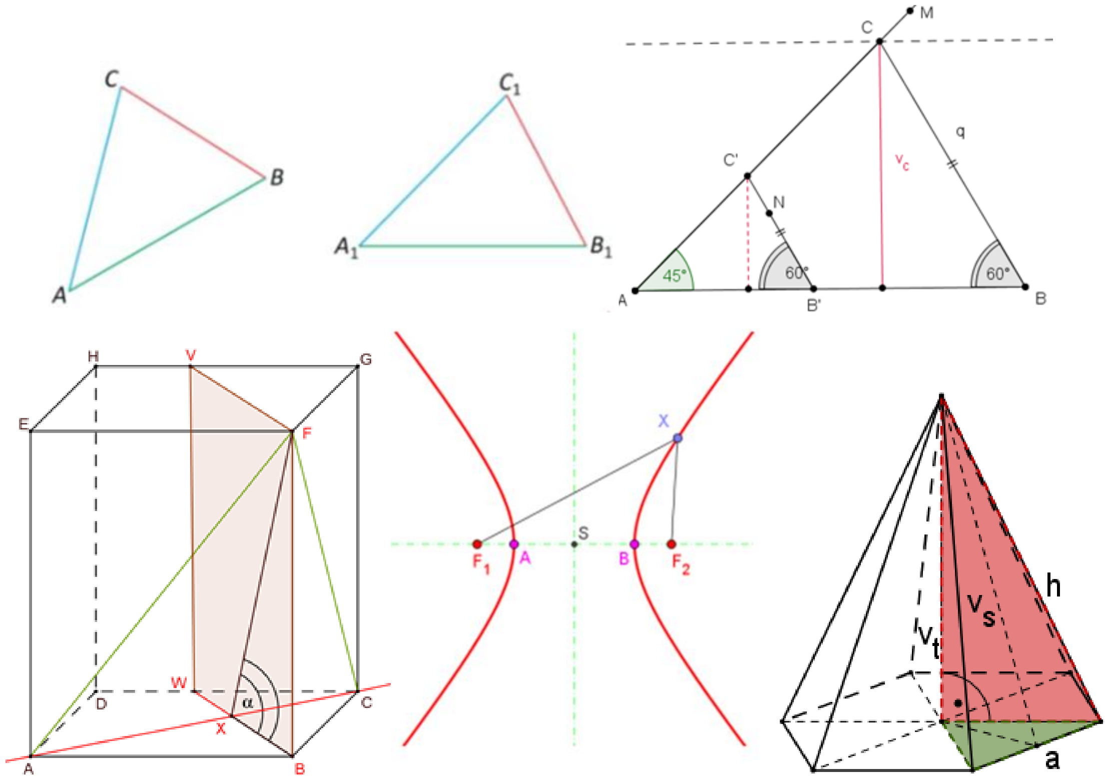
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
**Fakulta prírodných vied a informatiky**

# Geometria pre učiteľov – rozširujúce štúdium




Lucia Rumanová

Nitra 2023

# Geometria pre učiteľov – rozširujúce štúdium

Učebnica pre vysoké školy

Lucia Rumanová

**Geometria pre učiteľov – rozširujúce štúdium**
Edícia Prírodovedec č. 813

**Autor:**
doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.

**Recenzenti:**
doc. PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.
Ing. RNDr. Janka Drábeková, PhD.



Publikácie je podporená z projektu 001UKF-2-1/2022 *„Zvyšovanie kvality prípravy budúcich učiteľov matematiky, fyziky, chémie, informatiky, anglického jazyka, slovenského jazyka a techniky formou doplňujúceho pedagogického štúdia a rozširujúceho štúdia na UKF v Nitre“.*

ISBN 978-80-558-2035-4

# Obsah

# Úvod

Súčasťou matematickej prípravy učiteľov v rámci ich rozširujúceho štúdia na UKF v Nitre je aj oblasť geometrie hlavne preto, že vyučovanie geometrie sa prelína všetkými stupňami vzdelávania, aj keď má vždy iný rozmer.

Na základnej škole má vyučovanie geometrie prevažne propedeutický charakter, pretože žiaci sa stretávajú s rôznymi geometrickými útvarmi len z pohľadu ich definovania a popisu vlastností. Dôraz je kladený nielen na správne používanie matematickej terminológie, ale aj na rysovanie a prácu s rysovacími pomôckami. Na základnej škole prevláda v sprístupňovaní učiva z geometrie hlavne uplatňovanie zásady názornosti. Žiaci tak získavajú poznatky na základe zmyslového vnímania predkladaných modelov. Na strednej škole si žiaci nadobudnuté vedomosti rozširujú o ďalšie matematické pojmy súvisiace s planimetriou a stereometriou. Propedeutika sa nahrádza deduktívnou metódou vo vyučovaní geometrie, ďalej sa rozvíja priestorová predstavivosť žiakov a riešia sa s nimi polohové aj metrické vzťahy v rovine a v priestore. V geometrickom vzdelávaní je pre žiakov veľkým pomocníkom práve učiteľ. Snahou učiteľov by preto malo byť nabádanie žiakov k riešeniu problémov rôznymi spôsobmi, so zreteľom na ich vedomosti, schopnosti a osvojený matematický aparát.

Predložená publikácia je prioritne určená *pre študentov rozširujúceho štúdia matematiky* na UKF v Nitre, preto je v nej kladený dôraz na geometrickú problematiku jednak z teoretického pohľadu, ale aj v jej aplikácii vo forme riešených úloh. Publikácia obsahuje predovšetkým tematické celky z geometrie, ktoré sú súčasťou matematického vzdelávania na základnej a strednej škole.

Verím, že učebnica s názvom *Geometria pre učiteľov – rozširujúce štúdium* bude vhodným didaktickým materiálom pre učiteľov v ich ďalšom vysokoškolskom vzdelávaní, ale bude vhodnou pomôckou aj pre budúcich učiteľov matematiky v rámci ich štúdia na vysokej škole, prípadne túto učebnicu budú ďalší záujemcovia využívať v školskej praxi.

Autorka

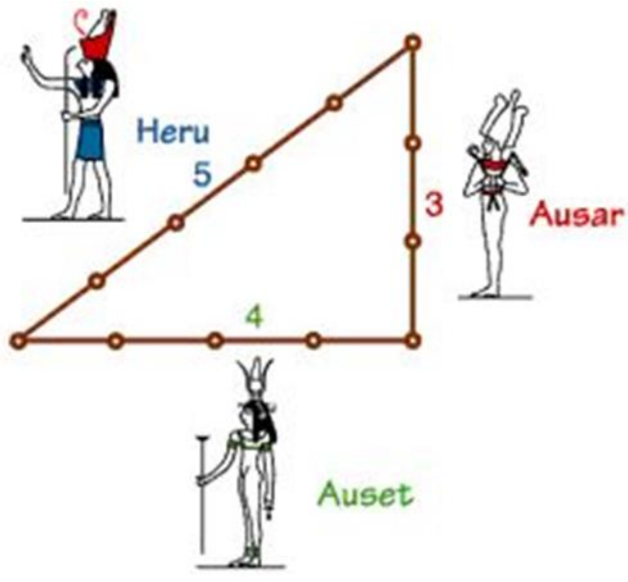
# 1 Aplikácie geometrických poznatkov v planimetrických úlohách

V prvej kapitole sa budeme venovať významným vetám v geometrii, konkrétne Pytagorovej vete a Euklidovým vetám, ktoré súvisia s riešením úloh v pravouhlom trojuholníku. Uvedieme konkrétne ukážky riešení rôznych geometrických úloh. Tiež sa v kapitole venujeme trigonometrii a prezentovať budeme danú problematiku aj v úlohách súvisiacich s uhlami a všeobecnými trojuholníkmi, pričom využijeme goniometrické funkcie.

## 1.1 Pytagorova veta, Euklidova veta o výške, Euklidova veta o odvesnách

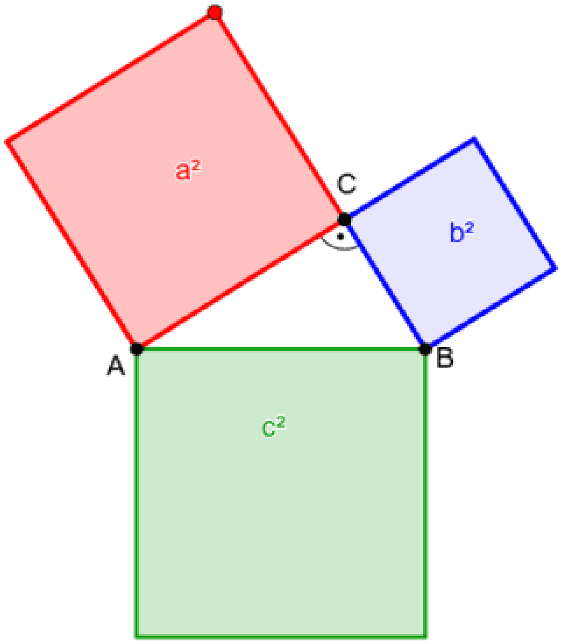
Medzi najčastejšie používanú vetu v školskej praxi patrí Pytagorova veta a je pravdepodobne aj najslávnejšou matematickou vetou vôbec. Je to zároveň veta s najväčším počtom dôkazov, v dostupných zdrojoch sa ich uvádza až okolo 300. Význam Pytagorovej vety v školskej praxi je veľký, pretože je použiteľná hlavne v praktických situáciách prepojených na bežný život.

Pytagorova veta platí pre pravouhlý trojuholník. Pravé uhly vytyčovali už starí Egypťania alebo Babylončania, pretože ich potrebovali pri rôznych stavbách alebo pôdoryse pyramíd. Pravé uhly merali pomocou povrazu, ktorý rozdelili uzlami na dvanásť dielikov. Následne vytvorili z tohto povrazu trojuholník, pričom jednotlivé strany mali dĺžku tri, štyri a päť týchto dielikov, ako je možné vidieť na obrázku.

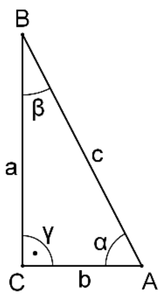



Využili jednu vlastnosť trojuholníka, t. j. oproti najdlhšej strane, ktorá má päť dielikov, leží najväčší uhol (a ten je pravý).

Najčastejšie Pytagorovu vetu poznáme vyjadrenú len algebrickým zápisom $c^2 = a^2 + b^2$ a vieme, že platí v pravouhlom trojuholníku s odvesnami *a, b* a s preponou *c*. Na ďalšom obrázku je graficky znázornená Pytagorova veta.



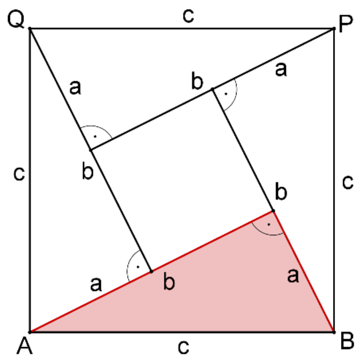

Uvádzame zhrnutie k Pytagorovej vete:




- *c ... prepona* (najdlhšia strana, leží oproti pravému uhlu),
- $a, b$ ... *odvesny*,
- obsah vypočítame zo vzťahu $S = \frac{a.b}{2}$,
- platí *Pytagorova veta*: $c^2 = a^2 + b^2$ (obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad obidvomi odvesnami),
- $a = v_b, b = v_a$, ortocentrum je totožné s vrcholom pravého uhla,
- stred opísanej kružnice je totožný so stredom prepony.

Uvádzame aj dôkaz Pytagorovej vety:

Štvorec $ABPQ$ s obsahom $S$ tvoria štyri pravouhlé trojuholníky s rovnakým obsahom $S_t = \frac{a.b}{2}$ a štvorec so stranou $b - a$ a obsahom $S_š = (b - a)^2$. Obsah štvorca $ABPQ$ je $S = 4S_t + S_š$ a súčasne $S = c^2$.



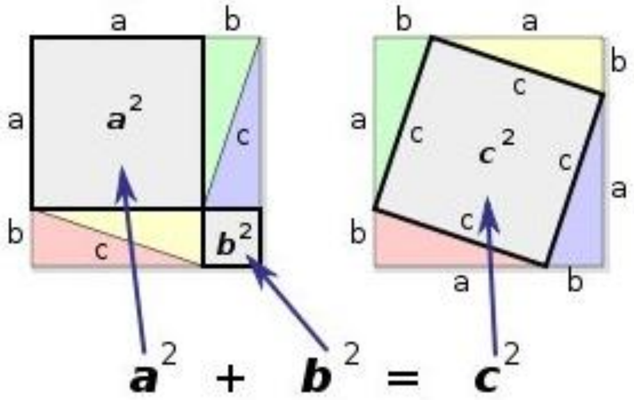

Do rovnosti $4S_t + S_Š = c^2$ dosadíme vzťahy a platí:

$4.\frac{a.b}{2} + (b-a)^2 = c^2$

$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2$.

Teda platí: $c^2 = a^2 + b^2$.

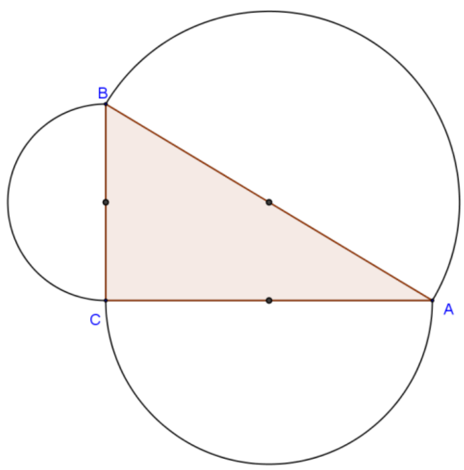
Zaujímavý je aj geometrický dôkaz Pytagorovej vety:



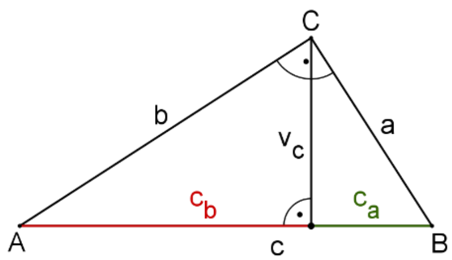

Platí aj obrátená Pytagorova veta:

Ak pre dĺžky strán *a*, *b*, *c* trojuholníka *ABC* platí vzťah $c^2 = a^2 + b^2$, potom je tento trojuholník pravouhlý s odvesnami *a*, *b* a preponou *c*.

*Poznámka.* Nad stranami pravouhlého trojuholníka môžeme zostrojiť aj polkruhy (pozri obrázok) a platí pozmenená Pytagorova veta: *Obsah polkruhu zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka je rovný súčtu obsahov polkruhov zostrojených nad jeho odvesnami.*



V pravouhlom trojuholníku platia aj Euklidova veta o odvesnách a Euklidova veta o výške:




- Euklidova veta o odvesnách:
  $a^2 = c.c_a$
  $b^2 = c.c_b$
- Euklidova veta o výške na preponu:
  $v_c^2 = c_a.c_b$,

kde $c_a$ je časť prepony (úsečka), ktorej krajné body sú: päta výšky na preponu a spoločný bod prepony s odvesnou *a*,

$c_b$ je časť prepony (úsečka), ktorej krajné body sú: päta výšky na preponu a spoločný bod prepony s odvesnou *b*.

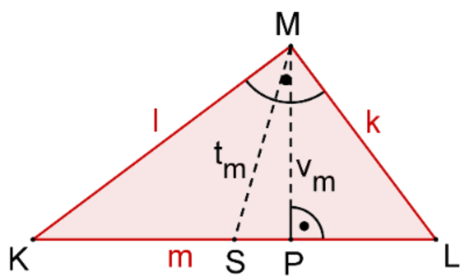
V nasledujúcej časti uvedieme niekoľko úloh, ktoré využívajú v riešení Pytagorovu vetu a Euklidove vety. Vybrali sme úlohy, v ktorých sa prelínajú vedomosti z rôznych tematických celkov, hlavne z planimetrie a stereometrie.

*Príklad 1.*

V pravouhlom trojuholníku *KLM* s preponou $m = KL$ poznáme dĺžky odvesien $|KM| = 20\,mm$ a $|LM| = 15\,mm$. Určte dĺžku ťažnice $t_m$ na preponu, výšky $v_m$ na preponu a dĺžku úsekov prepony vytvorených pätou výšky $v_m$.

*Riešenie:*

V riešení úlohy využijeme Pytagorovu vetu a Euklidove vety, ktoré platia v pravouhlom trojuholníku.



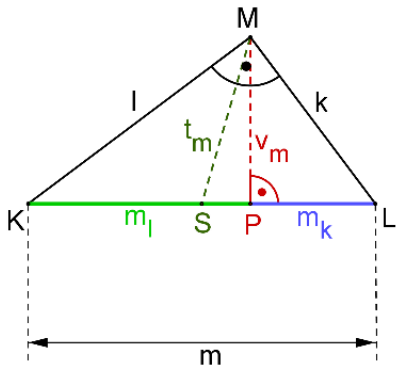

Označíme jednotlivé strany a úseky prepony a postupne vypočítame jednotlivé dĺžky.

V trojuholníku *KLM* použijeme Pytagorovu vetu na výpočet dĺžky prepony *KL*:

$$|KL| = m = \sqrt{l^2 + k^2}$$

$$m = \sqrt{20^2 + 15^2}$$

$$m = 25\,mm$$




Euklidovu vetu o odvesne použijeme na výpočet dĺžok úsekov prepony $KP = m_l$ a $PL = m_k$, kde *P* je päta výšky na preponu v trojuholníku *KLM*:

$$k^2 = m.m_k$$

$$15^2 = 25.m_k$$

$$m_k = 9\ mm$$

Pre $m_l$ platí: $m_l = m - m_k = 25 - 9 = 16\ mm$.

Použijeme Pytagorovu vetu v trojuholníku *LKP* na výpočet výšky na preponu:

$$|MP| = v_m = \sqrt{k^2 - m_k^2}$$

$$v_m = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\ mm$$

Možné je tiež použiť výpočet obsahu trojuholníka *KLM* a túto hodnotu potom následne využiť pre výpočet dĺžky $v_m$, prípadne Euklidovu vetu o výške na preponu v pravouhlom trojuholníku.

Ťažnicu $t_m$ vypočítame z trojuholníka *SPM* s použitím Pytagorovej vety. Platí:

$$|SM| = t_m, |PM| = v_m$$

$$|SP| = |SL| - |PL| = \frac{1}{2}m - m_k = 12{,}5 - 9 = 3{,}5\ mm$$

$$t_m = \sqrt{v_m^2 + |SP|^2}$$

$$t_m = \sqrt{12^2 + 3{,}5^2}$$

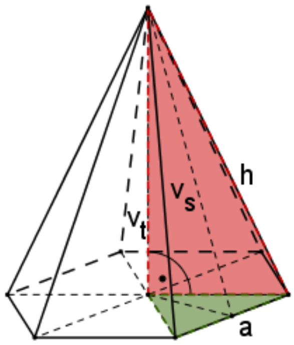
$$t_m = 12{,}5\ mm$$

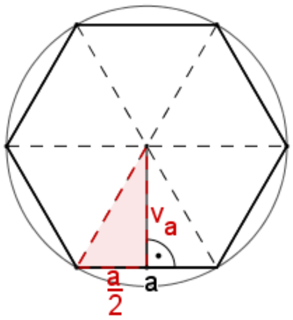
Dĺžka ťažnice na preponu v trojuholníku *KLM* je $12{,}5\ mm$, výšky na preponu $12\ mm$ a úseky prepony majú dĺžku $m_k = 9\ mm$ a $m_l = 16\ mm$.

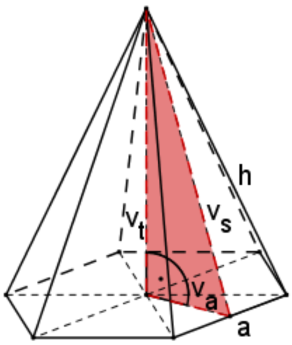
*Príklad 2.*

Pravidelný šesťboký ihlan má dĺžku bočnej hrany $2\ m$ a polomer kružnice opísanej podstave je $1\ m$. Vypočítajte jeho objem a povrch.

*Riešenie:*




V náčrte telesa sme vyznačili všetky prvky potrebné k výpočtom.

Podstavou pravidelného šesťbokého ihlana je pravidelný šesťuholník, ktorého obsah môžeme počítať s použitím vzorcov (tie sú však menej známe), alebo ako šesťnásobok obsahu rovnostranného trojuholníka so stranou $a$ a výškou $v_a$ (podstava sa skladá zo šiestich zhodných rovnostranných trojuholníkov). Keďže poznáme polomer kružnice opísanej podstave, poznáme zároveň dĺžku hrany podstavy $a = 1\,m$, čo vyplýva z vlastností pravidelného šesťuholníka.

Telesovú výšku $v_t$ a stenovú výšku $v_s$ vypočítame s použitím Pytagorovej vety podľa náčrtu, keďže poznáme dĺžku bočnej hrany $h = 2\,m$.

