom opísanej, resp. vpísanej kružnice.

$|\sphericalangle ASB| = 360°: 8 = 45°$

Postup konštrukcie:

1.) $k; k(S; r)$

2.) $AE; A \in k \wedge E \in k \wedge S \in AE$

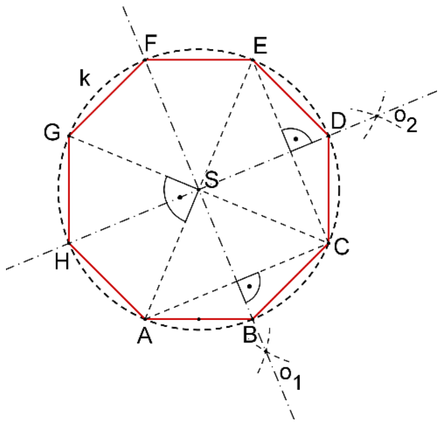
3.) $CG; CG \perp AE \wedge S \in CG$

4.) $o_1, o_2; o_1, o_2 \ldots osi\ AC, CE$

5.) $B, F; o_1 \cap k = \{B, F\}$

6.) $H, D; o_2 \cap k = \{H, D\}$

7.) *pravidelný osemuholník ABCDEFGH*

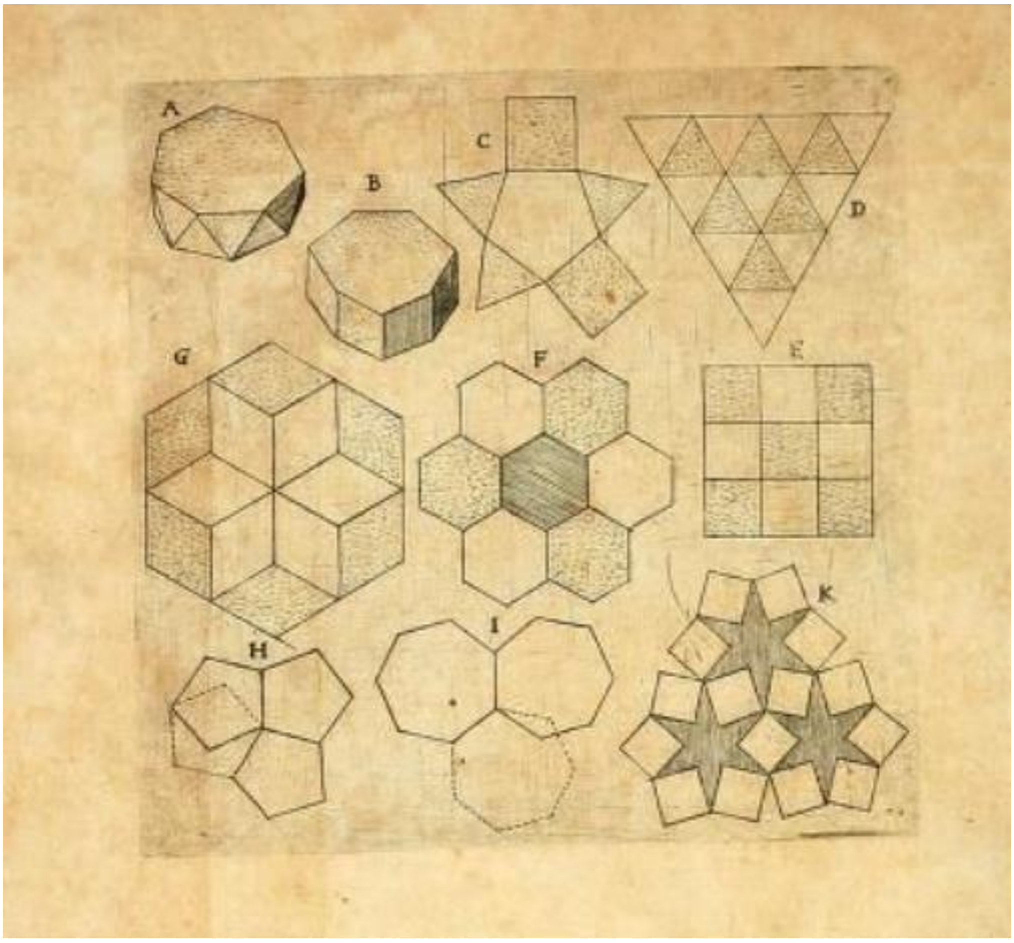


Obr. 41 Konštrukcia pravidelného osemuholníka

2 Pokrývanie roviny

Pokrývaním roviny alebo teseláciou rozumieme vypĺňanie roviny útvarmi bez medzier a prekrytia (teseláciu nazývame tiež mozaika alebo parketovanie). Mnoho teselácií môžeme pozorovať v živej i neživej prírode (napr. na koži žirafy, pancieri korytnačky a pod.), ktoré síce nie sú dokonalé, medzi útvarmi sa vždy vyskytujú medzery, ale teselácia je vhodným modelom pre mnoho javov. Poznáme rovinnú i priestorovú teseláciu, priestorovej teselácii sa však v našej publikácii nebudeme venovať.

Mnoho zaujímavých teselácií nachádzame aj v dielach človeka, napr. vo výzdobe interiérov ľudských obydlí, verejných budov a modlitební (kostolov, synagóg, mešít). Pozorovať ich možno na výzdobe stien, stropov i podláh rôznych stavieb, ako i dláždeniach chodníkov či námestí. Teselácie môžu byť tvorené farebne i tvarovo rovnakými i rôznymi útvarmi. Za prvú úspešnú matematickú štúdiu o teseláciách je považovaný spis Johanna Keplera *Harmonices Mundi* (1619), v ktorom sa venoval okrem iného geometrickým vlastnostiam teselácií tvorených pravidelnými mnohouholníkmi (Csachová a kol., 2012).