Plášť tohto telesa pozostáva zo šiestich zhodných rovnoramenných trojuholníkov so základňou $a$ a výškou na základňu $v_s$.

$$v_a = \sqrt{1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} \qquad v_t = \sqrt{2^2 - 1^2} \qquad v_s = \sqrt{2^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2}$$

$$v_a = \tfrac{\sqrt{3}}{2} m \qquad v_t = \sqrt{3}\, m \qquad v_S = \tfrac{\sqrt{15}}{2} m$$

Pre podstavu v pravidelnom šesťbokom ihlane platí:

$$S_p = 6.S_{T1}, S_{T1} = \tfrac{a.v_a}{2}$$

$$S_p = 6.\tfrac{a.v_a}{2} = 3.a.v_a$$

$$S_p = 3.1.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_p = \tfrac{3\sqrt{3}}{2} m^2$$

Pre plášť v pravidelnom šesťbokom ihlane platí:

$$S_{pl} = 6.S_{T2}, S_{T2} = \frac{a.v_s}{2}$$

$$S_{pl} = 6.\frac{a.v_s}{2} = 3.a.v_s$$

$$S_{pl} = 3.1.\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$S_{pl} = \frac{3\sqrt{15}}{2}m^2$$

Vypočítame teraz objem a povrch šesťbokého ihlana:

$$V = \frac{1}{3}.S_p.v_t \qquad S = S_p + S_{pl}$$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} \qquad S = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$V = \frac{3}{2}m^3 \qquad S = 8,4\ m^2$$

Objem daného ihlana je 1,5 $m^3$ a jeho povrch je približne 8,4 $m^2$.

*Úlohy na precvičenie*

1. Pomocou Euklidových viet zostrojte úsečky s dĺžkou $\sqrt{10}, \sqrt{7}, \sqrt{20}$ (daná je jednotková úsečka).
2. V pravouhlom trojuholníku *ABC* sú dané dĺžky: $a = 10\ cm, v_c = 9{,}5\ cm$. Vypočítajte obvod a obsah trojuholníka *ABC*.
3. V kružnici s polomerom 7,5 cm sú zostrojené dve rovnobežné tetivy, ktorých dĺžky sú *9 cm* a *12 cm*. Vypočítajte vzdialenosť týchto tetív (nájdite všetky riešenia).
4. Kosoštvorec má stranu *a = 6 cm*, polomer vpísanej kružnice je *r = 2 cm*. Vypočítajte dĺžky oboch uhlopriečok.
5. Obdĺžnik *ABCD* má strany *AB*, *AD* v pomere 3:4. Obdĺžniku *ABCD* je opísaná kružnica *k* s polomerom 5 cm. Vypočítajte dĺžky strán obdĺžnika *ABCD*.
6. Nad dvoma stranami trojuholníka *ABC* sú zostrojené štvorce (strana *AC* je dlhšia ako strana *BC*). Obsah štvorca nad stranou *BC* je 25 cm$^2$, dĺžka výšky $v_c$ na stranu *AB* je 3 cm, päta *P* výšky $v_c$ delí stranu *AB* v pomere 2:1. Vypočítajte dĺžku strany *AB*. Vypočítajte obsah štvorca nad stranou *AC*.
7. V pravouhlom trojuholníku *ABC* je dané: $a = 10\ cm, c = 12{,}5\ cm,$ bod *P* je päta výšky $v_c$, *M* je stred úsečky *BC*. Vypočítajte obsah trojuholníka *PBM*.
8. Vypočítajte objem a povrch kocky, ak telesová uhlopriečka má dĺžku 10 dm.

9. Vypočítate objem a povrch hranola, ktorého podstava je kosoštvorec s uhlopriečkami $u_1 = 12\ cm$, $u_2 = 16\ cm$. Výška hranola sa rovná dvojnásobku podstavovej hrany.

10. Cestný valec má priemer 0,8 m a dĺžku 1,8 m. Akú plochu uvalcuje, ak sa otočí 1200-krát? Koľkokrát sa musí otočiť, aby uvalcoval cestu 3,6 m širokú a 6,28 km dlhú?

11. Obal na zmrzlinu má po rozbalení tvar štvrť kruhu s polomerom 12 cm. Koľko mililitrov zmrzliny sa doň zmestí?

12. Vypočítajte objem a povrch pravidelného zrezaného štvorbokého ihlana s hranami podstáv 1 dm a 5 cm, ak obsah plášťa je 5,4 dm$^2$.

13. Do nádoby tvaru polgule sme naliali 2 l vody a tak sme ju naplnili do výšky 60 mm. Vypočítajte polomer príslušnej gule.

14. Vypočítajte, koľko dm$^2$ plechu tvorí povrch nádoby tvaru zrezaného rotačného kužeľa, ktorá je zhora otvorená a priemer jej dna je 18 cm, priemer hornej podstavy je 30 cm a strana má dĺžku 18 cm. Vypočítajte aj jej objem.

## 1.2 Trigonometria

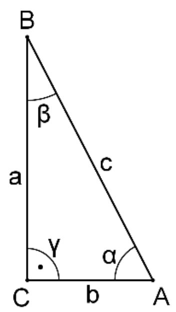
V tejto podkapitole sa budeme venovať trigonometrii, konkrétne úlohám súvisiacich s uhlami a trojuholníkmi s využitím goniometrických funkcií ako *sínus*, *kosínus*, *tangens* a *kotangens*. Zadefinujme si najskôr uvedené goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku.

*Sínus* ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžky protiľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony.

*Kosínus* ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžky priľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony.

*Tangens* ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžok protiľahlej a priľahlej odvesny k ostrému uhlu.

*Kotangens* ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžok priľahlej a protiľahlej odvesny k ostrému uhlu.




$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

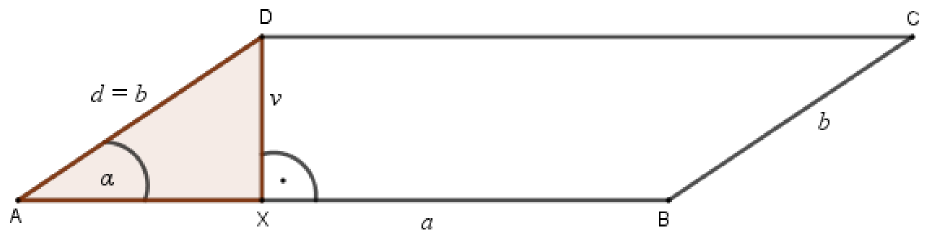
$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{cotg}\beta = \frac{a}{b} \qquad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$

*Príklad 3.*

Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov rovnobežníka *ABCD*, ak sú dané dĺžky jeho strán $a = 10\ cm, b = 5\ cm$ a obsah rovnobežníka je $25\ cm^2$.

*Riešenie:*




Vzorec pre obsah rovnobežníka je $S = a.v$, kde $v$ je výška rovnobežníka *ABCD*. Môžeme vypočítať teda danú dĺžku *v*:

$$v = \frac{S}{a} = \frac{25}{10} = 2{,}5\ cm$$

V pravouhlom trojuholníku *AXD* poznáme dĺžku strany $|AD| = b = 5\ cm$ a výšky $v = |DX| = 2{,}5\ cm$. Na výpočet uhla $\alpha$ v trojuholníku *AXD* využijeme goniometrickú funkciu sínus:

$$\sin\alpha = \frac{v}{b} = \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30°.$$

Dvojica uhlov $\alpha, \gamma$ a $\beta, \delta$ sú zhodné uhly a platí: $\gamma = \alpha = 30°, \beta = \delta$.

V rovnobežníku platí, že súčet vnútorných uhlov je $360°$, preto vieme vypočítať veľkosť zvyšných uhlov:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

$$2.\beta + 2.30° = 360°$$

$$2.\beta = 300°$$

$$\beta = 150°$$

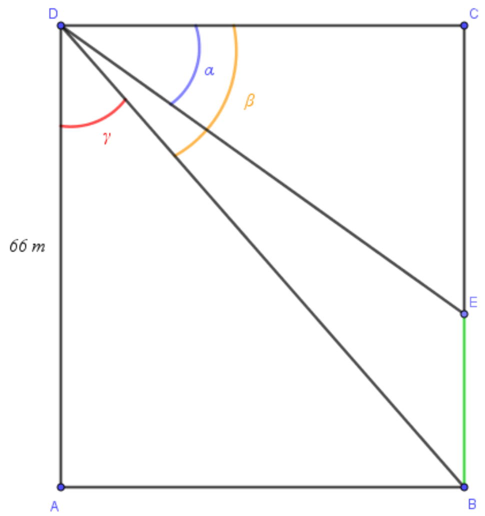
Veľkosti vnútorných uhlov rovnobežníka sú $\alpha = \gamma = 30°, \beta = \delta = 150°$.

*Príklad 4.*

Zo skaly vo výške 66 m je vidieť vrchol stožiara pod hĺbkovým uhlom $\alpha = 37°$ a pätu stožiara pod hĺbkovým uhlom $\beta = 51°$. Vypočítajte výšku stožiara.

*Riešenie:*

Situácia zo zadania príkladu je znázornená na obrázku.




Výšku stožiara *BE* zistíme ako rozdiel dĺžok: $|BE| = |AD| - |EC|$.
Dĺžku *EC* zistíme z trojuholníka *DEC*.
Vypočítame najskôr dĺžky *CD*, *AB*, ktoré sa rovnajú, použijeme na výpočet $tg\ \gamma$.
Platí:

$$\gamma = 90° - 51° = 39°$$

$$tg\ \gamma = \frac{|AB|}{|AD|}$$

$$|AB| = |AD|.tg\ \gamma = 66.tg\ 39°$$

$$|AB| = 53{,}45\ m$$

Vieme vypočítať teraz $|EC|$:

$$tg\ \alpha = \frac{|EC|}{|CD|}$$

$$|EC| = |CD|.tg\ \alpha = 53{,}45.tg\ 37°$$

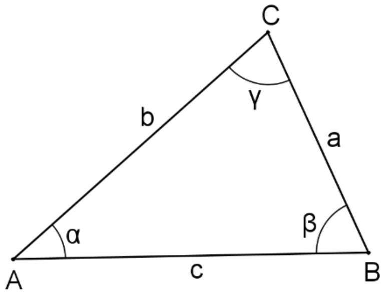
$$|EC| = 40{,}28\ m$$

$$|BE| = |AD| - |EC| = 66 - 40{,}28 = 25{,}72\ m$$

Stožiar má výšku 25,72 m.

V trojuholníku platí *sínusová a kosínusová veta*. Tieto vety používame pri riešení všeobecného trojuholníka, t. j. pri určovaní neznámych prvkov všeobecného trojuholníka.

*Sínusová veta*: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$




Používame ju, ak je trojuholník daný:

- dvomi stranami a uhlom ležiacim oproti jednej z nich,
- jednou stranou a ľubovoľnými dvomi uhlami.

*Kosínusová veta*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

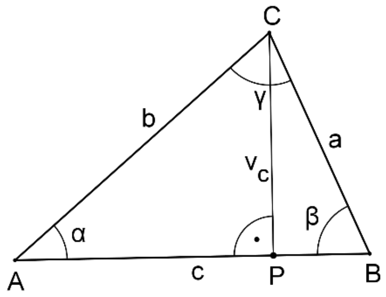
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Používame ju, ak je trojuholník daný:

- tromi stranami,
- dvomi stranami a uhlom nimi zovretým.

*Dôkaz sínusovej vety*



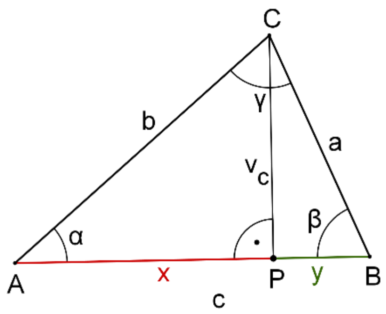

Z pravouhlých trojuholníkov *APC* a *BPC* môžeme zapísať vzťahy (s využitím goniometrických funkcií ostrého uhla pravouhlého trojuholníka):

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha = \frac{v_c}{b} \Rightarrow v_c = b \cdot \sin\alpha \\ \sin\beta = \frac{v_c}{a} \Rightarrow v_c = a \cdot \sin\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Analogicky dokážeme ostatné vzťahy.

*Dôkaz kosínusovej vety*




V pravouhlom trojuholníku platí Pytagorova veta:

$$\triangle\, APC: v_c^2 = b^2 - x^2$$

$$\triangle\, BPC: v_c^2 = a^2 - y^2$$

Platí rovnosť: $b^2 - x^2 = a^2 - y^2$

a tiež platí: $c = x + y \implies y = c - x$.

Dosadíme do predchádzajúceho vzťahu a upravíme:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

V trojuholníku *APC* zároveň platí: $\cos\alpha = \frac{x}{b} \Longrightarrow x = b.\,cos\,\alpha$

Po opätovnom dosadení za *x* dostávame vzťah: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$

V dokazovaní ďalších vzťahov postupujeme analogicky.

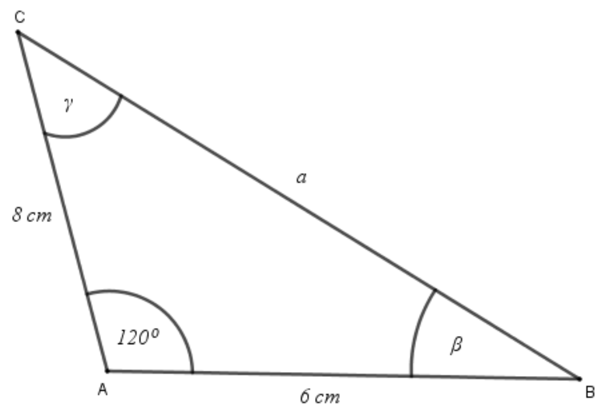
*Poznámka.* Platí vzťah $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, kde *R* je polomer kružnice opísanej trojuholníku.

*Príklad 5.*

V trojuholníku *ABC* sú dané: $b = 8\ cm, c = 6\ cm, \alpha = 120°$. Vypočítajte dĺžku strany $a$, veľkosť vnútorných uhlov $\beta, \gamma$ daného trojuholníka.

*Riešenie:*

Na výpočet ostatných prvkov v trojuholníku *ABC* využijeme sínusovú a kosínusovú vetu.




Dĺžku strany a vypočítame z kosínusovej vety:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$a^2 = 8^2 + 6^2 - 2.8.6.\cos 120\,° \Rightarrow a \doteq 12{,}17\ cm$$

Na výpočet zvyšných uhlov v trojuholníkov použijeme zase sínusovú vetu:

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}.\,c = \sin 120°.\frac{6}{12{,}17} \doteq\ 0{,}423$$

$$\gamma \doteq 25°17'$$

Podobne by sme mohli vypočítať aj veľkosť uhla $\beta$, no my použijeme na výpočet vlastnosť pre súčet uhlov v trojuholníku:

$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 120° - 25°17' = 34°43'$

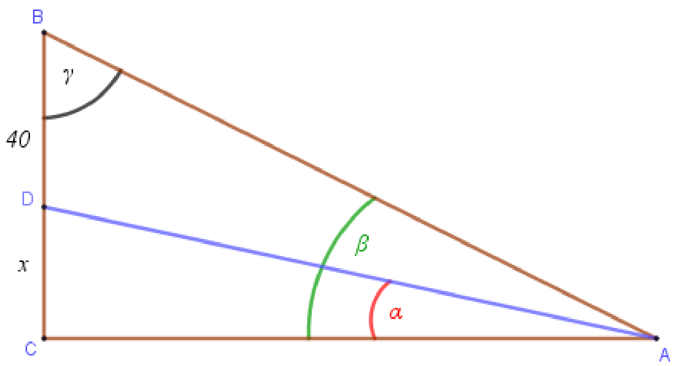
V trojuholníku *ABC* majú uhly veľkosť $25°17'$, $34°43'$ a strana má dĺžku $12{,}17\ cm$.

*Príklad 6.*

Na kopci stojí rozhľadňa 40 m vysoká. Pätu a vrchol tejto rozhľadne vidíme z určitého miesta v údolí pod výškovými uhlami $\alpha = 35°, \beta = 41°$. V akej výške je vrchol kopca nad rovinou pozorovacieho miesta?

*Riešenie:*

Situácia zo zadania úlohy je znázornená na obrázku.




Z pravouhlého trojuholníka *ABC* vypočítame veľkosť uhla $\gamma$, čo je uhol pri vrchole *B*:

$$\gamma = 90° - 41° = 49°$$

Sínusovú vetu využijeme na výpočet dĺžky úsečky *AD* v trojuholníku *ABD*:

$$\frac{|AD|}{\sin 49°} = \frac{40}{\sin 6°}$$

$$|AD| = \frac{40.\sin 49°}{\sin 6°}$$

$$|AD| = 301{,}9$$

Na výpočet výšky kopca, ktorý je v obrázku označený ako $x = |CD|$, využijeme goniometrickú funkciu sínus v trojuholníku *ABC*:

$$\sin\alpha = \frac{x}{|AD|}$$

$$x = |AD|.\sin\alpha$$

$$x = 301{,}9.\sin 35°$$

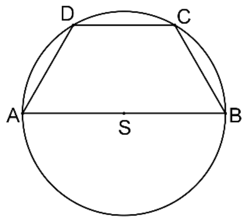
$$x = 173{,}16\ m$$

Výška kopca, na ktorej je rozhľadňa, je približne $173{,}16\ m$.

*Úlohy na precvičenie*

1. Do pravouhlého trojuholníka *ABC* s pravým uhlom pri vrchole $A$ je vpísaná kružnica. Dotykový bod $T_1$ rozdeľuje odvesnu *AB* v pomere $AT_1 : T_1B = 1 : 4$. Určte veľkosti ostrých uhlov trojuholníka *ABC*.

2. Lichobežník na obrázku je tetivový, pričom $|BC| = |CD|$, $|AB| = 120\, mm$ je priemerom opísanej kružnice a $|\sphericalangle BCD| 120°$. Vypočítajte jeho obsah a obvod.




3. Obsah rovnoramenného trojuholníka so základňou dlhou 6 cm je 30 cm$^2$. Vypočítajte dĺžku polomeru kružnice vpísanej a opísanej tomuto trojuholníku.

4. Vypočítajte obvod trojuholníka *ABC*, ak poznáme: $|AB| = 8cm$, $|BC| = 6\ cm, |\sphericalangle BAC| = 30°$.

5. Na kopci stojí rozhľadňa 35 m vysoká. Jej pätu i vrchol vidíme z určitého miesta v údolí pod výškovými uhlami *α = 28°, β = 31°.* Ako vysoko je vrchol kopca nad rovinou pozorovacieho miesta?

6. Vypočítajte ostatné prvky trojuholníka *ABC* (dĺžky strán a veľkosť vnútorných uhlov trojuholníka), v ktorom je dané:

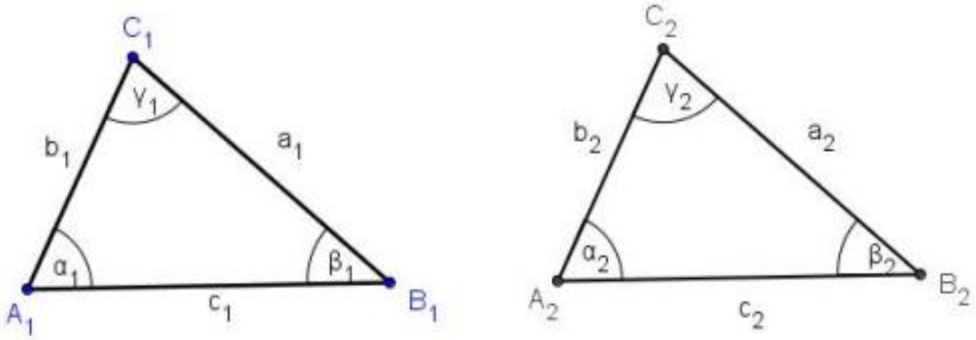
   a) $a = 4\ cm, c = 5\ cm, \alpha = 45°$
   b) $a = 65\ cm, b = 46\ cm, \alpha = 42°35'$
   c) $b = 225\ mm, \alpha = 107°35', \beta = 30°40'$
   d) $a = 16\ cm, b = 25\ cm, c = 36\ cm$

# 2 Zhodnosť a podobnosť útvarov. Zhodné a podobné zobrazenia v rovine. Konštrukčné úlohy

V druhej kapitole uvedieme definíciu a vlastnosti zhodných a podobných zobrazení v rovine. Vysvetlíme pojmy súvisiace so zhodnosťou a podobnosť geometrických útvarov, venujeme sa hlavne trojuholníkom. Podrobnejšie ale popíšeme rôzne zhodné zobrazenia, konkrétne osovú a stredovú súmernosť, posunutie, otočenie, ale aj jedno podobné zobrazenie – rovnoľahlosť. Na konkrétnych príkladoch uvedieme praktické použitie uvedených zobrazení, a to hlavne pri riešení konštrukčných úloh a rôznych aplikačných úloh.

## 2.1 Zhodnosť trojuholníkov

Dané sú dva trojuholníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$. Hovoríme, že trojuholník $A_1B_1C_1$ je zhodný s trojuholníkom $A_2B_2C_2$, ak sú zhodné každé dve odpovedajúce si strany a každé dva odpovedajúce si vnútorné uhly.

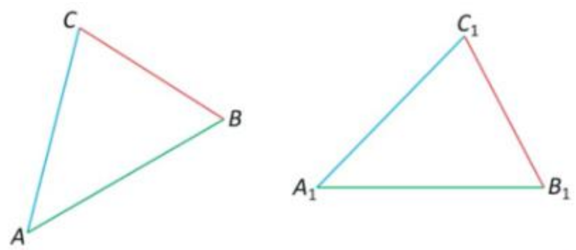



Zhodnosť trojuholníkov $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ označujeme: $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$.

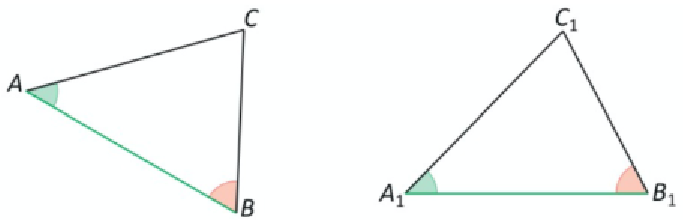
Teda platí: $a_1 \cong a_2,\ b_1 \cong b_2,\ c_1 \cong c_2, \alpha_1 \cong \alpha_2,\ \beta_1 \cong \beta_2,\ \gamma_1 \cong \gamma_2$.

Platia vety:

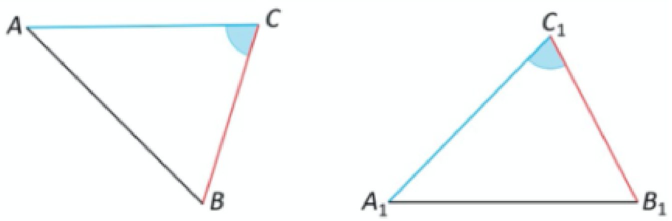
- Ak sa dva trojuholníky zhodujú vo všetkých troch stranách, tak sú zhodné (veta sss).




- Ak sa dva trojuholníky zhodujú v jednej strane a v dvoch uhloch priľahlých, tak sú zhodné (veta usu).




- Ak sa dva trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom, tak sú zhodné (veta sus).

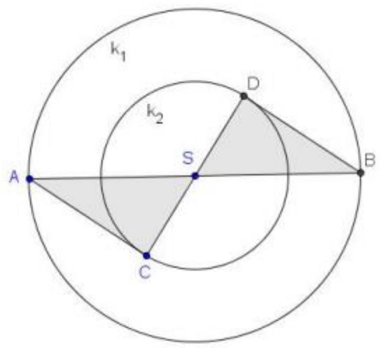



*Úlohy na precvičenie*

1. Rozhodnite, či trojuholníky *ABC* a *EFG* sú zhodné. Ak áno, ich zhodnosť odôvodnite a zapíšte:

   a) $|AB| = 60\ mm, |\sphericalangle CAB| = 56°, |\sphericalangle ABC| = 71°$
   $|FG| = 6\ cm, |\sphericalangle EFG| = 56°, |\sphericalangle FGE| = 71°$
   b) $|AC| = 9\ cm, |\sphericalangle CAB| = 80°, |\sphericalangle BCA| = 46°$
   $|EF| = 9\ cm, |\sphericalangle EFG| = 46°, |\sphericalangle FGE| = 54°$

2. Kružnice $k_1, k_2$ majú spoločný stred *S*. Úsečka $AB$ je priemer kružnice $k_1$, úsečka $CD$ je priemer kružnice $k_2$. Rozhodnite, či vyfarbené trojuholníky (pozri obrázok) sú zhodné. Ak áno, ich zhodnosť zdôvodnite a zapíšte.




3. Ktoré dva trojuholníky sú zhodné? Zapíš zhodnosť pre všetky odpovedajúce si strany a uhly.

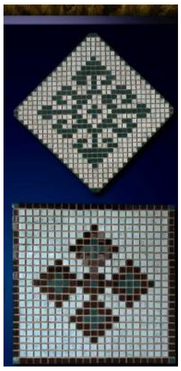
   $\Delta\ ABC: |BC| = 8\ cm, |\sphericalangle ABC| = 50°, |\sphericalangle BCA| = 93°$
   $\Delta DEF: |DE| = 80\ mm, |\sphericalangle DEF| = 93°, |\sphericalangle FDE| = 37°$
   $\Delta MNO: |NO| = 8\ cm, |\sphericalangle OMN| = 50°, |\sphericalangle NOM| = 93°$

## 2.2 Zhodné zobrazenia v rovine

Zhodné zobrazenia sú zobrazenia, v ktorých vytvorený obraz je zhodný zo vzorom, t. j. obraz závisí od vzoru, mení sa podľa vzoru.

Nájdeme určite veľa ukážok zhodných zobrazení okolo nás, či už v prírode, v umení, v rôznych vedách, ale aj v mozaikách, dlaždiciach. Uvedieme niekoľko konkrétnych ukážkach zo života.





Pod zobrazením *Z* v rovine rozumieme také zobrazenie, ktoré každému bodu *X* v rovine priradí práve jeden bod *X´* v rovine, $X' = Z(X)$.

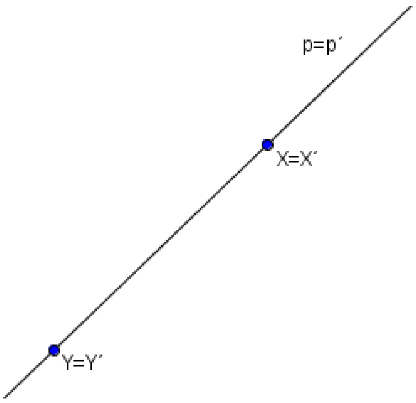
*Poznámka.* Bod *X* sa nazýva vzor a bod *X´* obraz v danom zobrazení.

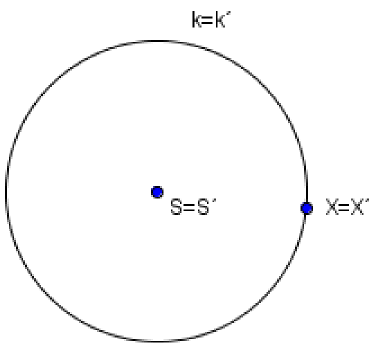
Zhodné zobrazenia sú zobrazenia, v ktorých vytvorený obraz je zhodný zo vzorom, t. j. obraz závisí od vzoru, mení sa podľa vzoru.

Ak sa bod *X* zobrazí na ten istý bod *X* (zobrazí sa sám do seba), t. j. $X = Z(X) = X'$, tak bod *X* sa nazýva *samodružným* bodom.

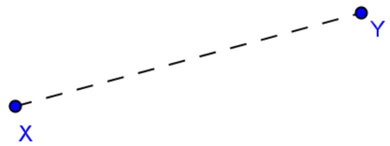
Ak sa priamka *p* zobrazí sama do seba, t. j.$p = p'$, tak je priamka *p* samodružnou priamkou v danom zobrazení.  Každý bod na samodružnej priamke je samodružný.

Ľubovoľný rovinný útvar *U* (trojuholník, kružnica, štvoruholník, ...) sa nazýva *samodružným útvarom*, ak sa daný útvar zobrazí sám do seba ($U = Z(U) = U'$), teda každý bod patriaci útvaru je samodružný.

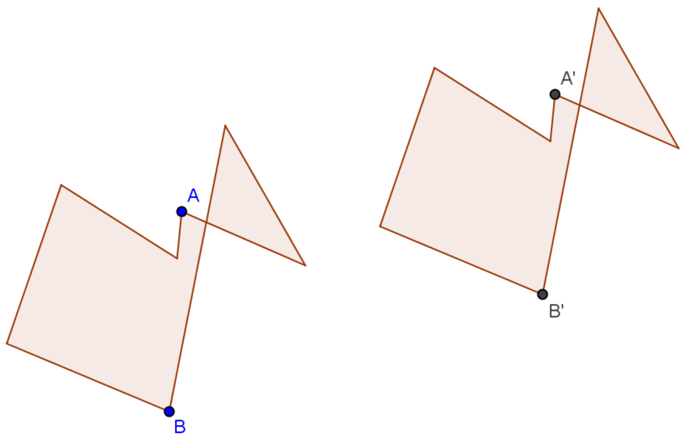




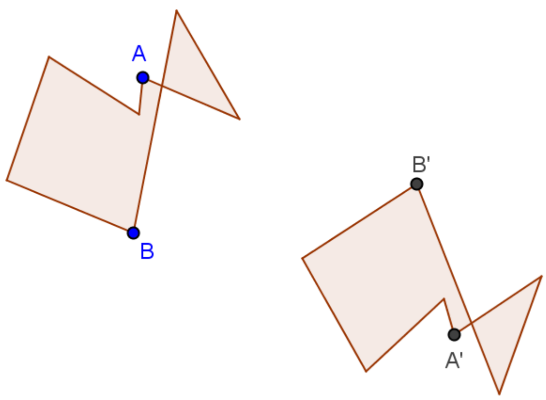
*Involútorné zobrazenie* je zobrazenie, ktoré ak priradí vzoru *X* obraz *Y*, tak priradí vzoru *Y* obraz *X*.




*Priama zhodnosť* – orientácia bodov vzoru a obrazu je rovnaká. Útvar sa pri priamej zhodnosti napríklad len posunie alebo otočí (pozri obrázok).




*Nepriama zhodnosť* – orientácia bodov vzoru a obrazu je opačná, to znamená, že útvar sa v nepriamej zhodnosť „preklopí“.




*Zhodné zobrazenie v rovine* je také zobrazenie, ktoré dvom rôznym bodom *X*, *Y* priradí body *X´*, *Y´* tak, že úsečky *XY*, *X´Y´* sú zhodné.

Pre zhodné zobrazenie základných geometrických útvarov v rovine platia nasledujúce vlastnosti:

- Obrazom $\overrightarrow{AB}$ v zhodnom zobrazení v rovine je $\overrightarrow{A'B'}$.
- Obrazom $\overleftrightarrow{AB}$ v zhodnom zobrazení v rovine je $\overleftrightarrow{A'B'}$.
- Obrazom $\overrightarrow{pA}$ v zhodnom zobrazení v rovine je $\overrightarrow{p'A'}$.
- Obrazom $\sphericalangle AVB$ v zhodnom zobrazení v rovine je $\sphericalangle A'V'B'$ s ním zhodný.

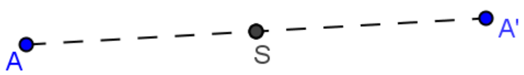
- Obrazom rovnobežných priamok $AB, CD$ v zhodnom zobrazení v rovine sú rovnobežné priamky $A'B', C'D'$.
- Dva rovinné útvary sú zhodné práve vtedy, keď sa body jedného útvaru zobrazia do bodov druhého útvaru tak, že úsečky, ktoré si v zobrazení zodpovedajú, sú zhodné.

Ďalej sa konkrétne budeme venovať nasledujúcim zhodným zobrazeniam v rovine:

- stredová súmernosť,
- osová súmernosť,
- posunutie (translácia),
- otočenie (rotácia).

## 2.3 Stredová súmernosť

Nech *S* je bod v rovine. *Stredovou súmernosťou* podľa bodu *S* rozumieme zobrazenie $S(S)$ v rovine, ktoré každému bodu *A* roviny priradí taký bod *A´* roviny, že bod *S* je stredom úsečky *AA´*.

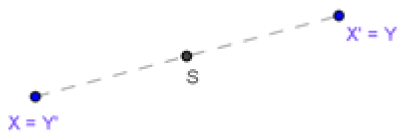



Body *A, A´* sú stredovo súmerné podľa bodu *S*. Bod *S* sa nazýva *stred súmernosti*. Označenie stredovej súmernosti so stredom *S*: $S(S): A \to A'$.

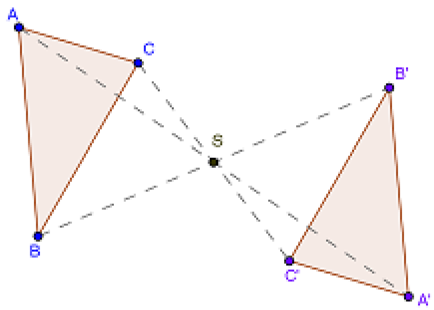
Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom súmernosti *S* alebo dvojicou bodov, ktoré sa na seba zobrazia (vzor – obraz).

Vlastnosti stredovej súmernosti:

- Stredová súmernosť je involutórne zobrazenie.




- Samodružným bodom je stred súmernosti *S*.
- Stredová súmernosť je priama zhodnosť.



- Priamka, ktorá prechádza stredom súmernosti *S*, je samodružná.
- V stredovej súmernosti so stredom *S* je obrazom každej priamky (neprechádzajúcej stredom *S*) priamka s ňou rovnobežná.
- Obrazom úsečky *AB* v stredovej súmernosti je zhodná úsečka *A´B´*, ktorá je rovnobežná s úsečkou *AB*.

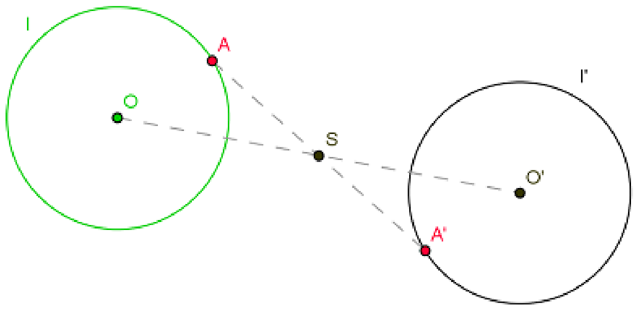
*Príklad 1.*

Daná je kružnica $l(O, r)$. Zostrojte obraz kružnice *l* v stredovej súmernosti podľa stredu *S*, ktorý je vonkajším bodom kružnice *l*.

*Riešenie:*

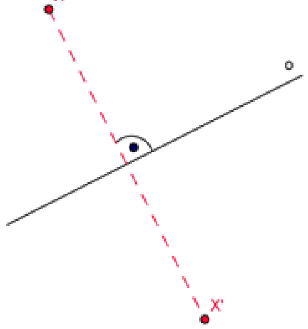
$S(S): l \to l', S \notin l.$

Máme dve možnosti riešenia. Stačí zobraziť v danej stredovej súmernosti len stred *O* kružnice *l*, $S(S): O \to O'$, pretože polomer kružnice *l´* bude mať tiež dĺžku *r*. Iná možnosť riešenia je taká, že zobrazíme v danej stredovej súmernosti stred *O* a ľubovoľný bod *A*, ktoré patria kružnici *l*, $S(S): O \to O', S(S): A \to A'$. Kružnica *l´* bude určená stredom *O´* a polomerom $|O'A'|$.




## 2.4 Osová súmernosť

Daná je priamka *o* v rovine. *Osová súmernosť v rovine* je zobrazenie $S(o)$, ktoré každému bodu *X* roviny priradí bod *X´* roviny tak, že body *X, X´* ležia na kolmici k priamke *o*, pričom stred úsečky *XX´* leží na priamke *o*.

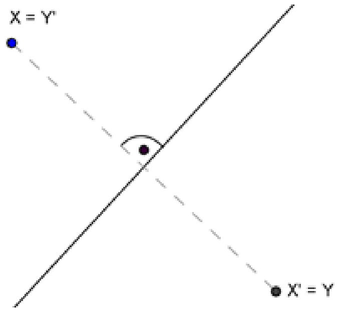


Body *X*, *X´* sú osovo súmerné podľa priamky *o*. Priamku *o* nazývame *os súmernosti*. Označenie osovej súmernosti s osou *o*: $S(o): X \rightarrow X'$.

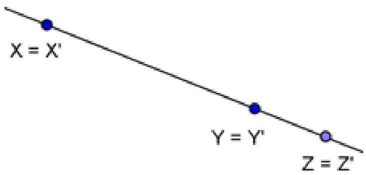
Osová súmernosť je jednoznačne určená osou súmernosti *o* alebo dvojicou bodov, ktoré sa na seba zobrazia (vzor – obraz).

Vlastnosti osovej súmernosti:

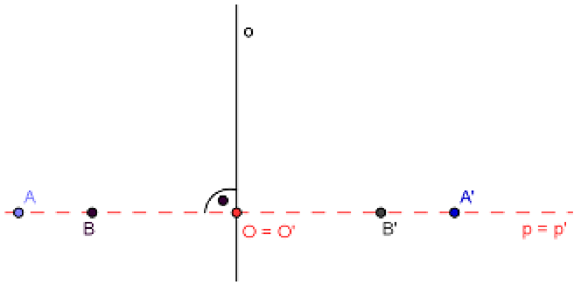
- Osová súmernosť je involutórne zobrazenie.



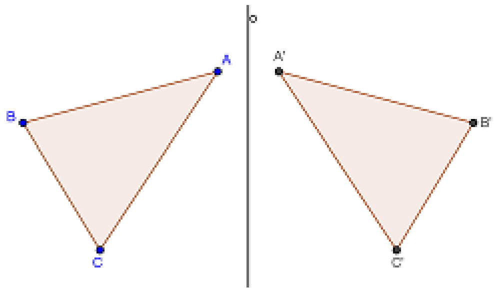

- Samodružné body osovej súmernosti sú všetky body osi súmernosti.




- Priamky kolmé na os súmernosti sú samodružné.




- Osová súmernosť je nepriama zhodnosť.




- Obrazom ľubovoľnej polroviny s hraničnou priamkou *o* je polrovina k nej opačná.
- Osová súmernosť zobrazí útvar na útvar s ním zhodný.

*Poznámka.* Kružnica sa v osovej súmernosti zobrazí na zhodnú kružnicu, trojuholník na trojuholník s ním zhodný, obrazom ľubovoľnej priamky v osovej súmernosti je priamka, úsečka sa zobrazí na úsečku, ktorá je s ňou zhodná, dvojica rovnobežiek sa zobrazí na dvojicu rovnako vzdialených rovnobežiek.

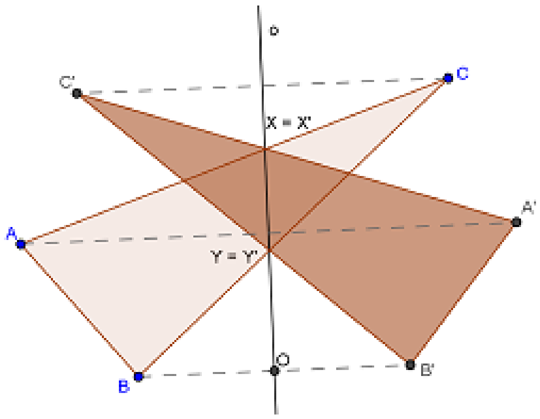
*Príklad 2.*

Daný je trojuholník *ABC* a priamka *o*, ktorá pretína dve strany trojuholníka. Zostrojte obraz trojuholníka *ABC* podľa osi *o*.

*Riešenie:*

$S(o): ABC \to A'B'C'.$

Obrazom trojuholníka *ABC* v osovej súmernosti podľa osi *o* je trojuholník *A´B´C´* s ním zhodný. Na jeho zostrojenie stačí zobraziť v danej súmernosti všetky jeho vrcholy. Popíšeme zobrazenie bodu B v osovej súmernosti podľa osi *o*. Bodom *B* vedieme kolmicu na os *o*, kolmica pretne os v bode *O* a bod *B´* dostaneme tak, že bod *O* je stredom úsečky *BB´*. Podobne zostrojíme obrazy zvyšných dvoch vrcholov *A*, *C* trojuholníka *ABC*. Os *o* pretne podľa zadania trojuholník *ABC* v dvoch rôznych bodoch *X*, *Y*, a teda tieto body sú samodružnými bodmi v danej osovej súmernosti $(X = X', Y = Y')$.



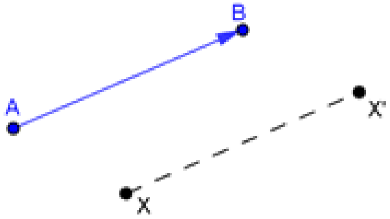

## 2.5 Posunutie

V posunutí dané útvary posúvame daným smerom o danú vzdialenosť. Keďže môžeme útvar posúvať dvoma smermi o pevne zvolenú vzdialenosť, zavedieme pojem orientovaná úsečka.

*Orientovaná úsečka* je úsečka $\overrightarrow{AB}$, ktorej krajné body majú určené poradie, t. j. bod *A* je začiatočný bod, bod *B* je koncový bod úsečky. *Dĺžkou orientovanej úsečky* $\overrightarrow{AB}$ nazývame dĺžku úsečky *AB*.

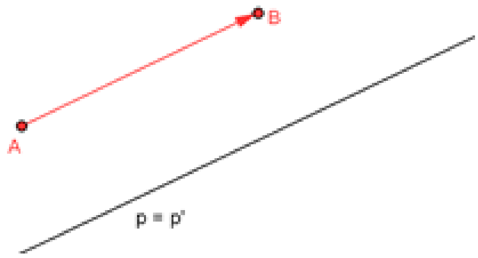
*Posunutie (translácia)* určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ je zobrazenie $T(\overrightarrow{AB})$, ktoré každému bodu *X* priradí bod *X´* tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{XX'}$ sú zhodné a rovnako orientované.

Posunutie je jednoznačne určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, ale aj dvojicou bodov, ktoré sa na seba zobrazia. Označenie posunutia: $T(\overrightarrow{AB}): X \to X'$.