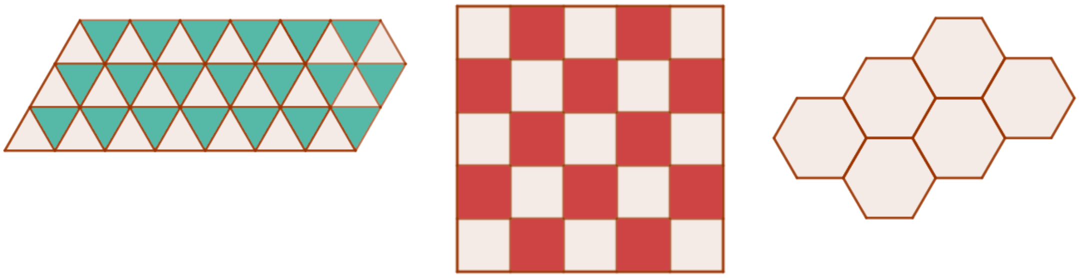
Obr. 42 Keplerove teselácie z Harmonices Mundi, 1619 (Zdroj: Csachová a kol., 2012)

Rovinu možno pokrývať (podľa informácií na stránke, ktoré spracovala Králová, M., https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/matematika/geometrie/teselace):

a) iba jedným druhom pravidelných n-uholníkov, pričom použitie rovnostranných trojuholníkov, štvorcov a pravidelných šesťuholníkov je pomerne jednoduché. Veľkosť vnútorného uhla pravidelných n-uholníkov je $\frac{(n-2).180°}{n}$ a aby bola rovina pokrytá musí platiť, že podiel uvedený nižšie je prirodzené číslo.

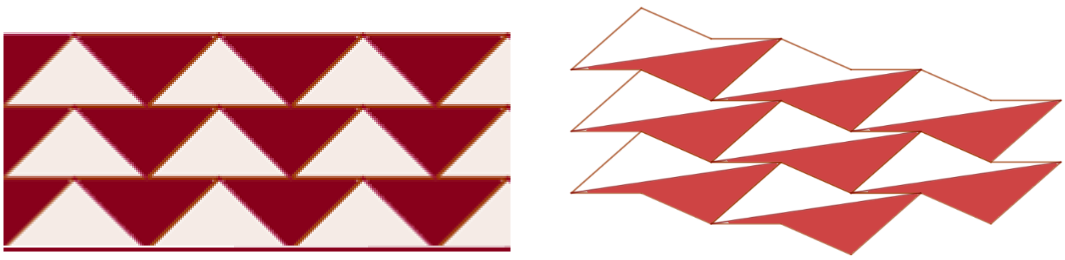
$$360°:\frac{(n-2).180°}{n} = \frac{360°.n}{(n-2).180°} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Ak dosadíme hodnoty $n = 3, n = 4\ a\ n = 6$, tak to platí.



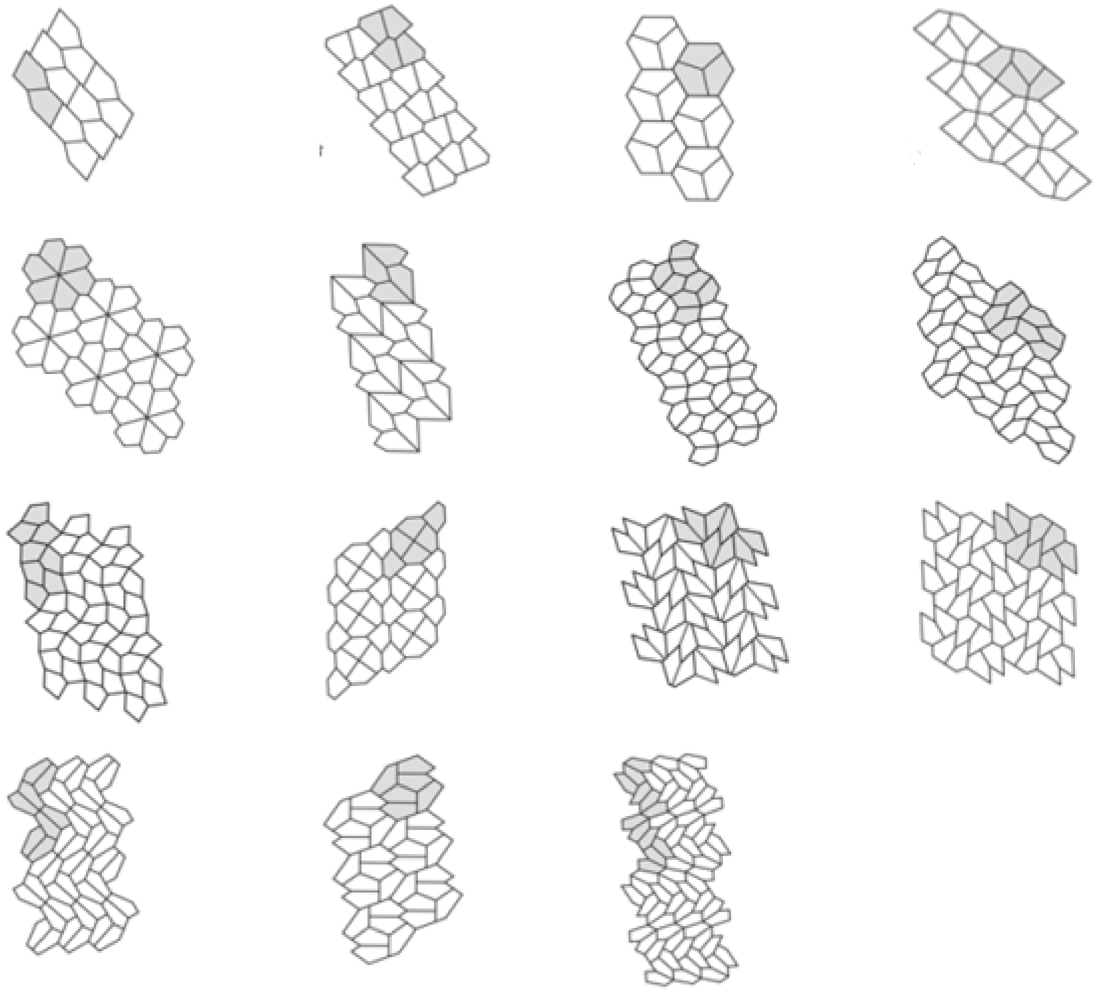
Obr. 43 Pokrytie roviny rovnostrannými trojuholníkmi, štvorcami a pravidelnými šesťuholníkmi – jedným typom

b) iba jedným druhom nepravidelných n-uholníkov; môžeme požiť ľubovoľný trojuholník a štvoruholník (aj nekonvexný), niektoré konvexné päťuholníky a šesťuholníky. Rovinu nemožno pokryť n-uholníkmi, ak $n \geq 7$. Doposiaľ bolo celkom určené, že existuje 15 typov päťuholníkov a 3 typy šesťuholníkov, ktorými možno pokryť rovinu (pojem typ označuje taký päťuholník a šesťuholník, ktorý vyhovuje podmienkam pre dĺžku strán a veľkosť vnútorných uhlov).