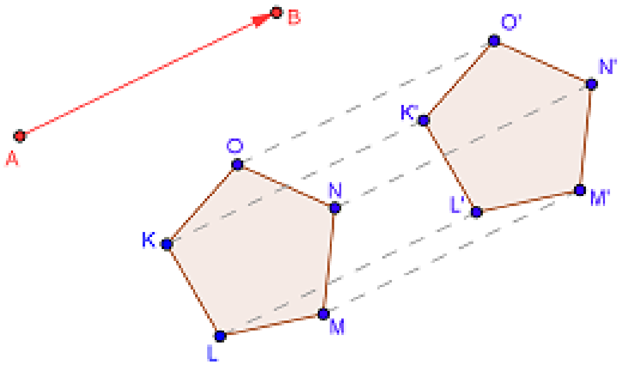



Vlastnosti posunutia:

- Posunutie nie je involutórne zobrazenie.
- Posunutie nemá samodružné body.
- Samodružné priamky sú všetky priamky rovnobežné s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$.




- Posunutie je priama zhodnosť.




- Obrazom ľubovoľnej priamky v posunutí je priamka s ňou rovnobežná.
- Obrazom úsečky *XY* v posunutí je úsečka *X´Y´* s ňou zhodná a rovnobežná.

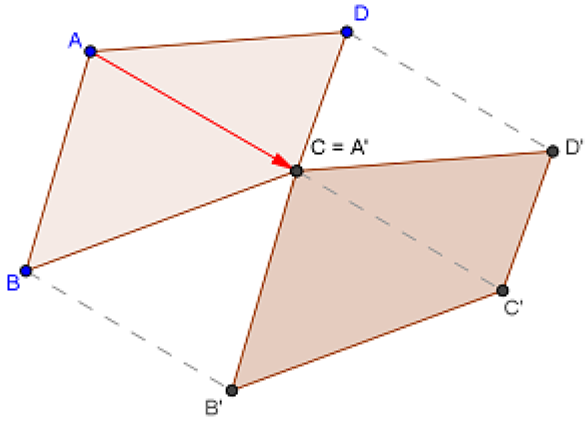
*Príklad 3.*

Zostrojte obraz štvoruholníka *ABCD* v posunutí určenom orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CA}$.

*Riešenie:*

$T(\overrightarrow{CA})\colon ABCD \to A'B'C'D'$.

Obrazom štvoruholníka *ABCD* v posunutí, ktoré je určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CA}$, je štvoruholník *A´B´C´D´* zhodný so štvoruholníkom *ABCD*. Na jeho zostrojenie nám stačí posunúť napríklad jednotlivé vrcholy daného štvoruholníka. To znamená, že budeme vrcholy posúvať rovnobežne s vektorom $\overrightarrow{CA}$ o dĺžku úsečky *CA*. Bod *A* sa posunie do bodu *C* ($C = A'$).




Príklad môžeme riešiť aj tak, že posunieme len niektoré vrcholy štvoruholníka *ABCD* a obraz štvoruholníka *A´B´C´D´* doplníme podľa vlastnosti, že obrazom úsečky v posunutí je úsečka s ňou zhodná a rovnobežná.

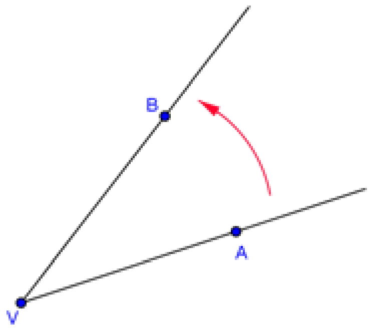
## 2.6 Otočenie

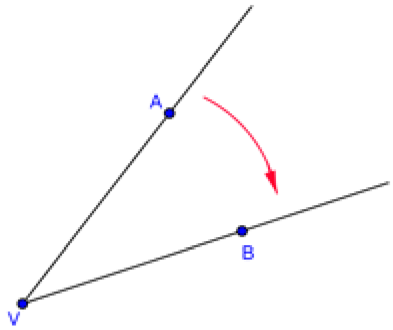
Pri otočení máme znovu dve možnosti otáčania, môžeme otáčať proti smeru a v smere hodinových ručičiek. Zavedieme preto pojem orientovaný uhol.

*Orientovaným uhlom* $AVB$ rozumieme usporiadanú dvojicu polpriamok $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ so spoločným začiatkom *V*. Polpriamky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ nazývame ramená orientovaného uhla, $\overrightarrow{VA}$ je začiatočné rameno, $\overrightarrow{VB}$ je koncové rameno, bod *V* je vrchol uhla.

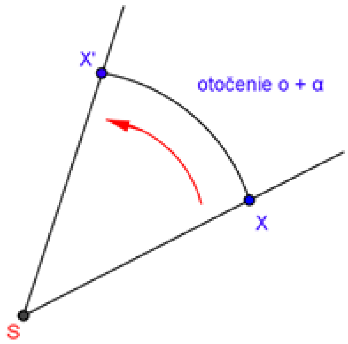
Pod veľkosťou orientovaného uhla $AVB$ budeme rozumieť veľkosť konvexného alebo nekonvexného uhla $AVB$, ktorý vytvoríme otočením polpriamky $\overrightarrow{VA}$ do polpriamky $\overrightarrow{VB}$ pri pohybe v kladnom zmysle (proti smeru hodinových ručičiek) alebo v zápornom zmysle (v smere hodinových ručičiek).

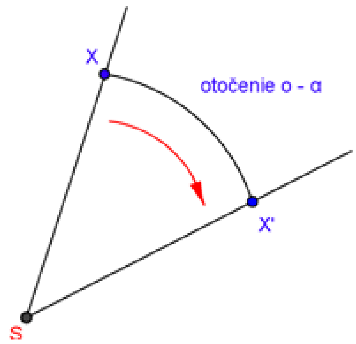
Ak splývajú polpriamky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ rozumieme základnou veľkosťou orientovaného uhla $AVB$ veľkosť nulového uhla.




Nech je daný bod $S$ a veľkosť orientovaného uhla $\alpha$. *Otočenie (rotácia)* určené bodom $S$ a uhlom $\alpha$ je zobrazenie $R(S, \alpha)$, ktoré každému bodu $X$ priraďuje bod $X'$ tak, že platí: $|SX| = |SX'|$a orientovaný uhol $XSX'$ je zhodný s orientovaným uhlom $\alpha$.

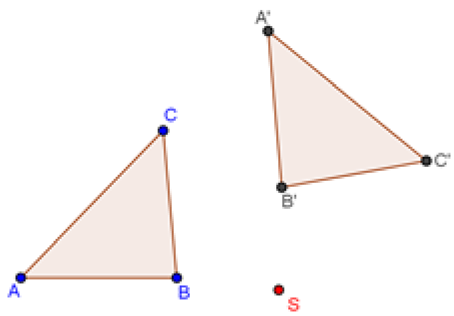



Otočenie je jednoznačne určené stredom a uhlom otáčania. Označenie otočenia: $R(S, \alpha): X \to X'$.

Vlastnosti otočenia:

- Otočenia pre veľkosť uhla otočenia $\alpha \neq k\pi, k \in R$ nie je involutorným zobrazením.
- Samodružným bodom otočenia je iba bod $S$.
- Otočenie nemá samodružnú priamku pre veľkosť uhla otočenia $\alpha \neq k\pi, k \in R$.
- Otočenie je priama zhodnosť.



- Obrazom ľubovoľnej priamky *p* v otočení so stredom S o uhol $\alpha$ je priamka $p'$ rôznobežná s priamkou *p*, pričom vrcholové uhly, ktoré určujú priamky *p*, $p'$, majú veľkosť $\alpha$.

*Poznámka.* Otočenie útvaru so stredom *S* a uhlom $180°$ môžeme nahradiť stredovou súmernosťou so stredom *S*. Vyskúšajte to sami na ľubovoľnom útvare.

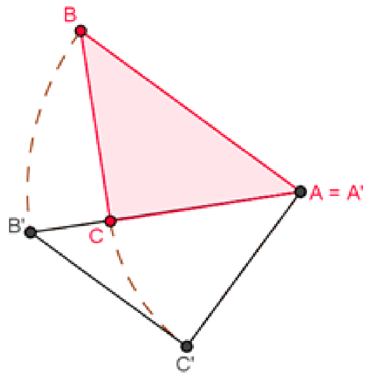
*Príklad 4.*

Otočte rovnoramenný pravouhlý trojuholník *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C* okolo bodu *A* o uhol $45°$.

*Riešenie:*

$R(A, 45°): ABC \rightarrow A'B'C'$.

Na zostrojenie otočeného trojuholníka $A'B'C'$ využijeme jednotlivé vrcholy trojuholníka, ktoré postupne budeme otáčať okolo stredu *A* o uhol $45°$. Podľa vlastnosti, že samodružným bodom otočenia je iba stred otočenia, vrchol *A* bude samodružným bodom otočenia $(A = A')$. Zvyšné body *B*, *C* otočíme podľa popisu z definície otočenia, a keďže uhol otočenia je kladné číslo, tak otáčame proti smeru hodinových ručičiek. To znamená, že vedieme polpriamku bodom *A* tak, že uhol polpriamok $|\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'})| = 45°$, a tiež platí $|AB| = |AB'|$. Podobne otočíme aj vrchol *C*.




## 2.7 Podobné zobrazenia v rovine. Podobnosť trojuholníkov

Podobné zobrazenie je zvláštnym prípadom zobrazenia.

Zobrazenie *f* množiny *M* do množiny *M´* sa nazýva *podobné (podobnosťou)* s koeficientom $k \in R^+$ práve vtedy, keď dvom navzájom rôznym bodom *X*, *Y* priradí dva navzájom rôzne body X´, Y´ tak, že platí $\frac{|X'Y'|}{|XY|} = k$. Daný vzťah vieme vysvetliť aj tak, že podobné zobrazenie zachováva pomer dĺžok úsečiek.

Body *X, Y* nazývame vzory, body *X´, Y´* sú ich obrazy. Pre podobnosť útvarov *U*, *U´* sa používa označenie: $U \sim U´$.

V definícii uvedený zápis $k \in R^+$ znamená, že číslo $k$ je reálne a kladné (teda nemôže byť záporné alebo 0). Dôvod je jednoduchý – počítame s dĺžkami úsečiek a každá dĺžka úsečky je vyjadrená kladným číslom.

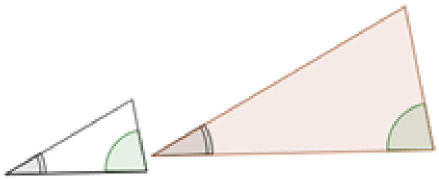
Číslo *k* sa nazýva *koeficient podobnosti* a môže nadobúdať hodnoty:

- $k > 1$, potom hovoríme, že ide o zväčšenie (obraz je „väčší" ako vzor),
- $k = 1$, potom hovoríme, že ide o zhodnosť (teda obraz a vzor sú rovnako „veľké"), platí teda, že zhodnosť je len špeciálnym prípadom podobnosti,
- $k < 1$, potom hovoríme, že ide o zmenšenie (teda obraz je menší ako vzor).

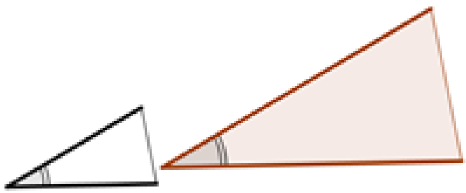
*Poznámka.* Hodnota koeficientu podobnosti *k* závisí od toho, ktorý útvar považujeme za vzor, a ktorý za obraz.

Platia vety:

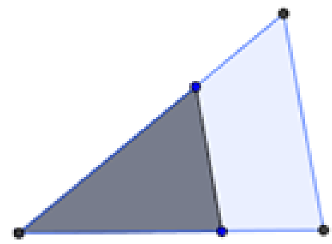
- Ak sú dva útvary podobné, potom sebe odpovedajúce uhly sú zhodné.
- Trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch (veta uu).



- Trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v uhle a v pomere strán ležiacich na jeho ramenách (veta sus).

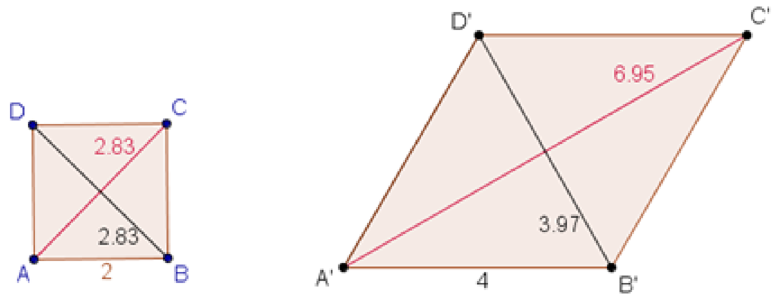


- Trojuholníky sú podobné, ak sú odpovedajúce si strany úmerné (veta sss).



*Príklad 5.*

Na obrázku sú uvedené dva útvary – štvorec *ABCD* so stranou dĺžky 2 cm a kosoštvorec *A´B´C´D´* so stranou dĺžky 4 cm. Dĺžky uhlopriečok sú vyznačené na obrázku. Zistite, či sú tieto útvary podobné.




*Riešenie:*

Najskôr vypočítame pomer podobnosti *k*:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{4}{2}=2,\frac{|B'C'|}{|BC|}=\frac{4}{2}=2,\frac{|C'D'|}{|CD|}=\frac{4}{2}=2,\frac{|A'D'|}{|AD|}=\frac{4}{2}=2,$$

pre pomer dĺžok uhlopriečok platí:

$$\frac{|A'C'|}{|AC|}=\frac{6{,}95}{2{,}83}=2{,}45$$

Z uvedeného vyplýva, že útvary nie sú podobné, pretože nemajú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si úsečiek. Našli sme iný pomer pre dĺžky uhlopriečok $A'C', AC$, podobne sme mohli uvažovať o dĺžkach uhlopriečok $B'D', BD$, kde by bol pomer *k* iný než 2.

*Príklad 6.*

K danému trojuholníku $KLM$ s dĺžkami strán *6 cm, 4 cm, 6 cm* zostrojte dva podobné trojuholníky $K'L'M', K''L''M''$ postupne s koeficientmi $k'=\frac{1}{2}, k''=\frac{3}{2}$. Sú trojuholníky $K'L'M', K''L''M''$ tiež podobné?

*Riešenie:*

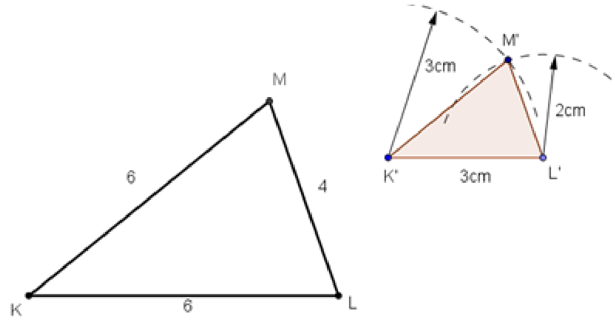
Vypočítame najskôr dĺžky strán $K'L', L'M', K'M'$. Platí:

$$\frac{|K'L'|}{|KL|}=k'=\frac{1}{2}\Rightarrow|K'L'|=\frac{1}{2}|KL|=3\ cm$$

$$\frac{|L'M'|}{|LM|}=k'=\frac{1}{2}\Rightarrow|L'M'|=\frac{1}{2}|LM|=2\ cm$$

$$\frac{|K'M'|}{|KM|}=k'=\frac{1}{2}\Rightarrow|K'M'|=\frac{1}{2}|KM|=3\ cm$$

Trojuholník $K'L'M'$ má polovičné dĺžky strán ako trojuholník $KLM$. Zostrojíme trojuholník so stranami 3 cm, 2 cm, 3 cm.

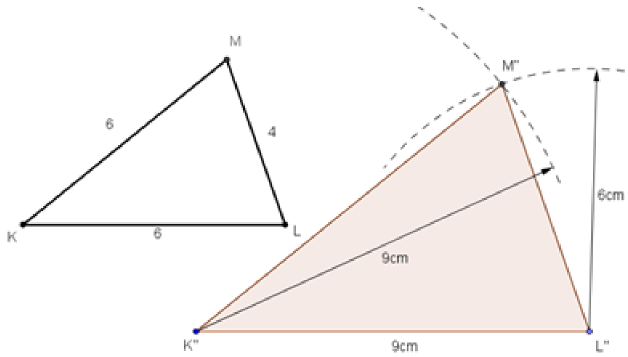



Pre trojuholník $K´´L´´M´´$ platí:

$$\frac{|K´´L´´|}{|KL|} = k´´ = \frac{3}{2} \Rightarrow |K´´L´´| = \frac{3}{2}|KL| = 9\ cm$$

$$\frac{|L´´M´´|}{|LM|} = k´´ = \frac{3}{2} \Rightarrow |L´´M´´| = \frac{3}{2}|LM| = 6\ cm$$

$$\frac{|K´´M´´|}{|KM|} = k´´ = \frac{3}{2} \Rightarrow |K´´M´´| = \frac{3}{2}|KM| = 9\ cm$$




Z uvedených výpočtov je možné vidieť, že v prvom prípade ide o zmenšenie a v druhom o zväčšenie. Trojuholníky $K´L´M´, K´´L´´M´´$ sú tiež podobné $(K´L´M´ \sim K´´L´´M´´)$ pretože:

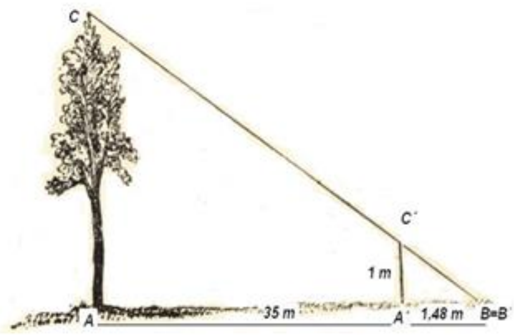
$$\frac{|K´´L´´|}{|K´L´|} = \frac{|L´´M´´|}{|L´M´|} = \frac{|K´´M´´|}{|K´M´|} = \frac{9}{3} = \frac{6}{2} = 3.$$

*Príklad 7.*

Tieň stromu má dĺžku 35 m, tieň kolmej metrovej tyče má v tom istom čase dĺžku 148 cm. Vypočítajte výšku stromu, ak slnečné lúče považujeme za rovnobežné.

*Riešenie:*

Označíme si trojuholníky *ABC, A´B´C´*, ktoré sú podobné podľa vety uu, a tiež $B = B´$.




Platí:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

$$\frac{1{,}48}{35} = \frac{1}{|AC|} \Rightarrow |AC| = 23{,}65\ m.$$

Strom je vysoký 23,65 m.

*Príklad 8.*

Vypočítajte výmeru obdĺžnikového pozemku s rozmermi v pomere 1:2 na pláne v mierke 1:3000, ak v skutočnosti má pozemok 18 ha.

*Riešenie:*

Označme strany pozemku v skutočnosti ako $a', b'$, pričom tento obdĺžnik je podobný obdĺžniku so stranami $a, b$. Zo zadania vieme, že platí: $a' = 2b'$ a vypočítame teda skutočné rozmery pozemku nasledovne:

$$S' = 180000\ m^2 = a'.b' = 2.(b')^2$$

$$9.10000\ m^2 = (b')^2$$

$$b' = 300\ m$$

Z uvedeného vyplýva, že pozemok má rozmery 300 m a 600 m. Keďže pozemok v skutočnosti je podobný pozemku, ktorý je zakreslený na mape s mierkou 1:3000, platí 1 mm na mape zodpovedá 3000 mm v skutočnosti, potom

$$\frac{1}{3000} = \frac{a}{300.1000} \Rightarrow a = 100\ mm.$$

Odtiaľ vyplýva, že pre druhý rozmer pozemku je $b = 200\ mm$. Obsah obdĺžnikového pozemku na mape je $S = a.b = 200\ cm^2$.

Príkladom podobného zobrazenia v rovine je *rovnoľahlosť*, ktoré má všetky vlastnosti podobného zobrazenia (uvádzame ich v úvode tejto podkapitoly), ale naviac má takú vlastnosť, že v zobrazení sebe odpovedajúce si priamky (resp. úsečky) sú vždy rovnobežné.

V rovine je daný bod $S$ a $\chi \in R, \chi \neq 0, \chi \neq 1$. Ku každému bodu $X$ (vzor) roviny zostrojíme bod $X'$ (obraz) podľa predpisu:

- Ak $X = S$, potom $X' = S$,
- Ak $X \neq S$, zostrojíme bod $X'$ na priamke $\overleftrightarrow{SX}$ tak, aby pre dĺžky úsečiek $SX', SX$ platil vzťah $\frac{|SX'|}{|SX|} = |\chi|$, pričom, ak $\chi > 0$, zostrojíme bod $X'$ na polpriamke $\overrightarrow{SX}$, ak ale $\chi < 0$, zostrojíme bod $X'$ na opačnej polpriamke k $\overrightarrow{SX}$.

Bod $S$ nazývame *stred rovnoľahlosti*, reálne číslo $\chi$ *koeficientom rovnoľahlosti*.