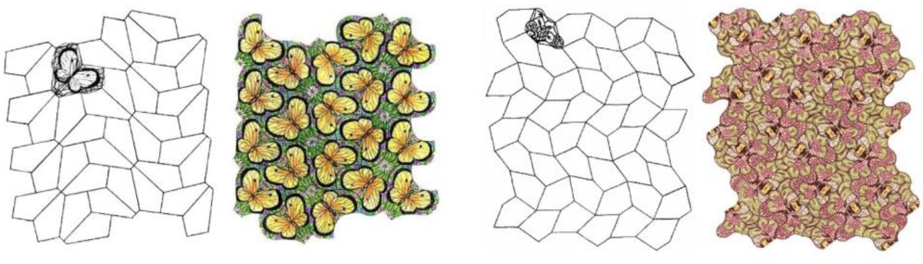
Obr. 44 Pokrytie roviny rovnoramennými trojuholníkmi a nekonvexnými štvoruholníkmi – jedným typom

Na obr. 45 a obr. 46 uvádzame teselácie tvorené konvexnými päťuholníkmi. Uvádzame v súčasnosti známych pätnásť konvexných päťuholníkov, ktorými možno (jedným typom) pokryť rovinu, pätnásty bol objavený v roku 2015 (https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_tiling).



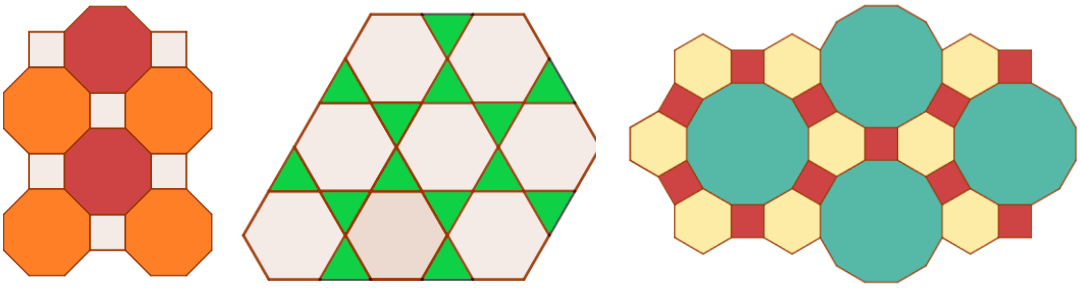
Obr. 45 Pokrytie roviny jedným typom konvexných päťuholníkov
(Zdroj: Sugimoto, T., Araki, Y., 2017)

Štyri typy z týchto päťuholníkov objavila Marjorie Rice, rodáčka z Floridy, ktorá neskôr žila vo Washingtone, D.C. a napokon v San Diegu. Jej práca je zaujímavá hlavne preto, že nemala formálne matematické vzdelanie, napriek tomu detailne popísala ich konštrukciu a postup pokreslenia prírodnými motívmi. Podlaha vo vstupnej hale Americkej matematickej asociácie vo Washingtone je pokrytá jednou z jej päťuholníkových teselácií.
(https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711/)



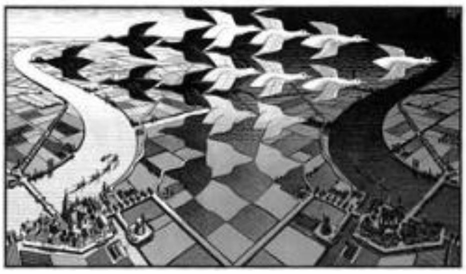
Obr. 46 Päťuholníkové teselácie podľa Marjorie Riceovej (Zdroj: https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711/)

c) dvomi alebo viacerými druhmi pravidelných mnohouholníkov; ak chceme vyplniť rovinu tak, že sa v každom bode nachádzajú vrcholy troch pravidelných n-uholníkov, tak súčet vnútorných uhlov daných mnohouholníkov s vrcholmi v tomto bode je 360°.



Obr. 47 Teselácie tvorené dvomi alebo tromi pravidelnými n-uholníkmi

d) existujú aj ďalšie druhy rovinných teselácií, ktorým sa však vzhľadom na zameranie publikácie nebudeme venovať (napr. neperiodické, aperiodické, Escherove teselácie, Voronoiove teselácie, Penroseove teselácie).



Obr. 48 Deň a noc, Escher, M.C.
(Zdroj: https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Day_and_Night)

Obr. 48 Plazy, Escher, M.C.
(Zdroj: https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Reptiles)

2.1 Použitie stavebnice Polydron vo vyučovaní témy „Pokrývanie roviny“

V pokrývaní roviny je vhodné použitie stavebnice Polydron, ktorou disponuje veľké množstvo základných i stredných škôl. Z predchádzajúcich tvrdení vyplýva, že len z troch zhodných pravidelných mnohouholníkov je možné vytvoriť mozaiku tak, aby sa žiadne dva z nich neprekrývali a nevznikli medzi nimi medzery. Tými mnohouholníkmi sú rovnostranný trojuholník, štvorec a pravidelný šesťuholník. Ak zostaneme pri týchto troch geometrických útvaroch, môžeme hľadať, aké vzory sa z nich dajú utvoriť, ak sa v mozaike môžu vyskytovať súčasne.

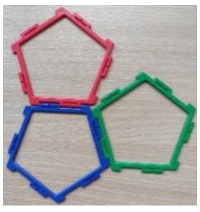
Označme si počet rovnostranných trojuholníkov premennou x, počet štvorcov premennou y a počet pravidelných šesťuholníkov premennou z a platí, že vnútorné uhly týchto mnohouholníkov majú veľkosť $60°, 90°$ a $120°$. Okolo jedného vrcholu musí byť ich súčet $360°$, teda platí nasledujúca rovnica: $60x + 90y + 120z = 360$. Keďže x, y, z sú celé kladné čísla, všetky riešenia rovnice sú v tabuľke 2:

Tabuľka 2 Všetky riešenia rovnice $60x + 90y + 120z = 360, \; x, y, z \in Z^+$

	x	**y**	**z**
1.	6	0	0
2.	0	4	0
3.	0	0	3
4.	2	0	2
5.	4	0	1
6.	3	2	0
7.	1	2	1

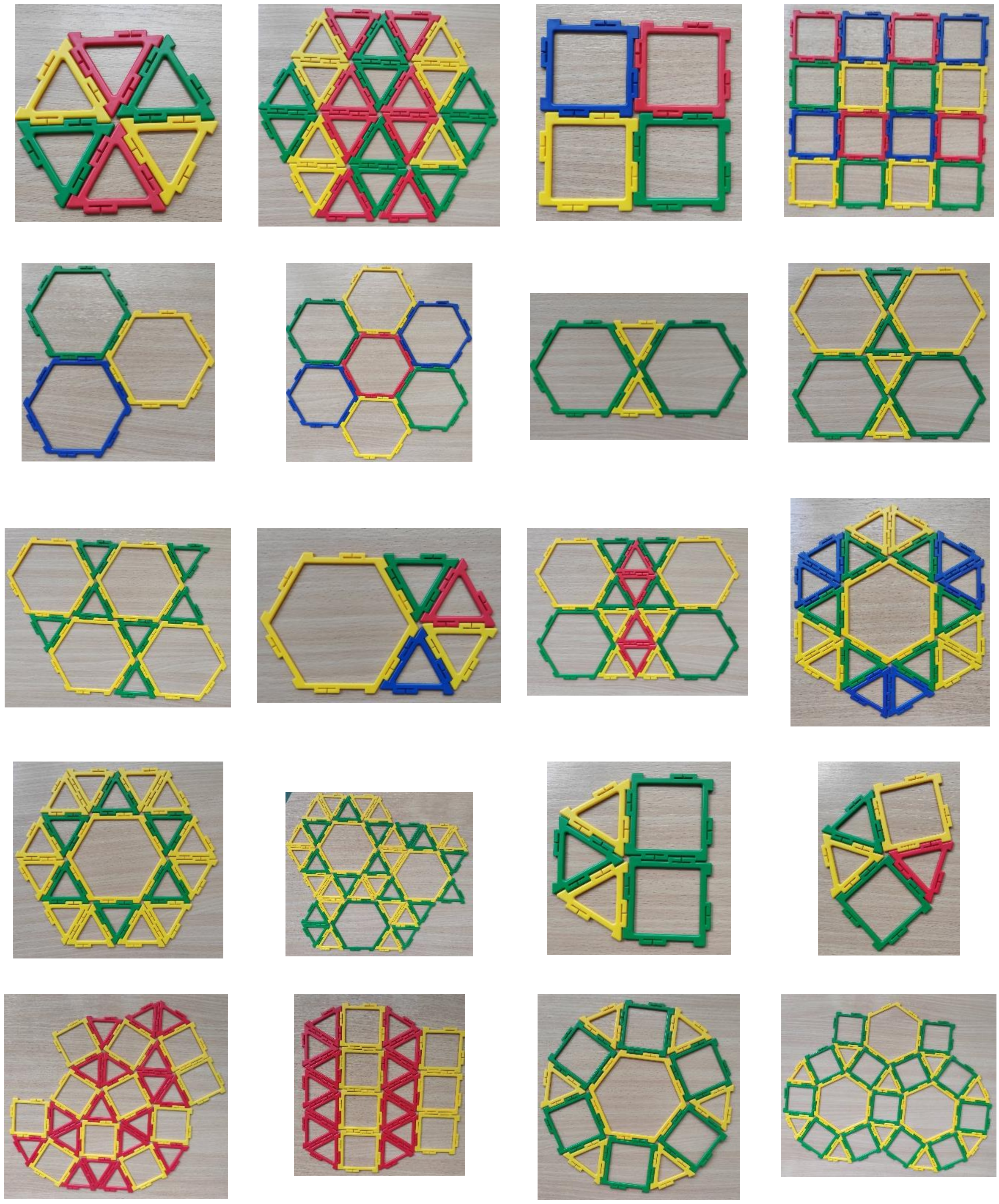
Riadok 5 znamená, že zostrojíme pravidelnú mozaiku, čiže rovinu okolo každého bodu vyplníme štyrmi rovnostrannými trojuholníkmi a jedným pravidelným šesťuholníkom.

S použitím stavebnice Polydron si žiaci vlastnou skúsenosťou môžu overiť, ktorými pravidelnými mnohouholníkmi možno pokryť rovinu. Rovnako významné je aj farebné odlíšenie jednotlivých typov mnohouholníkov a estetická stránka vzniknutej mozaiky. Na obr. 49 je ukážka, že pravidelnými päťuholníkmi nie je možné pokryť rovinu.



Obr. 49 Použitie stavebnice Polydron – skladanie pravidelných 5-uholníkov

Na obr. 50 sú ukážky pokrývania roviny jedným, alebo viacerými typmi pravidelných mnohouholníkov s použitím stavebnice Polydron.



Obr. 50 Teselácie tvorené jedným alebo viacerými typmi pravidelných n-uholníkov s použitím stavebnice Polydron

3 Aktivity zamerané na rovinné geometrické útvary a pokrývanie roviny

K uvedenej problematike sme navrhli konkrétny didaktický materiál vo forme aktivít, ktorý je vhodný predovšetkým ako zdroj inšpirácie pre učiteľov v praxi. Učiteľ si ich môže podľa konkrétnych podmienok prispôsobiť a predložené aktivity zaradiť do vyučovacieho procesu na základnej i strednej škole. Keďže sa však v publikácii venujeme aj mnohouholníkom, v kapitole uvádzame aj aktivity vhodné pre predškolské vzdelávanie a vzdelávanie na prvom stupni základnej školy.