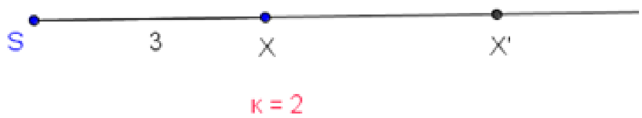
Označenie rovnoľahlosti so stredom $S$ a koeficientom rovnoľahlosti $\chi$: $H(S, \chi)$: $X \rightarrow X'$.

*Príklad 9.*

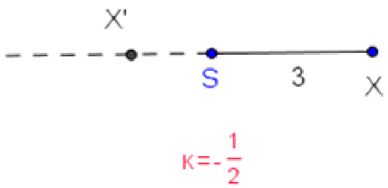
Zobrazte bod X v rovnoľahlosti danej stredom rovnoľahlosti S $(X \neq S)$ a koeficientami $\chi = 2, \chi = -\frac{1}{2}$.

Riešenie:

Keďže $\chi = 2 > 0$, leží bod $X'$ na polpriamke $\overrightarrow{SX}$. Zostrojíme teda polpriamku $\overrightarrow{SX}$ a odmeriame vzdialenosť bodov $S, X$. Zvolili sme si $|SX| = 3\ cm$. Vypočítame vzdialenosť $|SX'| = |SX|.|\chi| = 3.2 = 6\ cm$. Bod $X'$ leží vo vzdialenosti 6 cm od bodu $S$ na polpriamke $\overrightarrow{SX}$.




V druhom prípade je $\chi = -\frac{1}{2}$. Keďže $\chi = -\frac{1}{2} < 0$, leží bod $X'$ na opačnej polpriamke k polpriamke $\overrightarrow{SX}$. Zostrojíme opačnú polpriamku k polpriamke $\overrightarrow{SX}$ a odmeriame vzdialenosť bodov $S, X$. Aj v tomto prípade sme si zvolili $|SX| = 3\ cm$. Vypočítame vzdialenosť $|SX'| = |SX|.|\chi| = 3.\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}\ cm$. Bod $X'$ leží vo vzdialenosti 1,5 cm od bodu $S$ na opačnej polpriamke k $\overrightarrow{SX}$.



*Úlohy na precvičenie*

1. Dané sú dva štvorce *ABCD, A´B´C´D´* s dĺžkami strán 2cm a 5cm. Zistite, či sú podobné.
2. Dané sú dve kružnice $k(S_1, 3\ cm), l(S_2, 3\ cm)$. Zistite, či sú podobné.
3. Štvorec má dĺžku strany $a = 2\ cm$. Zostrojte podobný štvorec s koeficientom podobnosti $k = 1{,}5$. Ide o zväčšenie?
4. Stredy strán kosoštvorca sú vrcholy rovnobežníka. Sú tieto útvary podobné?
5. Trojuholník *ABC* má vnútorné uhly veľkosti $\alpha = 30°, \gamma = 45°$. Trojuholník *KLM* má vnútorné uhly $\kappa = 105°, \lambda = 30°$. Sú podobné?
6. Rozhodnite, či sú trojuholníky *ABC, A´B´C´* podobné, ak $a = \frac{5}{3}, b = \frac{11}{6}, \gamma = 70°; a´ = \frac{5}{2}, b´ = \frac{11}{4}, \gamma´ = 70°$.
7. Vypočítajte výmeru pozemku, ktorý je na mape v mierke $1{:}\,10000$ zobrazený plochou $13{,}4\ cm^2$.
8. Budova školy vrhá tieň na rovinu dvora 16 m dlhý a v tom istom čase zvislá metrová tyč vrhá tieň 132 cm dlhý. Zistite výšku budovy školy.
9. Priama cesta rovnomerne stúpa na každých dvoch metroch o 46 cm. O koľko metrov stúpne cesta na vzdialenosti 270 m?
10. Nástupište lanovky, ktorá rovnomerne stúpa, je vzdialené 4200 m od jej cieľového miesta a postavené je o 180 m nižšie. Ako ďaleko od nástupišťa je cestujúci, ak sa nachádza vo výške 50 m nad zemou?
11. Narysujte rovnostranný trojuholník *ABC* so stranou $a = 3{,}5\ cm$. Zvoľte v jeho vnútri bod $M$ a zostrojte rovnoľahlý trojuholník $A´B´C´$ podľa stredu $M$ a s koeficientom $\chi = -\frac{3}{2}$.

## 2.8 Riešenie konštrukčných úloh metódou zhodných a podobných zobrazení

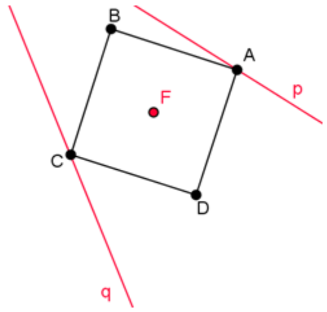
Nasledujúca kapitola bude obsahovať riešené konštrukčné úlohy s využitím metód stredovej súmernosti, osovej súmernosti, otočenia, posunutia, ale aj podobnosti a rovnoľahlosti. Úlohy budú riešené s prihliadaným na jednotlivé fázy riešenia – náčrt, rozbor, postup konštrukcie, konštrukcia, skúška, diskusia, nevyhnutných pri riešení konštrukčných úloh.

*Príklad 10.*

Dané sú dve rôznobežné priamky *p, q* a bod *F*, ktorý neleží na priamkach. Zostrojte štvorec *ABCD* so stredom *F* tak, aby bod *A* patril priamke *p* a bod *C* priamke *q*.

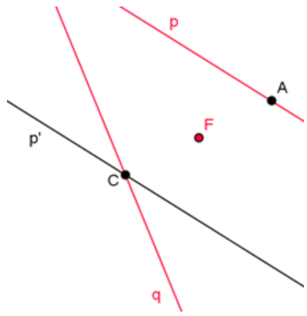
*Riešenie:*

Náčrt




Rozbor

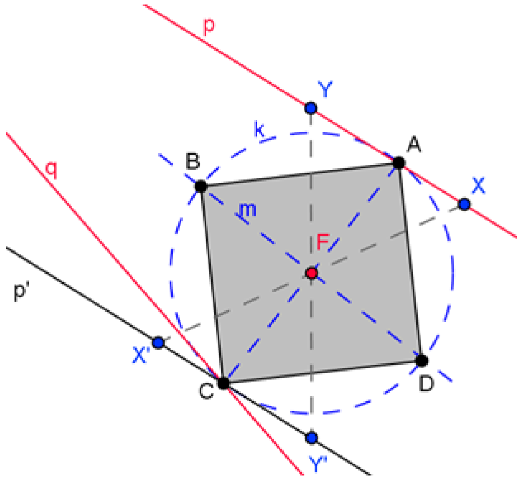
Keď nájdeme z hľadaného štvorca bod *A* alebo bod *C*, tak daný štvorec *ABCD* vieme zostrojiť. Nech máme napríklad bod *A*, ktorý patrí priamke *p*. Potom bod *C* je obrazom bodu *A* v stredovej súmernosti podľa bodu *F*. Tiež platí: bod *A* leží na priamke *p*, tak bod *C* bude ležať na obraze priamky *p´* v stredovej súmernosti podľa bodu *F.* Zo zadania úlohy má teda bod *C* ležať na priamke *q* a zároveň na priamke *p´*.




Postup konštrukcie

1. $p, q, F$
2. $p´; S(F): p \rightarrow p´$
3. $C; C \in q \cap p´$
4. $A; S(F): C \rightarrow A$
5. $k; k(F, |AF|)$
6. $m; F \in m, m \perp \overleftrightarrow{AC}$
7. $B, D; k \cap m = \{B, S\}$
8. $ABCD$

Konštrukcia



Skúška

Vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia

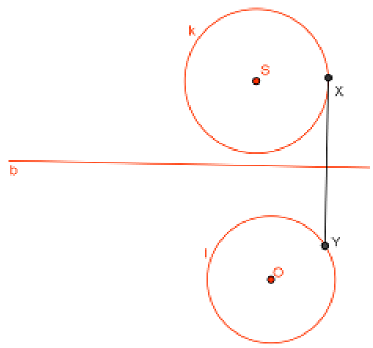
Všetky kroky konštrukcie sú jednoznačné. Úloha má jedno riešenie.

*Príklad 11.*

Daná je priamka *b* a kružnice *k*, *l*. Zostrojte úsečku *XY* tak, aby bod *X* patril kružnici *k*, bod *Y* patril kružnici *l*, stred úsečky *XY* bol bodom priamky *b*, a aby úsečka *XY* bola kolmá na priamku *b*.

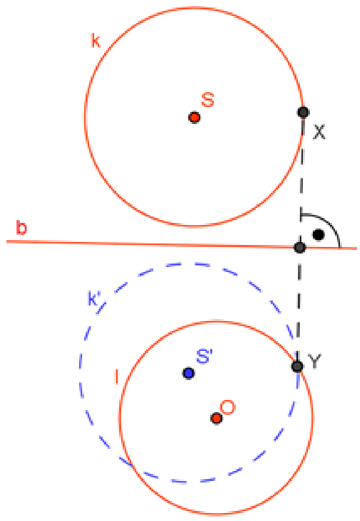
*Riešenie:*

Náčrt




Rozbor

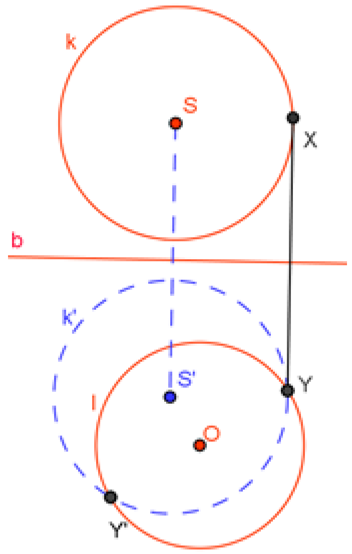
Ak nájdeme bod *X* alebo *Y* podľa podmienok zo zadania úlohy, úsečku *XY* vieme zostrojiť. Nech napríklad máme bod *X*, potom bod *Y* je jeho obraz v osovej súmernosti podľa priamky *b*. Keďže bod *X* leží na kružnici *k*, tak bod *Y* musí ležať na obraze *k´* kružnici *k*, a tiež bod *Y* leží na kružnici *l*.



Postup konštrukcie

1. $b, k, l$
2. $k´; S(b): k \to k´$
3. $Y; Y \in k´ \cap l$
4. $X; S(b): Y \to X$
5. $XY$

Konštrukcia




Skúška

Vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia

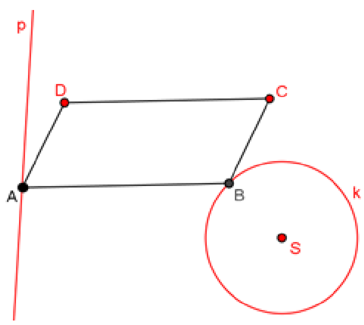
Úloha má najviac dve riešenia, pretože sa kružnice *k´* a *l* pretnú maximálne v dvoch bodoch.

*Príklad 12.*

Daná je priamka *p*, kružnica *k* a body *C*, *D*. Zostrojte rovnobežník *ABCD*, ak bod *A* patrí priamke *p*, bod *B* patrí kružnici *k*.

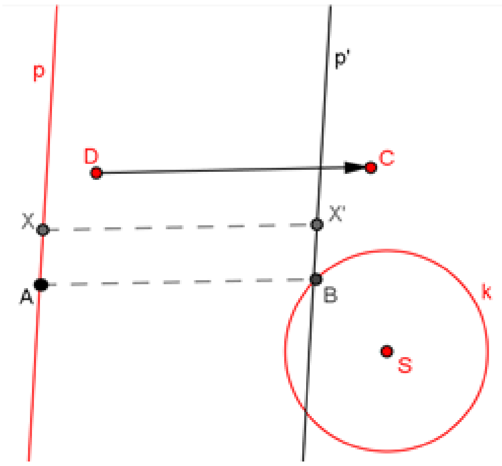
*Riešenie:*

Náčrt




Rozbor

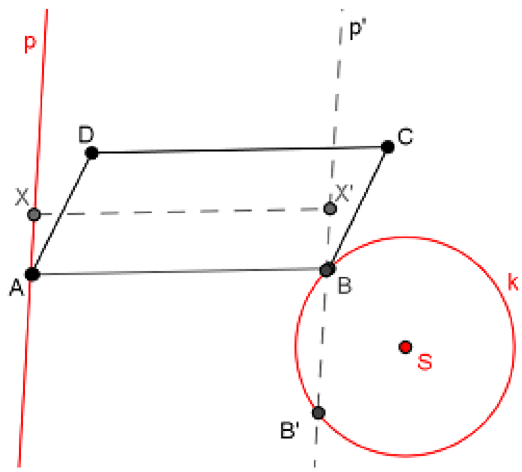
Predpokladajme, že daný rovnobežník *ABCD* máme zostrojený. Keďže máme body *C, D* a strany *AB, CD* rovnobežníka sú navzájom rovnobežné, tak posunutie v smere orientovanej úsečky $\overrightarrow{DC}$ zobrazí bod *A* do bodu *B*. Posunieme preto v smere orientovanej úsečky $\overrightarrow{DC}$ priamku *p*, jej obrazom je priamka *p´*. Bod *B* musí teda ležať aj na priamke *p´*, aj na kružnici *k*.




Postup konštrukcie

1. $p, k, C, D$
2. $p´; T(\overrightarrow{DC}): p \to p´$
3. $B; B \in p´ \cap k$
4. $A; T(\overrightarrow{CD}): B \to A$
5. $ABCD$

Konštrukcia




Skúška

Vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia

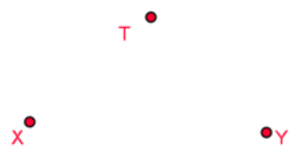
Počet riešení závisí od počtu priesečníkov priamky *p´* a kružnice *k*. Úloha má dve riešenia.

*Príklad 13.*

Z pravidelného šesťuholníka *ABCDEF* zostali len body *T*, *X*, *Y*, pričom bod *T* je stredom šesťuholníka a body *X*, *Y* sú postupne body patriace stranám *AB*, *CD* daného šesťuholníka *ABCDEF*.

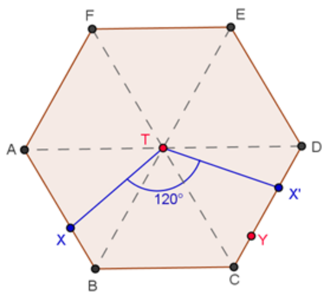
*Riešenie:*

Náčrt




Rozbor

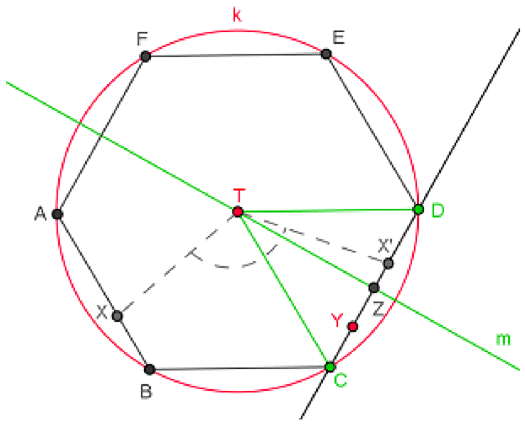
Šesťuholník môžeme otáčať okolo jeho stredu *T* postupne o $60°, 120°, 180°, 240°, 300°$ a vtedy sa zobrazí sám do seba. (Vieme to preto, že šesťuholník vieme rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov, t. j. vnútorné uhly majú veľkosť $60°$). Keďže body *X, Y* ležia na stranách *AB, CD*, vyberieme také otočenie okolo bodu *T*, aby sa otočil bod *X* do bodu *X´*, teda strana *AB* na stranu *CD*. Uhol otočenia bude $120°$. Obrazom bodu *X* v danom otočení je bod *X´*, ktorý sa zobrazí na úsečku *CD*. Potom na priamke $\overleftrightarrow{YX'}$ leží aj úsečka *CD*.




Postup konštrukcie

1. $T, X, Y$
2. $X'; R(T, 120°): X \to X'$
3. $m; T \in m, m \perp \overleftrightarrow{YX'}$
4. $Z; Z \in m \cap \overleftrightarrow{YX'}$
5. $C, D; C \in \overleftrightarrow{YX'}, D \in \overleftrightarrow{YX'}, |\sphericalangle CTZ| = |\sphericalangle DTZ| = 30°$
6. $k; k(T, |TC|)$
7. $ABCDEF$

Konštrukcia




Skúška

Vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia

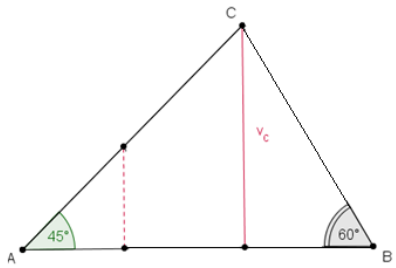
Úloha má jedno riešenie.

*Príklad 14.*

Zostrojte trojuholník $ABC$, ak poznáte $\alpha = 45°, \beta = 60°, v_c = 5\ cm$.

*Riešenie:*

Náčrt



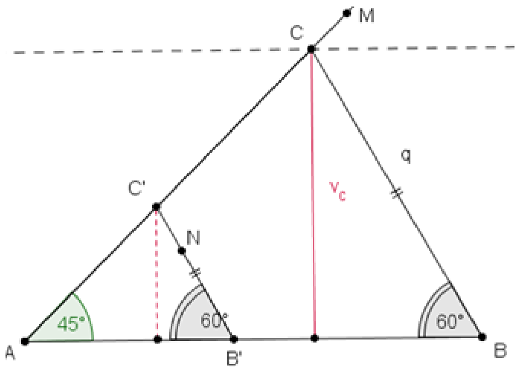

Rozbor

Ak poznáme dva vnútorné uhly $\alpha, \beta$, vedeli by sme zostrojiť nekonečne mnoho trojuholníkov, ktoré by mali tieto veľkosti uhlov, ale nemali by predpísanú výšku $v_c = 5\ cm$. Zostrojíme jeden pomocný trojuholník $AB'C'$ s vnútornými uhlami $\alpha = 45°, \beta = 60°$. Ľubovoľne zostrojíme úsečku $A'B'$a dve polpriamky $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'N}$ tak, že $|\sphericalangle B'AM| = 45°$, $|\sphericalangle AB'N| = 60°$. Bod $C'$ je prienikom polpriamok $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'N}$. Pre trojuholníky $AB'C', ABC$ bude platiť, že sú podľa vety *uu* podobné. Vo vzdialenosti $v_c = 5\ cm$ zostrojíme priamku $p$ rovnobežnú s $A'B'$. Bod $C$ je prienikom polpriamky $\overrightarrow{AM}$ a priamky $p$. Rovnobežka s úsečkou $B'C'$ prechádzajúca bodom $C$ určí bod $B$.

Postup konštrukcie

1. $AB'$; $|AB|' - ľubovoľne$
2. $\overrightarrow{AM}$; $|\sphericalangle B'AM| = 45°$
3. $\overrightarrow{B'N}$; $|\sphericalangle AB'N| = 60°$
4. $C'$; $C' \in \overrightarrow{AM} \cap \overrightarrow{B'N}$
5. $AB'C'$
6. $p; p \parallel \overrightarrow{AB'}, |p, \overrightarrow{AB'}| = 5\ cm$
7. $C; C \in p \cap \overrightarrow{AM}$
8. $q; q \parallel B'C', C \in q$
9. $B; B \in q \cap \overrightarrow{AB'}$
10. $ABC$

Konštrukcia




Skúška

Trojuholník $ABC$ má vnútorný uhol pri vrchole $B$ veľkosť $\beta = 60°$, pretože $q \parallel B'C'$. Pri vrchole $A$ je zase uhol veľkosti $\alpha = 45°$, pretože $|\sphericalangle B'AM| = 45°$. Trojuholník $ABC$ má výšku $v_c = 5\ cm$, pretože $|p, AB| = 5\ cm$.

Diskusia

Úloha má jedno riešenie, lebo pomocný trojuholník $AB'C'$ je podľa vety *usu* zostrojený jednoznačne a prienik priamok $q, \overrightarrow{AB'}$ je len jeden bod $B$.

*Príklad 15.*

Do daného trojuholníka *ABC* vpíšte štvorec *KLMN* tak, aby strana *KL* ležala na strane *AB*, bod *M* ležal na strane *BC* a bod *N* na strane *AC*.

*Riešenie:*

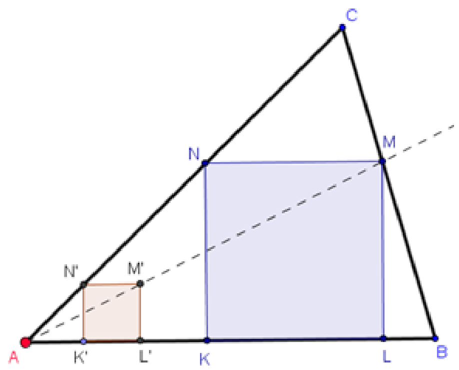
Rozbor

Na konštrukciu štvorec $KLMN$ sú uvedené viaceré podmienky. Zanedbáme podmienku, aby bod $M$ ležal na strane $BC$. V tomto prípade vieme zostrojiť veľa pomocných štvorcov $K'L'M'N'$ tak, aby jeho strana $K'L'$ ležala na strane $AB$, bod $N'$ patrí strane $AC$. Ak použijeme rovnoľahlosť so stredom vo vrchole $A$ trojuholníka $ABC$, potom zobrazíme pomocný štvorec $K'L'M'N'$ do hľadaného štvorca $KLMN$ tak, že $M \in \overrightarrow{AM'} \cap BC$.