3.1 Aktivita: Moje telo vie „kresliť" geometrické tvary

Vek: predškolský vek

Vzdelávacie ciele: Dieťa rozlíši geometrické útvary (trojuholník, štvorec a obdĺžnik), vie ich pomenovať a popísať niektoré vlastnosti.

Pomôcky: obrázky trojuholníka, štvorca a obdĺžnika (každý inej farby), špagát (alebo iný materiál vhodný na približné odmeranie výšky dieťaťa), nožnice, fotoaparát

Metodický postup:

Na začiatku aktivity rozdelí učiteľ deti do skupín po štyroch. Na tabuli alebo nástenke (príp. na inom viditeľnom mieste) sú umiestnené geometrické útvary: trojuholník, štvorec a obdĺžnik. Dieťa ich tvorí najprv svojimi prstami, môže si pomáhať aj prácou vo dvojici v rámci svojej skupiny. Potom ich začne tvoriť rukami, nohami, či celým telom spolu s deťmi v rámci skupiny. Aktivity môžu deti realizovať v stoji, sede alebo poležiačky (nie je problém, ak budú kľačať alebo budú v drepe). Učiteľ podporuje ich tvorivosť a vynaliezavosť. Deti sa navzájom kontrolujú v rámci skupiny a aj medzi skupinami. Najprv tvoria útvary v ľubovoľnom poradí, neskôr podľa pokynu učiteľa, čím dochádza k spojeniu geometrického útvaru s jeho názvom. Na záver aktivity vytvoria všetky deti spolu na podlahe v triede postupne trojuholník, potom štvorec a napokon obdĺžnik tak, že si ich „predkreslia" pomocou špagáta. Každé dieťa si s pomocou učiteľa najprv odstrihne špagát približne v takej dĺžke, ako je vysoké. Tieto kúsky poukladajú na zem tak, aby vytvorili daný útvar a potom si na svoju časť ľahnú. Učiteľ odfotí výsledok činnosti detí a umiestni ho na nástenku v triede (vhodné je tieto snímky sprístupniť obvyklým spôsobom aj rodičom). Na záver učiteľ pristúpi s deťmi k rovinným útvarom, ktoré majú na nástenke a spoločne si zopakujú názvy geometrických útvarov. Vhodné sú napríklad otázky:

Ktorý útvar je trojuholník? Ako si ho spoznal? Má farba vplyv na to, ako sa daný útvar volá?

Ktorý útvar je štvorec? Podľa čoho si myslíš, že je to štvorec?

Ktorý útvar je obdĺžnik? Čím sa líši od štvorca?

Vyhodnotenie aktivity prenechá učiteľ na deti, odporúčame riadený rozhovor. Deti zhrnú, čo sa v aktivite naučili a vyjadria svoje názory, či sa im aktivita páčila alebo nepáčila.

3.2 Aktivita: Cestujeme na dovolenku

Vek: predškolský vek

Vzdelávacie ciele: Dieťa rozlíši predkladané geometrické útvary (trojuholník, štvorec, obdĺžnik, kruh), vie ich vyhľadať v súbore rovinných útvarov podľa vzoru, vie ich pomenovať a popísať niektoré vlastnosti.

Pomôcky: pracovný list (Príloha 1), lepidlo, farbičky, veľké obrázky (trojuholníka, štvorca, obdĺžnika, kruhu), väčší počet obrázkov rovinných útvarov (trojuholníka, štvorca, obdĺžnika, kruhu) vo veľkosti vhodnej na nalepenie do pracovného listu (vhodné je použiť aj v iných farbách, ako je uvedené v pracovnom liste)

Metodický postup:

Aktivitu začne učiteľ rozhovorom s deťmi o tom, ako trávia dovolenku s rodičmi alebo starými rodičmi, či niekam cestujú, aké dopravné prostriedky pritom využívajú. Deti do rozhovoru podnecuje otázkami, ak je niektoré ticho, otázky položí konkrétnemu dieťaťu. Potom postupne berie do svojich rúk obrázky trojuholníka, štvorca, obdĺžnika, kruhu a pýta sa detí, či vedia tieto útvary pomenovať, podľa čoho sa rozhodli pre daný typ útvaru, prípadne doplní otázky podľa aktuálnej situácie v triede.

V ďalšej časti práce dostanú deti pracovné listy s názvom Cestujeme na dovolenku (Príloha 1) a z kôpky rovinných útvarov vyberajú útvary potrebné na nalepovanie. V tejto časti má význam, aby mali deti iba časť útvarov v rovnakej farbe, zvyšok si potom musia vyberať podľa tvaru. Po nalepení všetkých útvarov na príslušné miesto dokreslia deti farbičkou do pracovného listu cestu k moru, po ktorej sa pohybujú autá. Ak sú niektoré deti menej zručné v nalepovaní, tak môžu vynechať nalepovanie napr. slnečných lúčov.

Po skončení práce s pracovným listom učiteľ s deťmi zopakuje, či si pamätajú, aké geometrické útvary nalepovali. Berie do rúk vypracované pracovné listy jednotlivcov a konkrétne dieťa (autor) ukazuje a pomenováva jednotlivé útvary tak, aby jeho prácu videli všetky deti v triede. Učiteľ môže klásť aj otázky týkajúce sa veľkosti alebo farby vybraných geometrických útvarov.

Prostredníctvom riadeného rozhovoru prebehne na záver vyhodnotenie aktivity, deti prezentujú, čo sa v aktivite naučili a vyjadria svoje názory, či sa im aktivita páčila alebo nepáčila.

3.3 Aktivita: Podlaha do detskej izby

Vek: primárny stupeň ZŠ (ročník podľa náročnosti úloh vybraných z PL)

Vzdelávacie ciele: Žiak rozlíši geometrické tvary, vie ich vyhľadať v súbore rovinných tvarov podľa vzoru a priradiť k sebe tak, aby tvorili celok bez medzier a prekrytia. Aktivita je aj propedeudikou deliteľnosti.

Pomôcky: pracovný list (Príloha 2), štvorcová sieť (Príloha 3), stavebnica Polydron

Metodický postup:

Aktivitu začne učiteľ riadeným rozhovorom so žiakmi, pýta sa ich, či majú vlastnú izbu, alebo sú v izbe spolu s ďalšími členmi domácnosti. Rozhovor pokračuje tým, že žiaci rozprávajú, či mali možnosť podieľať sa na zariaďovaní a vymaľovaní izby (výber farieb, práca, napr. aj pomoc rodičom, upratovanie), alebo na riešení podlahy. Rozhovor je smerovaný k tomu, že žiaci sa budú hrať na „pokrývačov" podlahy. Žiaci sú rozdelení do štvoríc tak, aby každá štvorica mala jednu stavebnicu Polydron (môžu si utvoriť skupiny sami, alebo ich rozdelí učiteľ). Každý žiak v rámci skupiny si vytvorí svoje vlastné parkety podľa vzoru v pracovnom liste k aktivite 3.3 Podlaha do detskej izby (Príloha 2 a Príloha 3). Jednotlivé úlohy uvedené v pracovnom liste riešia žiaci samostatne, poradiť sa môžu so spolužiakmi v skupine.

Jednotlivé úlohy, ktoré učiteľ zadá žiakom:

1. Zlož z daných parkiet ľubovoľný obrázok.
2. Pomenuj parkety na obrázku.
3. Z daných parkiet pokry podlahu na obrázku, pričom použi ktorékoľvek z ponúknutých parkiet.
4. Pokry podlahu na obrázku jedným druhom parkiet.
5. K dispozícii máš dané parkety. Pokry podlahu tromi parketami.
6. Pokry podlahu čo najmenším počtom parkiet.
7. Riešenia svojich úloh zakresli do pripravenej štvorcovej siete, jednotlivé parkety vyfarbi odpovedajúcou farbou.

Na záver si žiaci v skupine porovnajú vlastné riešenia a diskutujú o nich. Učiteľ prichádza k jednotlivým skupinám, konzultuje so žiakmi správnosť riešení, ale hlavne to, či majú všetky riešenia jednotlivých úloh. Napokon sprístupní žiakom všetky správne riešenia (napr. premietne, má vopred vytlačené pre každú skupinu).

Vyhodnotenie aktivity je formatívne, jeden žiak za každú skupinu zhodnotí nielen správnosť výsledkov členov skupiny, ale aj atmosféru v triede a to, či to bola zaujímavá činnosť. Učiteľ podľa potreby iba usmerňuje priebeh hodnotenia vlastnej činnosti žiakov.

3.4 Aktivita: Pokrytie roviny pravidelnými mnohouholníkmi (mozaika)

Vek: SŠ - 1. ročník (ročník podľa toho, kedy majú žiaci prebrané učivo o pravidelných mnohouholníkoch)

Vzdelávacie ciele: Žiak pozná vlastnosti pravidelných mnohouholníkov, vie ich použiť v riešení praktických úloh. Vie priradiť pravidelné mnohouholníky k sebe tak, aby tvorili celok bez medzier a prekrytia.

Pomôcky: pracovný list (Príloha 4), stavebnica Polydron

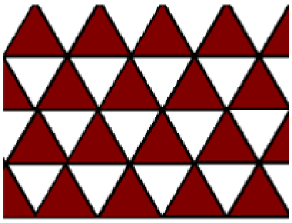
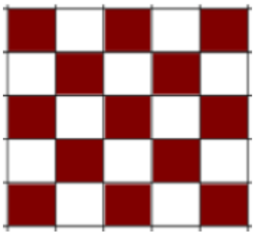
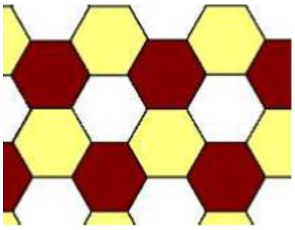
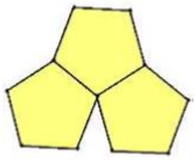
Metodický postup:

Na začiatku aktivity učiteľ oboznámi žiakov so základnými a hlavne zaujímavými informáciami týkajúcimi sa pokrývania roviny (z pohľadu matematiky, histórie, umenia). Učiteľ stručne zopakuje so žiakmi základné vlastnosti pravidelných mnohouholníkov. Žiaci si potom zoberú do štvoríc jednu stavebnicu Polydron a každý žiak dostane aj pracovný list k aktivite 3.4 Pokrytie roviny pravidelnými mnohouholníkmi (mozaika) - Príloha 4. Žiaci pracujú samostatne, môžu sa poradiť v rámci štvorice, ktorá pracuje s jednou stavebnicou. Učiteľ podľa potreby iba usmerňuje prácu jednotlivcov.

Žiaci riešia úlohu:

Aké pravidelné mnohouholníky môžeme použiť na vyplnenie (pokrytie) roviny? Prečo?

Samostatne s využitím poznatkov o vnútorných uhloch pravidelných mnohouholníkov alebo metódou pokus - omyl by mali žiaci zistiť, že použiť môžu len rovnostranné trojuholníky, štvorce a pravidelné šesťuholníky. Svoje tvrdenia odôvodnia tým, že súčet veľkostí vnútorných uhlov mnohouholníkov pri každom spoločnom vrchole pravidelného mnohouholníka musí byť 360°, preto pravidelným päťuholníkom nie je možné vyplniť rovinu. Zistenia a náčrty žiakov by mali byť napríklad také, ako uvádzame na nasledujúcom obrázku.

Aktivitu vyhodnotí učiteľ formatívne, pričom vyzdvihne prácu jednotlivcov, ktorých výsledky boli najlepšie. Vyjadrí sa aj k pracovnej atmosfére v triede.

Záver

Rozvoj geometrickej predstavivosti je jedným z významných cieľov matematického vzdelávania. V matematickom vzdelávaní ho možno dosahovať viacerými cestami, či už je to prostredníctvom vhodne zvolených matematických úloh, riešením problémov s matematickým kontextom z reálneho života, ako aj realizáciou matematických aktivít a didaktických hier.