Postup konštrukcie

1. $ABC$
2. $K'L'M'N' - pomocný\ štvorec$
3. $M; M \in \overrightarrow{AM'} \cap BC$
4. $KLMN$

Konštrukcia




Skúška

Zostrojený štvorec *KLMN* spĺňa podmienky zo zadania úlohy.

Diskusia

Úloha má najviac jedno riešenie. Ak je trojuholník *ABC* tupouhlý s tupým uhlom vo vrchole *A*, úloha nemá riešenie, pretože strana *KL* by neležala na strane *AB*, ale na priamke $\overleftrightarrow{AB}$.

*Úlohy na precvičenie*

1. Daná je priamka *p*, kružnica *k* a dva rôzne body *S*, *O.* Zostrojte trojuholník *ABC* tak, aby bod *A* ležal na priamke *p*, bod *B* na kružnici *k* a body *S*, *O* boli postupne stredmi strán *AC*, *BC* trojuholníka *ABC*.

2. Body *X*, *Y*, *V* patria stranám postupne ležiacich na priamkach $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}$ obdĺžnika *ABCD* a bod *Z* je priesečník uhlopriečok daného obdĺžnika. Zostrojte obdĺžnik *ABCD*.

3. Dané sú dve sústredné kružnice *k*, *l* a bod *S*, ktorý leží na kružnici s menším polomerom. Zostrojte rovnobežník so stredom *S*, ktorého vrcholy ležia na daných kružniciach *k*, *l*.

4. Dané sú dve kružnice *k*, *l* a priamka *p*. Zostrojte rovnostranný trojuholník *ABC*, ktorého ťažnica $t_c$ leží na priamke *p* a vrcholy *A*, *B* ležia postupne na kružniciach *k*, *l*.

5. Daná je priamka *p* a dva rôzne body *A*, *B*, ktoré ležia v jednej z polrovín s hraničnou priamkou *p*. Nájdite bod *X* na priamke *p*, aby súčet úsečiek *AX*, *BX* bol minimálny.

6. Dané sú dve rovnobežné priamky *x*, *y* a priamka *z* s nimi rôznobežná. Zostrojte štvorec *XYZV*, ktorého vrchol *X* leží na priamke *x*, vrchol *Z* na priamke *z* a uhlopriečka *YV* je časťou priamky *y*.

7. Dané sú dve kružnice *k*, *l*, priamka *p* a úsečka *AB*. Zostrojte priamku *q* rovnobežnú s priamkou *p* tak, aby vzdialenosť medzi jej priesečníkmi s kružnicami *k*, *l* bola rovná dĺžke úsečky *AB*.

8. Dané sú rôznobežné priamky *x*, *y*, *z* a kladné číslo *w*. Zostrojte také body *X*, *Y*, ktoré ležia postupne na priamkach *x*, *y* tak, aby priamka $\overleftrightarrow{XY}$ bola rovnobežná s priamkou *z* a dĺžka úsečky *XY* sa rovnala číslu *w*.

9. Dané sú dve rôznobežné priamky *p*, *q*, bod *T* a rovnoramenný trojuholník *KLM*. Zostrojte trojuholník *TUV* podobný s trojuholníkom *KLM* tak, aby bod *U* patril priamke *p* a bod *V* patril priamke *q*.

10. Zostrojte rovnostranný trojuholník *ABC*, ktorého vrcholy ležia na troch rovnobežných priamkach.

11. Daná je kružnica *k* a dva rôzne body *P*, *Q*. Zostrojte dve rovnobežné priamky *p*, *q* prechádzajúce postupne bodmi *P*, *Q* tak, aby pretínali kružnicu *k* v bodoch *X*, *Y* ohraničujúcich štvrtinu kružnice.

12. Zostrojte trojuholník $ABC$, ak poznáte $\alpha = 60°, \beta = 45°, t_c = 6\ cm$.

13. Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ak poznáte $a = 5\ cm, e\colon f = 3\colon 4$.

14. Do polkruhu s priemerom $AB$ vpíšte štvorec $KLMN$ tak, aby strana štvorca $KL$ ležala na $AB$.

15. Danému ostrouhlému trojuholníku $ABC$ vpíšte obdĺžnik $KLMN$, ktorého strany sú v pomere $3\colon 2$ tak, aby strana $MN$ ležala na strane $BC$.

16. Vpíšte do daného uhla $AVB$ kružnicu, ktorá prechádza bodom $M$.

# 3 Základné vety stereometrie. Polohové a metrické vlastnosti lineárnych útvarov v priestore

V tretej kapitole sa budeme venovať rovnobežnému premietania z pohľadu jeho definovania a popisu vlastností. Uvedieme najdôležitejšie pojmy a vlastnosti súvisiace s výkladom danej problematiky. Taktiež sme v kapitole spracovali problematiku súvisiacu so zisťovaním polohových a metrických vlastností rôznych lineárnych geometrických útvarov v priestore. Popísané vlastnosti geometrických útvarov budeme demonštrovať aj konkrétnymi príkladmi, ktoré sú vhodne doplnené aj o názorné obrázky.

## 3.1 Voľné rovnobežné premietanie

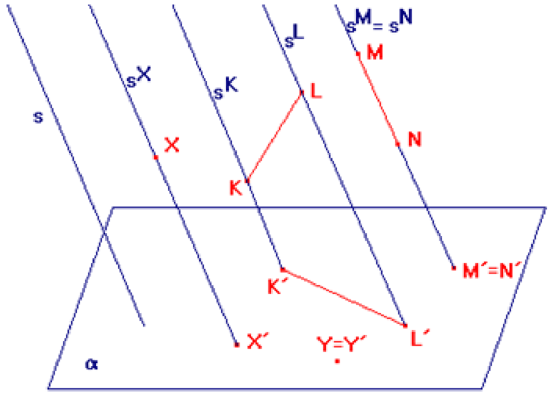
Medzi najpoužívanejšiu metódu zobrazovania v sekundárnom matematickom vzdelávaní patrí voľné rovnobežné premietanie. Ako teda správne znázorniť trojrozmerné teleso v rovine s využitím uvedenej metódy?

Pri riešení úloh v priestore majú významnú úlohu obrázky a náčrtky, a preto treba vedieť s nimi aj pracovať. Priemetom geometrického útvaru vo voľnom rovnobežnom premietaní je geometrický útvar, ktorý pozostáva z rovnobežných priemetov významných bodov zobrazovaného útvaru.

Základom zobrazovania geometrických útvarov vo voľnom voľnobežnom premietaní je rovnobežné premietanie útvaru z trojrozmerného priestoru do jednej roviny. Rovnobežné premietanie je jedna z najjednoduchších zobrazovacích metód, a pritom je dostatočne názorná. Najčastejšie sa vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazujú telesá ako kocka, kváder, kužeľ, valec, guľa a rôzne skupiny telies z nich kombinované (Rumanová a kol., 2022).

*Poznámka.* Častejšie ako rovnobežné premietanie sa v školskej praxi používa pojem voľné rovnobežné premietanie. Toto premietanie je prípadom rovnobežného premietania z priestoru do roviny, ktoré ale nie je viazané na žiadnu súradnicovú sústavu v priestore.

Uveďme definíciu rovnobežného premietania z priestoru do roviny, ktorú nazývame priemetňa. Daná je ľubovoľná priamka *s* a ľubovoľná rovina $\alpha$ (priamka *s* je rôznobežná s rovinou $\alpha$). Zobrazenie *f* z priestoru do roviny $\alpha$, ktoré priraďuje ľubovoľnému bodu *X* bod *X´*, ktorý vznikne prienikom priamky $s^X$ a roviny $\alpha$, sa nazýva *rovnobežné premietanie s daným smerom premietania s a priemetňou* $\alpha$ (pozri obrázok). Priamka $s^X$ prechádza bodom *X* a je rovnobežná so smerom premietania *s*.




V prípade, že je priamka *s* kolmá na priemetňu *α*, tak premietanie nazývame *kolmým (pravouhlým) premietaním*.

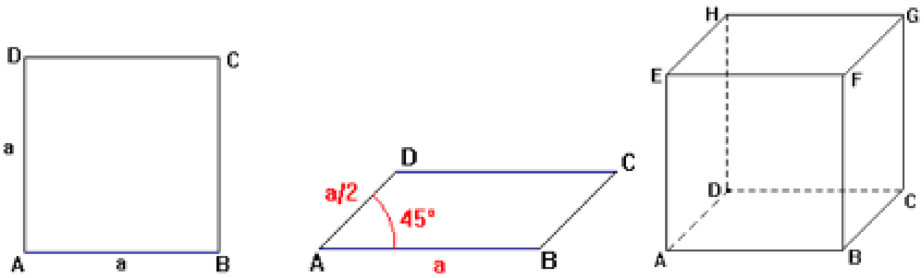
Základné vlastnosti rovnobežného premietania sú:

- Rovnobežným priemetom priamky, ktorá je rovnobežná so smerom premietania, je bod.
- Rovnobežným priemetom priamky, ktorá nie je rovnobežná so smerom premietania, je priamka.
- Rovnobežným priemetom roviny, ktorá je rovnobežná so smerom premietania, je priamka.
- Rovnobežným priemetom roviny, ktorá nie je rovnobežná so smerom premietania, je celá priemetňa.
- Rovnobežné a zhodné úsečky, ktoré nie sú rovnobežné so smerom premietania, sa v rovnobežnom premietaní zobrazia do rovnobežných a zhodných úsečiek.
- Stred úsečky sa v rovnobežnom premietaní zobrazí do stredu úsečky.
- Rovinný útvar, ktorý leží v rovine rovnobežnej s priemetňou, sa v rovnobežnom premietaní zobrazí do zhodného útvaru s daným rovinným útvarom.
- V rovnobežnom premietaní sa zachováva rovnobežnosť a usporiadanie bodov na priamke.
- Ak priamky sú navzájom kolmé (ale žiadna z nich nie je kolmá na priemetňu), tak ich priemety sú tiež kolmé priamky práve vtedy, keď je aspoň jedna z priamok rovnobežná s priemetňou.

*Poznámka*. Z vlastností rovnobežného premietania je zrejmé, že priemetom bodu je bod. Ak bod leží na priamke, tak aj jeho obraz bude potom ležať na obraze priamky. Zároveň platí, že všetky body priemetne *α* sa zobrazia samé do seba. Rovina rovnobežná s priemetňou sa nazýva priečelná rovina. O telese, ktoré má niektorú zo stien rovnobežnú s priemetňou, potom hovoríme, že je v priečelnej polohe.

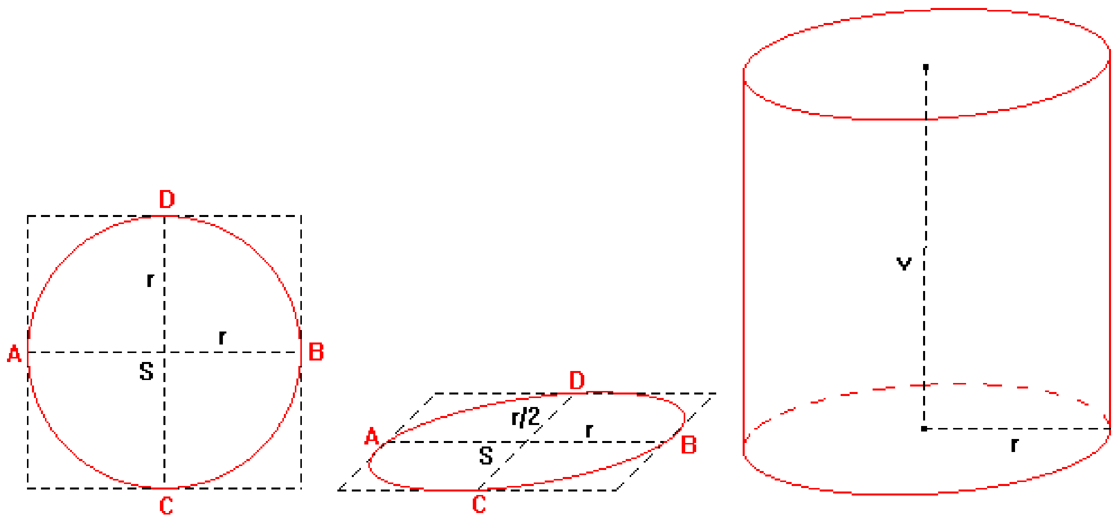
Zobrazovanie telies z priestoru do roviny by malo spĺňať zásady správnosti, názornosti, ale aj jednoduchosti. Niekedy aj správne zostrojený priemet telesa nemusí byť dostatočne názorný (nevieme zistiť vzťahy medzi jednotlivými hranami, stenami telesa alebo iné dôležité vlastnosti telesa). Ďalej popíšeme zobrazenie niektorých základných telies (priestorových geometrických útvarov) vo voľnom rovnobežnom premietaní tak, aby spĺňali všetky spomenuté zásady.

V školskej praxi sa najčastejšie používa také voľné rovnobežné premietanie, v ktorom sa úsečka kolmá na priemetňu zobrazí do úsečky, ktorá zviera uhol 45˚ s obrazom úsečky rovnobežnej s priemetňou. Dĺžka zobrazenej úsečky sa zmenší na polovicu. Na obrázku je naznačená konštrukcia kocky *ABCDEFGH* vo voľnom rovnobežnom premietaní s hranou dĺžky *a*. Priemety úsečiek *AD*, *BC*, *EH* a *FG* sú rovnobežné a rovnako dlhé úsečky.




*Poznámka.* Pohľady na teleso delíme podľa toho, ako sa na teleso pozeráme, čo u žiakov vzhľadom na ich rôzne úrovne priestorovej predstavivosti môže pri riešení geometrických úloh v priestore spôsobovať problémy. Pohľady na telesá poznáme nasledujúce: pohľad na teleso zdola (podhľad), pohľad na teleso zhora (nadhľad), pohľad zľava a pohľad sprava.

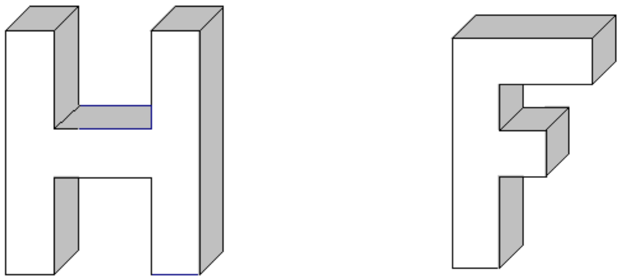
Na ďalšom obrázku je zostrojený priemet valca vo voľnom rovnobežnom premietaní s danou výškou *v* a polomerom podstavy *r*.



*Príklad 1.*

Zobrazte písmená v tvare H a F vo voľnom rovnobežnom premietaní.

*Riešenie:*

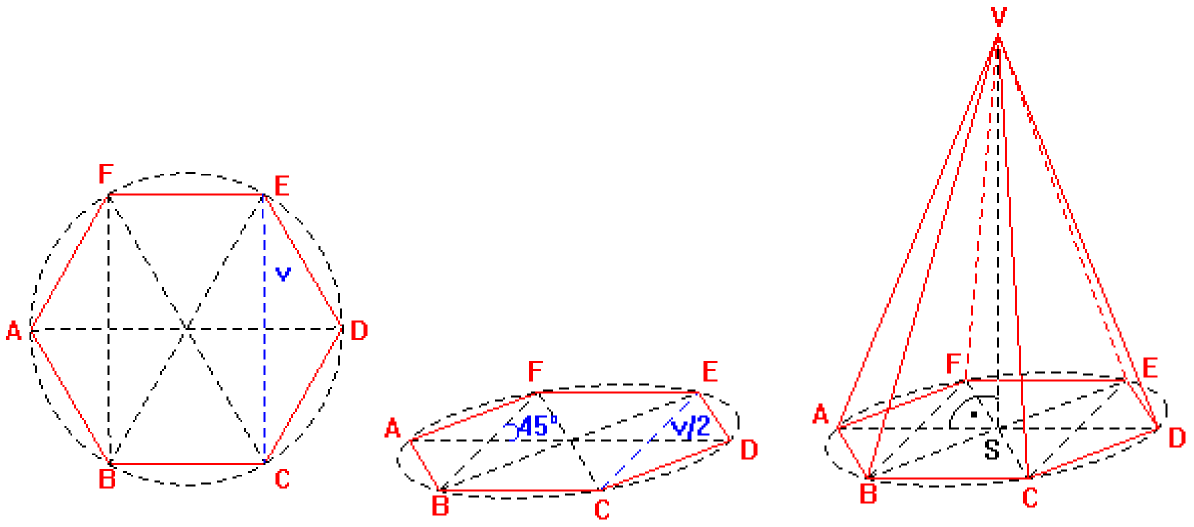


*Príklad 2.*

Zobrazte pravidelný šesťboký ihlan vo voľnom rovnobežnom premietaní, ktorého podstava leží vo vodorovnej rovine.

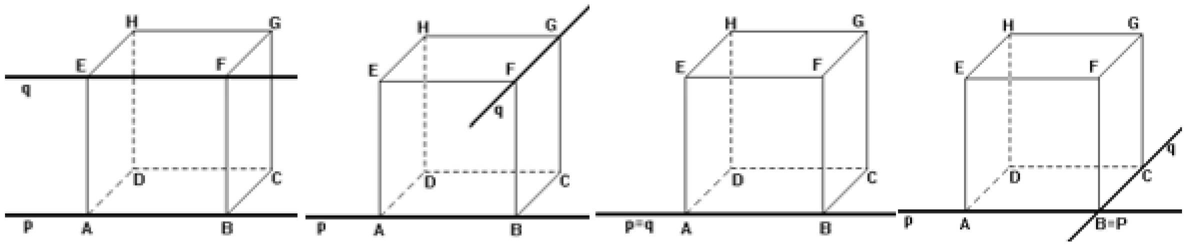
*Riešenie:*

Pri konštrukcii obrazu pravidelného šesťuholníka si treba uvedomiť vlastnosť zobrazenia vhodnej úsečky podstavy. Konštrukcia daného obrazu podstavy je zrejmá z obrázka.

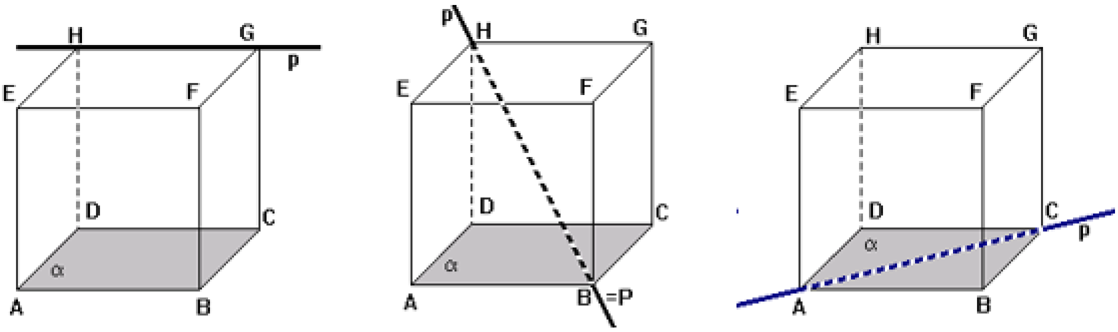



## 3.2 Polohové vlastnosti lineárnych útvarov v priestore

Pri zisťovaní vzájomnej polohy geometrických útvarov v priestore skúmame, či útvary ležia alebo neležia v spoločnej rovine a či majú spoločné body. Vzájomné polohy dvoch priamok môžeme znázorniť aj na konkrétnom telese, napríklad na kocke *ABCDEFGH*, kde vidieť, že dve priamky môžu byť *rovnobežné, mimobežné, totožné* alebo *rôznobežné*.



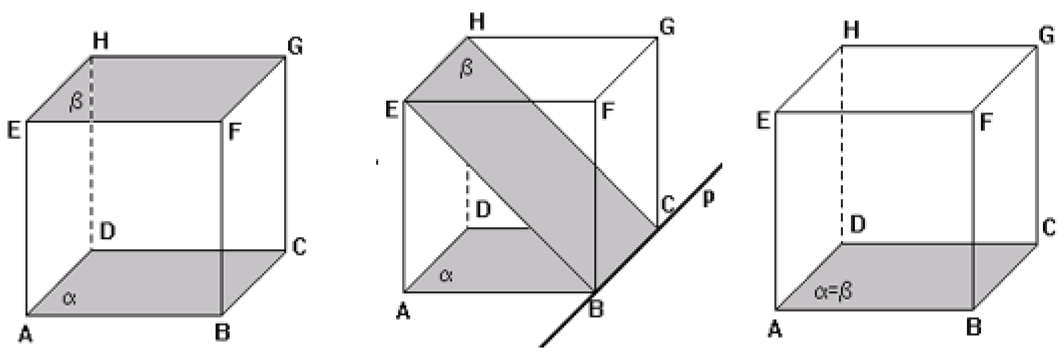

Podobne môžeme prezentovať vzájomné polohy priamky a roviny znázornením v telese, napríklad na kocke *ABCDEFGH*, kde sme zvolili rovinu $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$. Potom priamka môže byť s rovinou *rovnobežná, rôznobežná* alebo *priamka leží v rovine*.