V predloženej publikácii sme teoreticky spracovali učivo o mnohouholníkoch, ktoré sú ako rovinné geometrické útvary významné v pokrývaní roviny, teseláciách. Prehľad zaradenia učiva o jednotlivých mnohouholníkoch do ročníkov podľa štátneho vzdelávacieho programu môže pomôcť učiteľom v praxi lepšie sa zorientovať v učive, ktoré žiak ovláda v danom ročníku, pri tvorbe vlastných učebných materiálov.

Vypĺňanie roviny útvarmi bez medzier a prekrytia, teselácie, približujeme v druhej kapitole. Zaujímavé sú z hľadiska ich uplatnenia vo výzdobe interiérov ľudských obydlí, verejných budov a modlitební, vo výzdobe stien, stropov i podláh rôznych stavieb, ako i v dláždeniach chodníkov či námestí. Teselácie sú esteticky zaujímavé aj preto, že sú veľmi rôznorodé z hľadiska farieb i použitých tvarov.

Spracovaný teoretický základ považujeme za postačujúci pri realizácii aktivít, zameraných na rovinné geometrické útvary a pokrývanie roviny, ktoré uvádzame v poslednej kapitole, zároveň však aj za postačujúci pre tvorbu ďalších aktivít. Rôzne vekové kategórie, pre ktoré sú spracované aktivity odporúčané, nie sú obmedzením v ich použití, ale ponukou k ďalšiemu spracovaniu a prispôsobeniu podľa možností učiteľa.

Našim cieľom bolo predovšetkým spracovať problematiku tak, aby bola zdrojom inšpirácie pre učiteľov v praxi a zároveň pomohla deťom i žiakom prepojiť teoretické poznatky s praxou. Veríme, že sa nám podarilo ponúknuť spracovanú problematiku tak, aby bola postačujúcim základom pri tvorbe vlastných materiálov učiteľov v praxi.

Literatúra

[1] Csachová, L. a kol. (2012). Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná. Praha: Academia. 256 s. ISBN 978-80-200-1575-4.

[2] Páleníková, K., Záhorská, J., Vargová, M. a Rumanová, L. Základy matematiky 2. (2020). 1 vyd. Nitra: UKF, 2020. 276 s. ISBN 978-80-558-1606-7.

[3] Sugimoto, T., Araki, Y. (2017). Convex Pentagon Tilings and Heptiamonds, I. [cit. 2022-01-13]. Dostupné na: https://arxiv.org/pdf/1704.03997.pdf

[4] ŠPÚ. (2016). Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. [cit. 2022-01-13]. Dostupné na: https://www.statpedu.sk/files/articles/nove_dokumenty/statny-vzdelavaci-program/svp_materske_skoly_2016-17780_27322_1-10a0_6jul2016.pdf

[5] ŠPÚ. (2015). Štátny vzdelávací program pre 2. stupeň základnej školy - matematika. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. [cit. 2022-01-13]. Dostupné na: https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf

[6] ŠPÚ. (2015). Štátny vzdelávací program pre 1. stupeň základnej školy - matematika. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. [cit. 2022-01-13]. Dostupné na: https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf

[7] ŠPÚ. (2015). Štátny vzdelávací program pre gymnáziá – matematika. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. [cit. 2022-01-13]. Dostupné na: https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_g_4_5_r.pdf

[8] ŠPÚ. (2016). Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. [cit. 2022-01-14]. Dostupné na: *https://www.statpedu.sk/files/articles/nove_dokumenty/cielove-poziadavky-pre-mat-skusky/matematika.pdf*

[9] ŠPÚ. (2018). Odporúčania k výchovno-vzdelávacej činnosti v nultom ročníku základnej školy. [cit. 2022-01-14]. Dostupné na: https://www.statpedu.sk/files/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/inovovany-svp-1.stupen-zs/nulty-rocnik_odporucania-k-vychovno_vzdelavacej-cinnosti.pdf

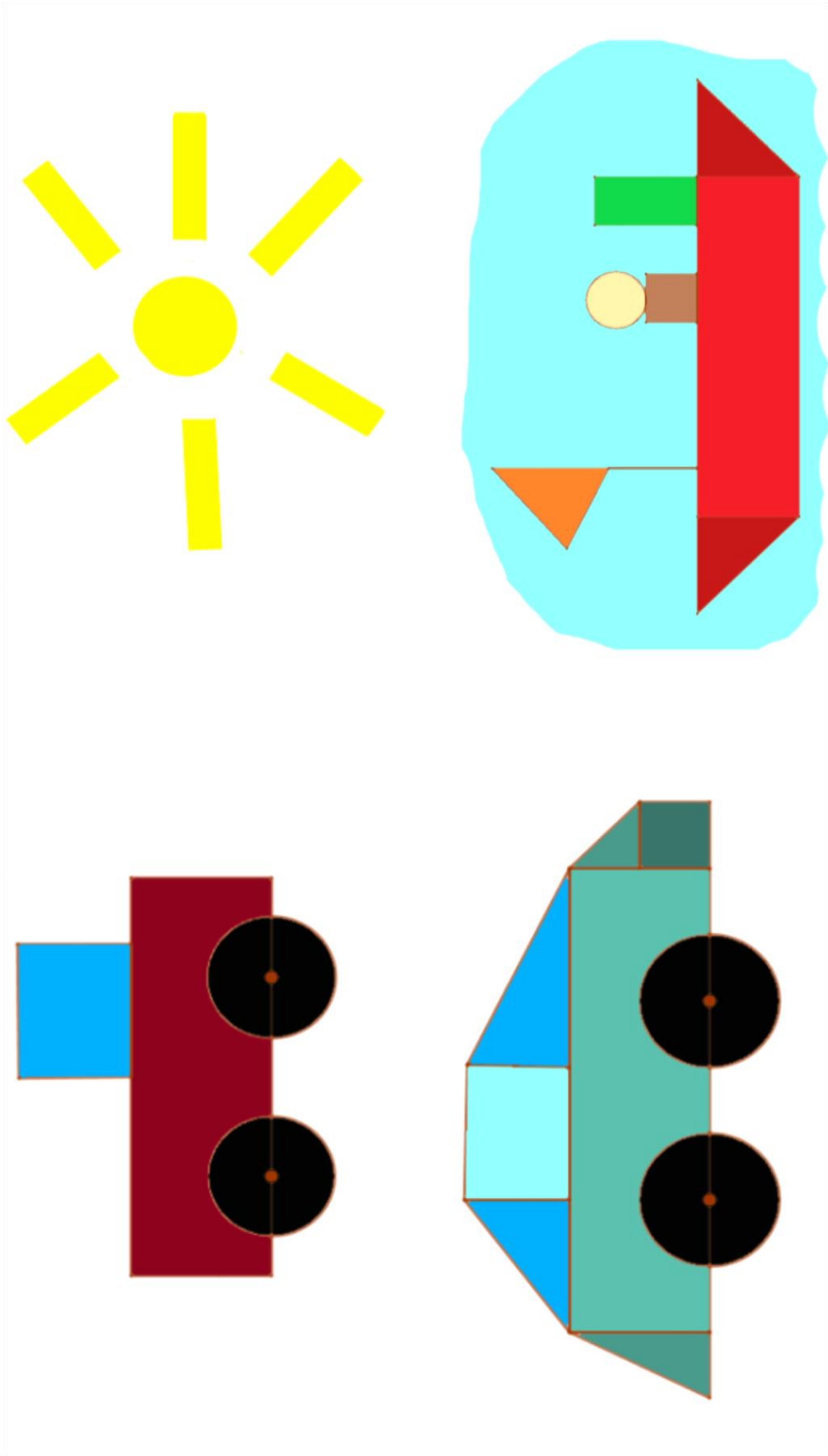
[10] Králová, M. Teselace. [cit. 2022-01-14]. Dostupné na: https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/matematika/geometrie/teselace

[11] Escherovské teselácie. [cit. 2022-01-14]. Dostupné na: https://docplayer.cz/6486618-Geometricke-videni-sveta-kma-gvs-ak-rok-2013-2014-letni-semestr.html

[12] Escher, M. C. Deň a noc (Obr. 47). [cit. 2022-01-14]. Dostupné na: https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Day_and_Night)
[13] Escher, M.C. Plazy. (Obr. 48). [cit. 2022-01-14]. Dostupné na: https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Reptiles)

PRÍLOHY

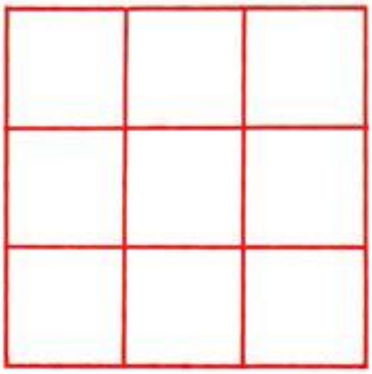
Príloha 1: Pracovný list k aktivite 3.2 **Cestujeme na dovolenku**

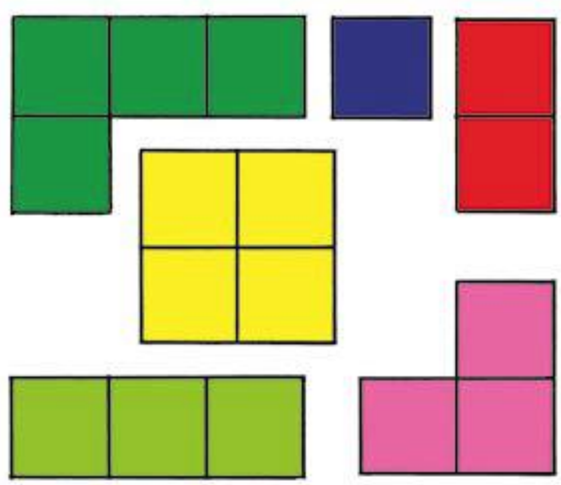


Príloha 2: Pracovný list k aktivite 3.3 **Podlaha do detskej izby**

Podlaha v detskej izbe má tvar štvorca a môžeme ju rozdeliť na menšie štvorce tak, ako vidíte na obrázku. Môžeme ju pokryť parketami z ponuky? Pokryť podlahu znamená, že žiadne parkety sa neprekryjú a nevznikne medzi nimi ani žiadna medzera. Parkety v ponuke sú zložené zo štvorcov rovnakej veľkosti , ako sú malé štvorce na podlahe. Na riešenie úloh, ktoré sú nižšie, použi stavebnicu Polydron.

podlaha **parkety – ponuka**





Úlohy:

1. Zlož z daných parkiet ľubovoľný obrázok.
2. Pomenuj parkety na obrázku.
3. Z daných parkiet pokry podlahu na obrázku, pričom použi ktorékoľvek z ponúknutých parkiet.
4. Pokry podlahu na obrázku jedným druhom parkiet.
5. K dispozícii máš dané parkety. Pokry podlahu tromi parketami.
6. Pokry podlahu čo najmenším počtom parkiet.
7. Riešenia svojich úloh zakresli do pripravenej štvorcovej siete, jednotlivé parkety vyfarbi odpovedajúcou farbou.

Príloha 3: Štvorcová sieť k aktivite 3.3 **Náčrt riešenia do štvorcovej siete**

Príloha 4: Pracovný list k aktivite 3.4 **Pokrytie roviny pravidelnými mnohouholníkmi (mozaika)**

Pokryť rovinu znamená, že pri pokrytí sa žiadne mnohouholníky neprekryjú a nevznikne medzi nimi ani žiadna medzera.

Úloha: Aké pravidelné mnohouholníky môžeme použiť na vyplnenie (pokrytie) roviny? Prečo?

Na riešenie úlohy použite stavebnicu Polydron. Svoje riešenia potom zakreslite na tento papier.

Mnohouholníky v pokrývaní roviny

Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Názov:	Mnohouholníky v pokrývaní roviny
Autor:	PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
	doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
Vydavateľ:	Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Edícia:	Prírodovedec č. 800
Rok vydania:	2022
Miesto vydania:	Nitra
Počet strán:	43

ISBN 978-80-558-1954-9

9 788055 819549