Definícia rovnobežnosti priamky s rovinou je: „Priamka *p* je rovnobežná s rovinou $\alpha$ práve vtedy, keď s ňou nemá spoločný bod.“ Kritérium rovnobežnosti priamky s rovinou je: „Priamka *p* je rovnobežná s rovinou $\alpha$ práve vtedy, keď je priamka *p* rovnobežná s niektorou priamkou *q* roviny $\alpha$, $(p \parallel \alpha) \Leftrightarrow \exists q \subset \alpha : (p \parallel q)$.“

Uvedené kritérium aplikujeme aj na konkrétnej úlohe (pozri prvý obrázok vyššie). Priamka $p = \overleftrightarrow{HG}$ rovnobežná s rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$, pretože vieme nájsť aspoň jednu priamku z roviny $\alpha$ (napríklad priamka $q = \overleftrightarrow{CD}$), ktorá je s priamkou *p* rovnobežná. Spomenieme, že rovnobežnosť priamok *p, q* vyplýva z vlastností štvorca *CDHG*.

Vzájomné polohy dvoch rovín sú znázornené na kocke *ABCDEFGH* na ďalších jednotlivých obrázkoch. Dve roviny môžu byť *rovnobežné, rôznobežné* alebo *totožné*.

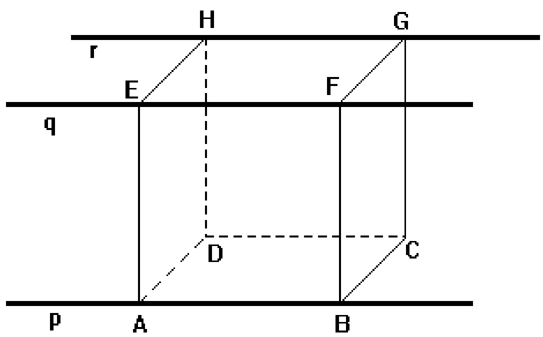


Dôležitá je aj nasledujúcu vlastnosť: „Ak majú dve roviny spoločný aspoň jeden bod, potom majú spoločnú priamku, ktorú nazývame priesečnicou alebo roviny sú totožné“.

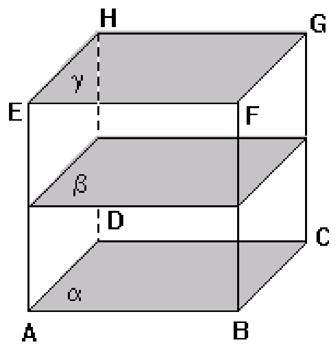
Definícia rovnobežnosti dvoch rovín je: „Dve roviny $\alpha, \beta$ sú rovnobežné práve vtedy, keď každá priamka jednej roviny je rovnobežná s druhou rovinou, $(\alpha \parallel \beta) \Leftrightarrow \forall p \subset \alpha: (p \parallel \beta)$.“ A následne vyslovíme aj kritérium rovnobežnosti dvoch rovín: „Dve roviny $\alpha, \beta$ sú rovnobežné práve vtedy, keď v rovine $\alpha$ existujú dve rôznobežné priamky *p, q*, z ktorých každá je rovnobežná s rovinou $\beta$, $(\alpha \parallel \beta) \Leftrightarrow \exists p, q \subset \alpha, p \nparallel q: (\beta \parallel p) \wedge (\beta \parallel q)$.“

Uvedieme ďalej vety o rovnobežnosti priamok a rovín aj so symbolickým zápisom a názornými obrázkami, ktoré danú vlastnosť konkrétne prezentujú:

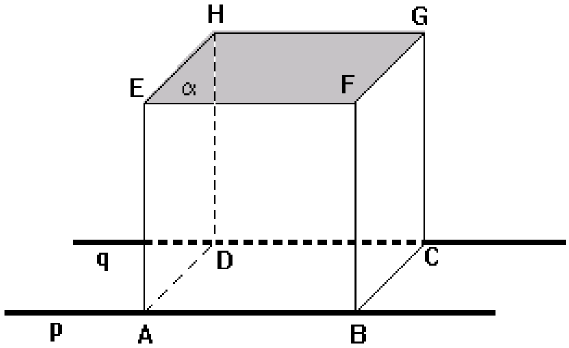
- Ak je priamka *p* rovnobežná s priamkou *q* a priamka *q* je rovnobežná s priamkou *r*, potom je priamka *p* rovnobežná aj s priamkou *r*. $\forall p, q, r \in E_3: \big((p \parallel q) \wedge (q \parallel r)\big) \Rightarrow (p \parallel r)$



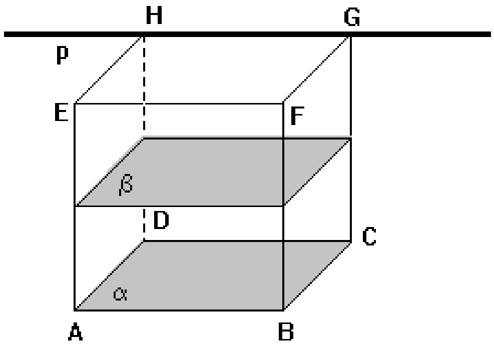

- Ak je rovina $\alpha$ rovnobežná s rovinou $\beta$ a rovina $\beta$ je rovnobežná s rovinou $\gamma$, potom je rovina $\alpha$ rovnobežná aj s rovinou $\gamma$. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in E_3: \big((\alpha \parallel \beta) \wedge (\beta \parallel \gamma)\big) \Rightarrow (\alpha \parallel \gamma)$



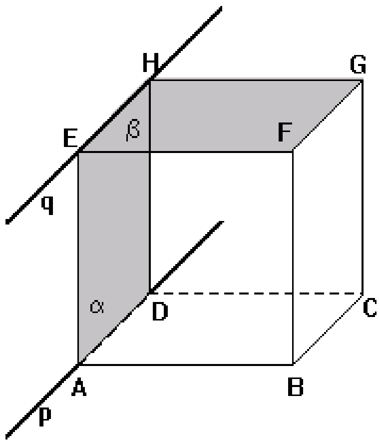

- Ak je priamka *p* rovnobežná s priamkou *q* a priamka *q* je rovnobežná s rovinou $\alpha$, potom je priamka *p* rovnobežná aj s rovinou $\alpha$. $\forall p, q, \alpha \in E_3: \big((p \parallel q) \wedge (q \parallel \alpha)\big) \Rightarrow (p \parallel \alpha)$




- Ak je priamka *p* rovnobežná s rovinou $\alpha$ a rovina $\alpha$ je rovnobežná s rovinou $\beta$, potom je priamka *p* rovnobežná aj s rovinou $\beta$. $\forall p, \alpha, \beta \in E_3: \big((p \parallel \alpha) \wedge (\alpha \parallel \beta)\big) \Longrightarrow (p \parallel \beta)$



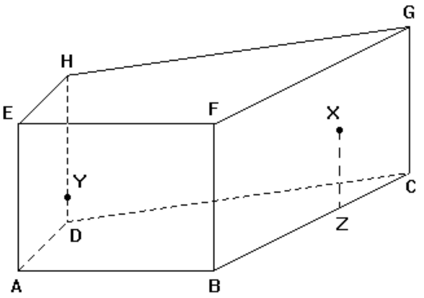

- Ak je priamka *p* rovnobežná s dvoma navzájom rôznobežnými rovinami $\alpha, \beta$, potom je priamka *p* rovnobežná aj s ich priesečnicou *q*. $\forall p, q, \alpha, \beta \in E_3: \big((p \parallel \alpha) \wedge (p \parallel \beta) \wedge q \subset \alpha \cap \beta\big) \Longrightarrow (p \parallel q)$




Ak majú dve roviny spoločný bod, majú spoločnú priamku, ktorú je potrebné tiež nájsť. Uvedieme ďalej postup, ako konštrukčne zostrojiť priesečnicu dvoch rovín.

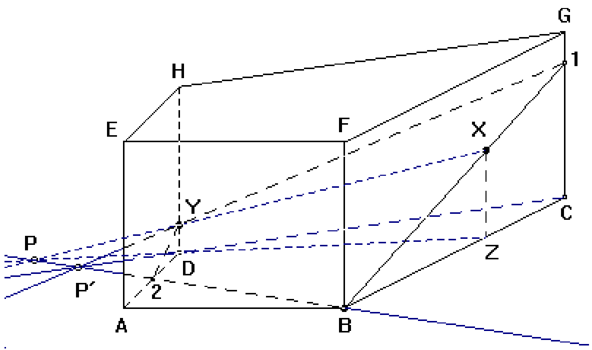
*Príklad 3.*

Zostrojte priesečnicu rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{BXY}$ v nepravidelnom štvorbokom kolmom hranole *ABCDEFGH*, ak bod *X* leží v stene $\overleftrightarrow{BCG}$ a bod *Y* leží na hrane *DH*.




*Riešenie:*

Treba si najskôr uvedomiť, čo to predstavuje hľadať spoločnú priesečnicu dvoch rovín. A teda, na zostrojenie priesečnice potrebujeme nájsť dva spoločné body rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{BXY}$. Jedným spoločným bodom je bod *B*, druhý spoločný bod nájdeme ako priesečník priamky $\overleftrightarrow{XY}$ s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$. Kolmým priemetom bodu *Y* do roviny $\overleftrightarrow{ABC}$ je bod *D* a kolmý priemet bodu *X* označíme *Z*. Priesečník priamok $\overleftrightarrow{XY}$ a $\overleftrightarrow{DZ}$ je hľadaným bodom, označíme ho *P*. Hľadanou priesečnicou rovín je teda priamka $\overleftrightarrow{BP}$.

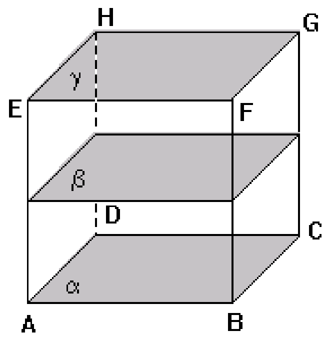



*Poznámka.* Uvedieme aj iný spôsob ako nájsť priesečnicu dvoch rovín. Najskôr zostrojíme rez hranola rovinou $\overleftrightarrow{BXY}$. Rezovým útvarom je štvoruholník *B1Y2*, a preto priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{BXY}$ je priamka $\overleftrightarrow{BP'}$. Na obrázku je možné vidieť, že body *P´* a *P* ležia na priamke $\overleftrightarrow{B2}$, ktorá je priesečnicou rezovej roviny $\overleftrightarrow{BXY}$ s rovinou podstavy $\overleftrightarrow{ABC}$.

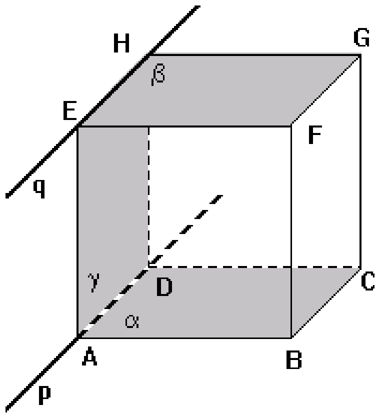
Ďalšou vzájomnou polohou geometrických útvarov, ktorej sa budeme venovať, je vzájomná poloha troch rovín. Uvedieme ich jednotlivo aj pomocou názorných obrázkov a symbolických zápisov. Budeme uvažovať *tri rôzne roviny*. Ale ak by sme nepoužili slovo „rôzne“, tak by dve roviny z týchto troch rovín mohli byť aj totožné. Potom musíme uvažovať takisto o vzájomnej polohe dvoch rovín, kde nastanú tri prípady vzájomnej polohy rovín, t. j. roviny sú rovnobežné alebo totožné alebo rôznobežné.

Tri rôzne roviny $\alpha, \beta, \gamma$ môžu mať tieto vzájomné polohy:

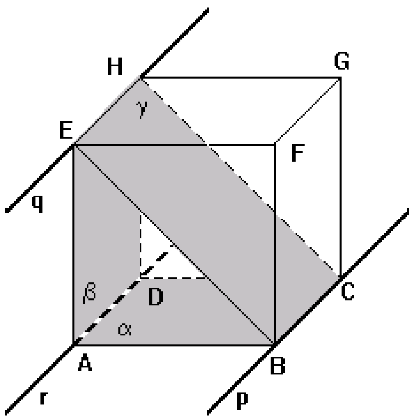
- Všetky tri roviny sú navzájom rovnobežné rôzne. $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$



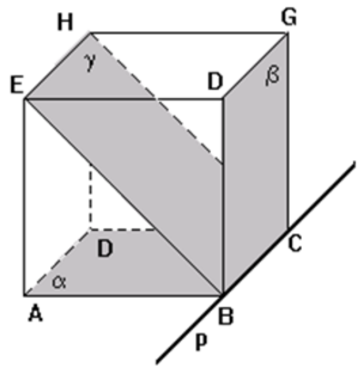

- Dve roviny sú navzájom rovnobežné rôzne a tretia je s nimi rôznobežná, priesečnice sú navzájom rôzne rovnobežky. $\big((\alpha \parallel \beta) \wedge (\gamma \nparallel \alpha) \wedge (\gamma \nparallel \beta)\big) \Longrightarrow \big((p \subset \alpha \cap \gamma) \wedge (q \subset \beta \cap \gamma)\big) \wedge (p \parallel q)$



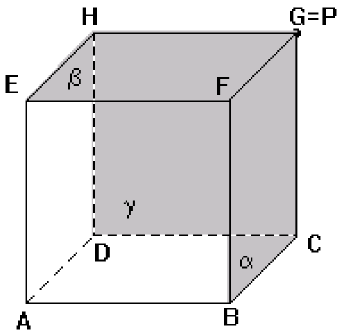

- Každé dve roviny sú navzájom rôznobežné, priesečnice sú navzájom rôzne rovnobežky. $(\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma) \wedge \big((p \subset \alpha \cap \gamma) \wedge (q \subset \beta \cap \gamma) \wedge (r \subset \alpha \cap \beta) \wedge (p \parallel q \parallel r)\big)$




- Každé dve roviny sú navzájom rôznobežné a majú jedinú spoločnú priesečnicu. $(\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma) \wedge (p \subset \alpha \cap \beta \cap \gamma)$




- Každé dve roviny sú navzájom rôznobežné a majú spoločný jediný bod. $(\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma) \wedge (P \in \alpha \cap \beta \cap \gamma)$




*Poznámka.* Vzájomná poloha troch rovín je problematika, ktorú je potrebné spomenúť aspoň stručne, pretože sa niektoré vlastnosti tejto vzájomnej polohy tiež využívajú pri zostrojovaní rezu telesa rovinou.

Ďalšou dôležitou témou, súvisiacou s vlastnosťami geometrických útvarov v priestore, je zostrojenie rovinného rezu danou rovinou. Zadefinujme teda pojem *rez telesa rovinou*. Rez telesa je prienik telesa a roviny, alebo rovinný útvar, ktorého hranica vznikne ako prienik stien telesa s rovinou rezu.

Pri konštrukcii rezu telesa rovinou využívame nasledujúce vety:

- Ak dve rovnobežné roviny pretína tretia rovina, potom ich pretína v rovnobežných priamkach.
- Ak je priamka rovnobežná s dvoma rôznobežnými rovinami, tak je rovnobežná aj z ich priesečnicou.
- Nech každé dve z troch rovín sú rôznobežné. Potom ak dve z priesečníc prechádzajú jedným bodom, tak ním prechádza aj tretia priesečnica, alebo ak dve z priesečníc nemajú spoločný bod, tak sú rovnobežné a je s nimi rovnobežná aj tretia priesečnica.

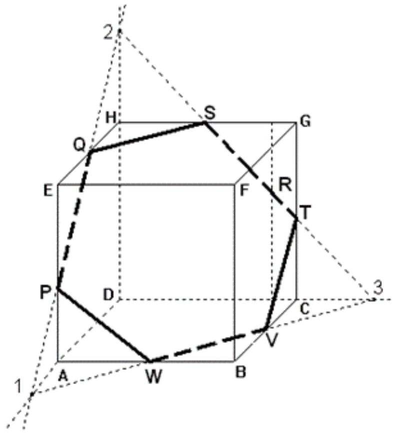
*Príklad 4.*

Zostrojte rez kocky *ABCDEFGH* rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde body *P, Q* sú postupne vnútorné body hrán *AE, EH* a bod *R* leží v stene kocky *CDHG.*

*Riešenie:*

Pri zostrojovaní rezu kocky rovinou $\alpha$ môže postupovať podľa nasledujúceho postupu, pričom budeme aj symbolicky zapisovať jednotlivé body tohto postupu.

Body *P, Q* ležia v rovine steny *ADHG* ($\overleftrightarrow{PQ} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ADH}$). Priamka $\overleftrightarrow{PQ}$ pretne rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ v bode *1* a rovinu $\overleftrightarrow{DCG}$ v bode *2* ($1 \in \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \left(\overleftrightarrow{ADH} \cap \overleftrightarrow{ABC}\right) = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AD}$, $2 \in \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{DCG} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \left(\overleftrightarrow{ADH} \cap \overleftrightarrow{DCG}\right) = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{DH}$). Body *2* a *R* ležia v rovine steny DCGH ($\overleftrightarrow{2R} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{DCG}$) a priesečnica roviny $\alpha$ so stenou kocky *DCGH* je úsečka *ST* ($S \in \overleftrightarrow{GH}$, $T \in \overleftrightarrow{CG}$). Priamka $\overleftrightarrow{2R}$ pretne rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ v bode *3* ($3 \in \overleftrightarrow{2R} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{2R} \cap \left(\overleftrightarrow{DCG} \cap \overleftrightarrow{ABC}\right) = \overleftrightarrow{2R} \cap \overleftrightarrow{DC}$). Body *1* a *3* ležia v rovine steny *ABCD* ($\overleftrightarrow{13} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ABC}$) a priesečnica roviny $\alpha$ so stenou kocky *ABCD* je úsečka *WV* ($W \in \overleftrightarrow{AB}$, $V \in \overleftrightarrow{BC}$). Keďže roviny $\overleftrightarrow{ADH}, \overleftrightarrow{BCG}$ sú rovnobežné, tak aj priamky $\overleftrightarrow{PQ}, \overleftrightarrow{VT}$ sú rovnobežné. Podobne rovnobežnosť platí aj pre priamky $\overleftrightarrow{QS}, \overleftrightarrow{WV}$ a $\overleftrightarrow{ST}, \overleftrightarrow{PW}$. Rovinným rezom kocky *ABCDEFGH* rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$ je šesťuholník *PQSTVW*.




*Príklad 5.*

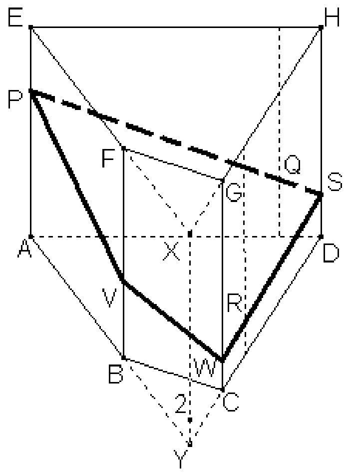
Zostrojte rez hranola *ABCDEFGH* s podstavou ľubovoľného štvoruholníka rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde bod *P* je vnútorným bodom hrany *AE* a body *Q, R* sú postupne body ležiace v stenách hranola *ADHE, CDHG.*

*Riešenie:*

Predtým uvedené vety teraz využijeme pri konštrukcii rezu hranola danou rovinou. Uvedieme aj symbolický zápis jednotlivých bodov riešenia.

Body *P, Q* ležia v rovine $\overleftrightarrow{ADH}$ ($\overleftrightarrow{PQ} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ADH}$) a rovina $\alpha$ pretne stenu hranola *ADHE* v úsečke *PS* ($S \in DH$). Body *S, R* ležia v rovine $\overleftrightarrow{CDH}$ ($\overleftrightarrow{SR} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{CDH}$) a rovina $\alpha$ pretne stenu hranola *CDHG* v úsečke *SW* ($W \in CG$). Priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{CDH}, \overleftrightarrow{ABF}$ je priamka $\overleftrightarrow{XY}$ ($\overleftrightarrow{XY} \subset \overleftrightarrow{CDH} \cap \overleftrightarrow{ABF}$). Priamka $\overleftrightarrow{SR}$ pretne rovinu $\overleftrightarrow{ABF}$ v bode *2* ($2 \in \overleftrightarrow{SR} \cap \overleftrightarrow{ABF} = \overleftrightarrow{SR} \cap \left(\overleftrightarrow{CDH} \cap \overleftrightarrow{ABF}\right) = \overleftrightarrow{SR} \cap \overleftrightarrow{XY}$). Body *2* a *P* ležia v rovine $\overleftrightarrow{ABF}$ ($\overleftrightarrow{2P} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ABF}$)

a rovina $\alpha$ pretne stenu hranola *ABFE* v úsečke *PV* ($V \in BF$). Rovinným rezom hranola *ABCDEFGH* rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$ je štvoruholník *PSWV*.




Ďalšou podstatnou geometrickou problematikou je hľadanie priesečníka priamky s rovinou. Najskôr je potrebné podrobne vysvetliť jednotlivé kroky postupu konštrukcie pri hľadaní tohto priesečníka, aby sme si uvedomili, že tieto kroky boli už samostatne riešené v predchádzajúcich úlohách.

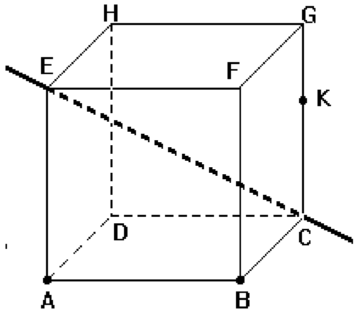
Zostrojenie priesečníka priamky *p* s rovinou $\alpha$ vysvetlíme na nasledujúcom postupe konštrukcie:

- priamkou *p* položíme rovinu $\beta$, ktorá je s rovinou $\alpha$ rôznobežná $(\beta, (p \subset \beta) \wedge (\alpha \nparallel \beta))$,
- zostrojíme priesečnicu *q* rovín $\alpha$ a $\beta$ $(q, q \subset \alpha \cap \beta)$,
- priesečník *P* priamok *p* a *q* je hľadaným priesečníkom priamky *p* a roviny $\alpha$ $(P, P \in p \cap q = p \cap \alpha)$.

*Poznámka.* Odporúčame si voliť pri hranoloch rovinu $\beta$ kolmú na rovinu podstavy telesa a pri ihlanoch tzv. vrcholovú rovinu, ktorá prechádza vrcholom ihlana.

*Príklad 6.*

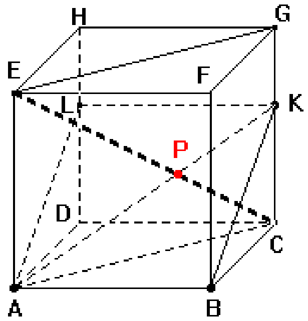
Daná je kocka *ABCDEFGH* a bod *K*, ktorý leží na hrane *CG*. Zostrojte priesečník telesovej uhlopriečky *EC* s rovinou $\overleftrightarrow{ABK}$.



*Riešenie:*

Budeme postupovať podľa jednotlivých krokov už uvedeného postupu a zároveň zostrojíme na kocke príslušnú konštrukciu.

Zostrojíme najskôr rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ABK}$, čo je štvoruholník *ABKL*. Zvolíme si rovinu, v ktorej bude ležať priamka $\overleftrightarrow{EC}$. Môže to byť napríklad rovina $\overleftrightarrow{AEC}$, rôznobežná s rovinou $\overleftrightarrow{ABK}$, v ktorej leží určite priamka $\overleftrightarrow{EC}$ $\left(\left(\overleftrightarrow{EC} \subset \overleftrightarrow{AEC}\right) \wedge \left(\overleftrightarrow{AEC} \nparallel \overleftrightarrow{ABK}\right)\right)$. Následne treba zostrojiť priesečnicu rovín $\overleftrightarrow{AEC}$ a $\overleftrightarrow{ABK}$, ktorou je priamka $\overleftrightarrow{AK}$ $\left(\overleftrightarrow{AK} \subset \overleftrightarrow{AEC} \cap \overleftrightarrow{ABK}\right)$. Priesečník priamok $\overleftrightarrow{EC}$, $\overleftrightarrow{AK}$ je bod *P* a tento bod *P* je teda priesečníkom priamky $\overleftrightarrow{EC}$ a roviny $\overleftrightarrow{ABK}$ $\left(P \in \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{AK} = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{ABK}\right)$.




Keď máme osvojenú problematiku zostrojovania rezov rôznych telies rovinou a vieme nájsť priesečník priamky s rovinou, vieme zostrojiť rez telesa rovinou, kde je nutné najskôr zostrojiť priesečník jednej priamky danej roviny s niektorou stenovou rovinou daného telesa.

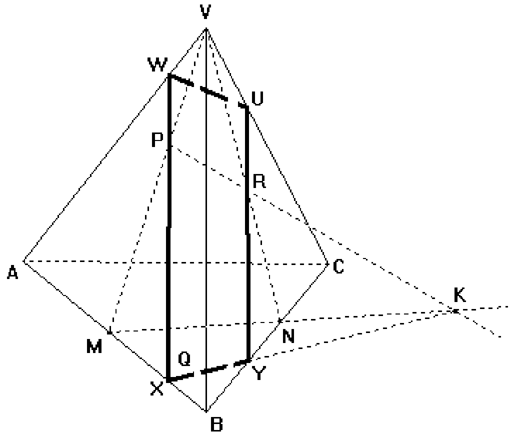
*Príklad 7.*

Zostrojte rovinný rez štvorstena *ABCV* rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde body *P, Q, R* sú postupne body ležiace v stenách štvorstena *ABV*, *ABC*, *BCV*, teda žiadne dva body z daných bodov neležia v jednej rovine.

*Riešenie:*

Úlohu začneme riešiť tak, že si zvolíme priamku z roviny $\alpha$, nech je to napríklad priamka $\overleftrightarrow{PR}$. Aby sme v reze telesa rovinou mohli pokračovať, zostrojíme najskôr priesečník nami zvolenej priamky $\overleftrightarrow{PR}$ s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$. A teda na zostrojenie rezu daného štvorstena využijeme bod *K*, ktorý je práve priesečníkom priamky $\overleftrightarrow{PR}$ s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$ $\left(K \in \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{PR} \cap \left(\overleftrightarrow{PRV} \cap \overleftrightarrow{ABC}\right) = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{MN}\right)$. Body *K, Q* ležia už v jednej rovine $\overleftrightarrow{ABC}$ $(\overleftrightarrow{KQ} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ABC})$ a rovina $\alpha$ pretne stenu štvorstena *ABC* v úsečke *XY* $(X \in AB, Y \in BC)$. Body *X, P* ležia v rovine $\overleftrightarrow{ABV}$ $(\overleftrightarrow{XP} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ABV})$ a rovina $\alpha$ pretne stenu štvorstena *ABV* v úsečke *XW* $(W \in AV)$. Tiež body *Y, R* ležia v rovine $\overleftrightarrow{BCV}$ $(\overleftrightarrow{YR} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{BCV})$ a rovina $\alpha$ pretne stenu štvorstena *BCV* v úsečke *YU* $(U \in CV)$. Podobne aj body

*W, U* ležia v rovine $\overleftrightarrow{ACV}$ ($\overleftrightarrow{WU} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ACV}$). Rovinným rezom štvorstena *ABCV* rovinou $\alpha$ je štvoruholník *XYUW*.




*Úlohy na precvičenie*

1. Zistite vzájomnú polohu priamok *a*, *b*:

   a) v kocke *ABCDEFGH*, ak $a = \overleftrightarrow{KL}, b = \overleftrightarrow{MN}$, kde body *K, L, M, N* sú postupne stredmi hrán *AB*, *CG*, *BC*, *EH*,
   b) v pravidelnom šesťbokom hranole *ABCDEFA´B´C´D´E´F´,* ak $a = \overleftrightarrow{BC'}, b = \overleftrightarrow{DA'}$.

2. Zistite vzájomnú polohu dvoch rovín $\alpha, \beta$ v danom telese. V prípade, že sú roviny rôznobežné, zostrojte aj ich priesečnicu:

   a) štvorsten *ABCD*, ak $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}, b = \overleftrightarrow{ACD}$, kde body *M, N, P* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BC, AB, BD*,
   b) kocka *ABCDEFGH*, $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}, b = \overleftrightarrow{PQR}$ , kde body *P, Q, R* sú postupne stredmi hrán *BC, GH, AE*, body *K* , *M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BF*, *BC* a bod *L* je vnútorným bodom steny *ADHE*.

3. Zostrojte rez kocky *ABCDEFGH* rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$, ak:

   a) bod *K* leží v stene *ABCD* a body *L, M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *EF, FG*,
   b) body *K*, *M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *AE*, *CG* a bod *L* leží na polpriamke za bodom *B*,
   c) bod *K* leží na polpriamke $\overrightarrow{EA}$ za bodom *A*, bod *L* leží na polpriamke $\overrightarrow{CG}$ za bodom *G* a bod *M* leží na polpriamke $\overrightarrow{EH}$ za bodom *H*.

4. Zostrojte rez daného telesa rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$:

   a) štvorboký hranol *ABCDEFGH*, jeho podstava je lichobežník a body *K, L, M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *AB, HG, DM*,
   b) trojboký hranol *ABCDEF*, bod *K* leží v stene *ABED* a body *L, M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *EF, DF*,

c) pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*, bod *K* leží na polpriamke $\overrightarrow{AB}$ za bodom *B*, bod *L* je vnútorným bodom hrany *DC* a bod *M* leží na polpriamke $\overrightarrow{CV}$ za bodom *V*,

d) štvorsten *ABCD*, bod *K* leží v stene *ABD* a body *L, M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BC, CD*.

5. Zostrojte priesečník priamky $p = \overleftrightarrow{KL}$ s rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$ v uvedenom telese:

a) kocka *ABCDEFGH*, body *K, L, P, Q* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BF, CD, GH, EH*, bod *R* leží na polpriamke $\overrightarrow{DA}$ za bodom *A*,

b) trojboký hranol *ABCDEF*, body *K, L, P, R* sú postupne vnútornými bodmi hrán *AC, EF, CF, DE* a bod *Q* je totožný s vrcholom *B*,

c) štvorsten ABCD, body *P, Q, R* sú postupne vnútornými bodmi hrán *CD, CB, AD* a bod *L* leží v stene *ABC*,

d) pravidelný šesťboký ihlan *ABCDEFV*, bod *K* je vnútorným bodom steny *CDV*, bod *L* leží na polpriamke $\overrightarrow{VA}$ za bodom *A*, body *P, Q, R* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BC, CD, EF*.

## 3.3 Metrické vlastnosti lineárnych útvarov v priestore

V rámci metrických vlastností geometrických útvarov budeme zisťovať uhly a vzdialenosti medzi jednotlivými útvarmi (bod, priamka, rovina).

Pre vzájomnú polohu priamok platia nasledujúce vlastnosti:

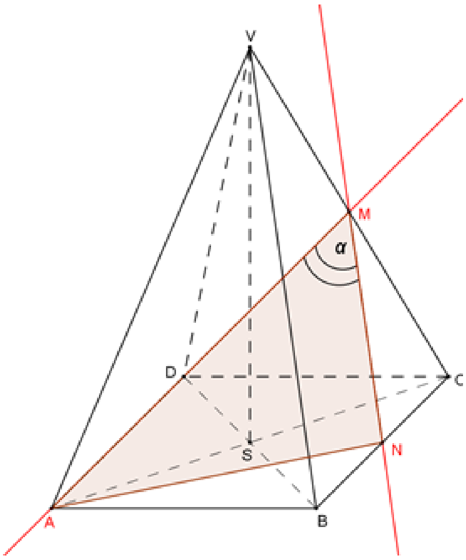
- uhlom priamok *a, b* nazývame uhol ľubovoľných nedisjunktných priamok $a', b'$ pre ktoré platí: $a' \parallel a, b' \parallel b$,
- kolmé priamky sú priamky, ktorých uhol je pravý,
- priamka kolmá na rovinu je priamka kolmá na všetky priamky roviny,
- priamka kolmá na rovinu je s touto rovinou rôznobežná, v opačnom prípade by totiž v rovine existovala priamka, ktorá je s danou priamkou rovnobežná, čo je v spore s predchádzajúcou vlastnosťou.

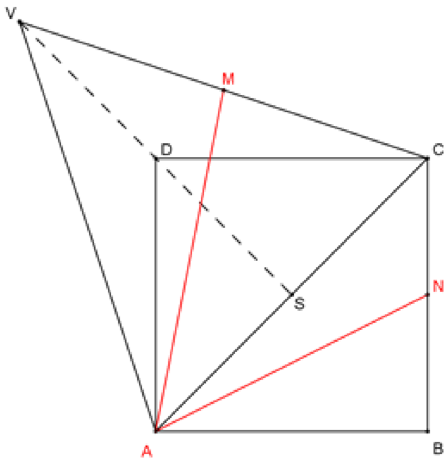
*Príklad 8.*

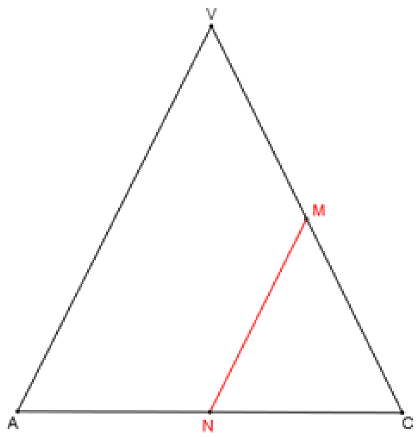
Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV* s dĺžkami hrán $|AB| = a, |AV| = b$, pričom bod *M* je stred hrany *CV* a bod *N* je stred hrany *BC*. Konštrukčne zostrojte uhol priamok $\overleftrightarrow{MN}, \overleftrightarrow{AM}$.

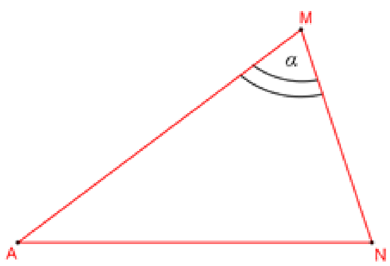
*Riešenie:*

Priamky $\overleftrightarrow{MN}, \overleftrightarrow{AM}$ sú navzájom rôznobežné, preto uhol týchto priamok je menší uhol, ktorý dané priamky zvierajú. Konštrukčne zistíme tento uhol priamok tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach trojuholník *AMN*. Pre jednotlivé jeho dĺžky strán platí: úsečka *AM* je ťažnicou trojuholníka *ACV*, úsečka *MN* je stredná priečka trojuholníka *BCV* a dĺžku úsečky *AN* zostrojíme v štvorci *ABCD*. Potom platí: $\sphericalangle(\overleftrightarrow{MN}, \overleftrightarrow{AM}) = \sphericalangle(AMN) = \alpha$.



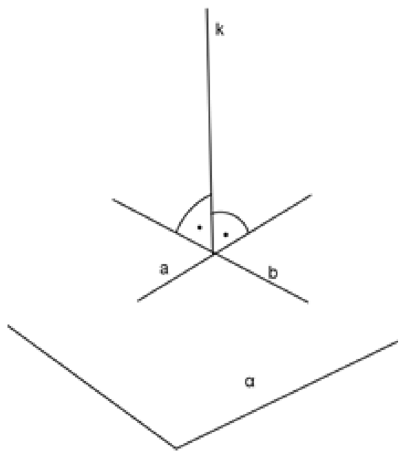



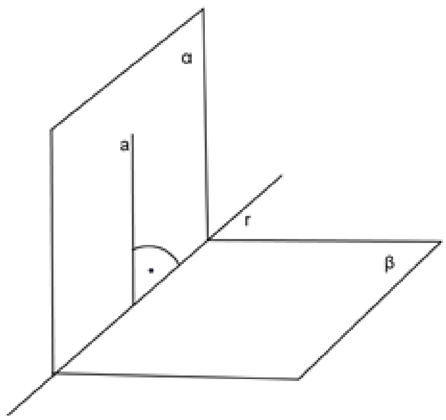




Uvedieme kritérium kolmosti priamky a roviny, tiež kritérium kolmosti dvoch rovín:

- Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežné priamky tejto roviny. $k \perp \alpha \Leftrightarrow \exists a, b \in \alpha : a \perp k, b \perp k$




- Dve roviny sú kolmé práve vtedy, keď jedna z rovín obsahuje priamku kolmú na druhú roviny. $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists a \in \alpha: a \perp \beta$

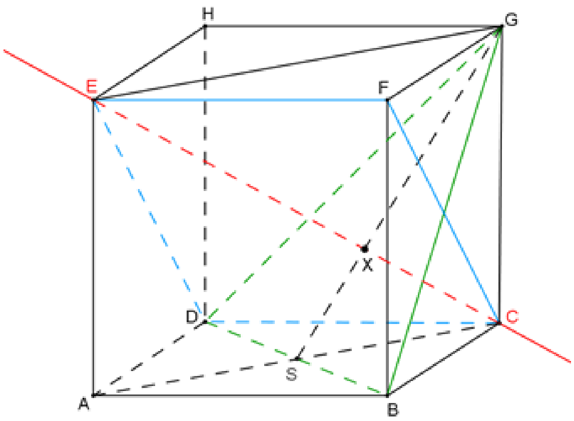



*Príklad 9.*

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zistite, či je kolmá priamka $\overleftrightarrow{EC}$ na rovinu $\overleftrightarrow{DBG}$.

*Riešenie:*

Využijeme kritérium kolmosti priamky a roviny, t. j. dokážeme, že priamka $\overleftrightarrow{EC}$ je kolmá na dve rôznobežky roviny $\overleftrightarrow{DBG}$. Uvažujme napríklad priamku $\overleftrightarrow{BD}$. Priamka $\overleftrightarrow{BD}$ je kolmá na priamky $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AE}$, pretože je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ACE}$, a teda je kolmá aj na priamku $\overleftrightarrow{EC}$. Podobne priamka $\overleftrightarrow{BG}$ je kolmá na priamky $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CF}$, preto je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ECF}$ a je kolmá aj na priamku $\overleftrightarrow{EC}$. Z uvedených kolmostí priamok vyplýva, že priamka $\overleftrightarrow{EC}$ je kolmá na priamky $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BG}$, a preto aj na rovinu $\overleftrightarrow{DBG}$.

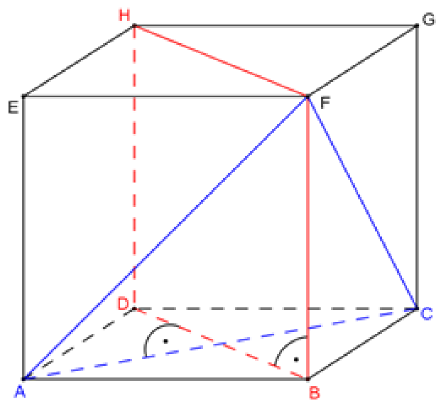



*Príklad 10.*

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zistite, či roviny $\overleftrightarrow{DHB}$, $\overleftrightarrow{ACF}$ sú kolmé.

*Riešenie:*

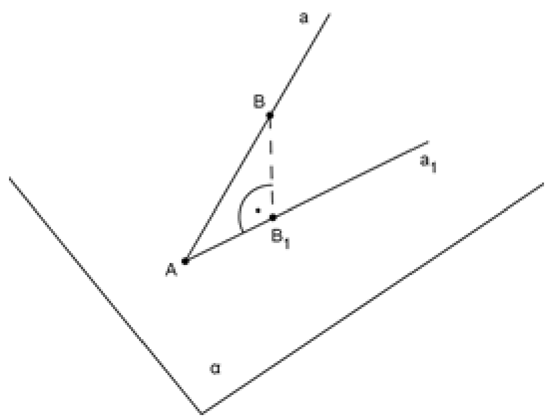
Z kritéria kolmosti dvoch rovín stačí dokázať, že napríklad priamka $\overleftrightarrow{AC}$ roviny $\overleftrightarrow{ACF}$ je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{DHB}$. Priamka $\overleftrightarrow{AC}$ je určite kolmá na priamku $\overleftrightarrow{BD}$ roviny $\overleftrightarrow{DHB}$ a zároveň je kolmá aj na priamku $\overleftrightarrow{BF}$ roviny $\overleftrightarrow{DHB}$. Preto priamka $\overleftrightarrow{AC}$ je kolmá na dve rôznobežné priamky roviny $\overleftrightarrow{DHB}$, a teda je kolmá aj na rovinu $\overleftrightarrow{DHB}$. Potom vyplýva, že aj rovina $\overleftrightarrow{DHB}$ je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ACF}$ a opačne.



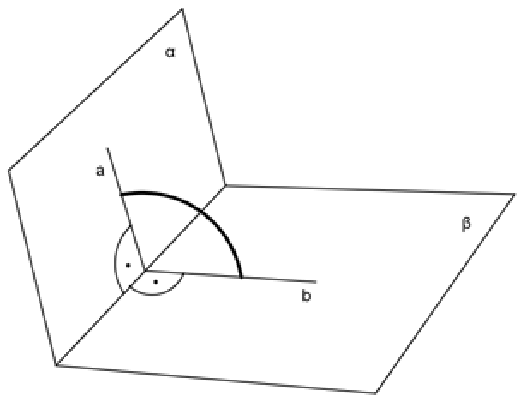

Nasledujúce vety súvisia s kolmosťou priamky a roviny:

- Existuje jediná priamka prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú rovinu.
- Všetky priamky kolmé na tú istú rovinu sú navzájom rovnobežné.

Popíšeme ďalšie prípady, ako zistiť uhol priamky s rovinou a uhol dvoch rovín. *Uhol priamky s rovinou* je uhol priamky s jej kolmým priemetom do roviny.

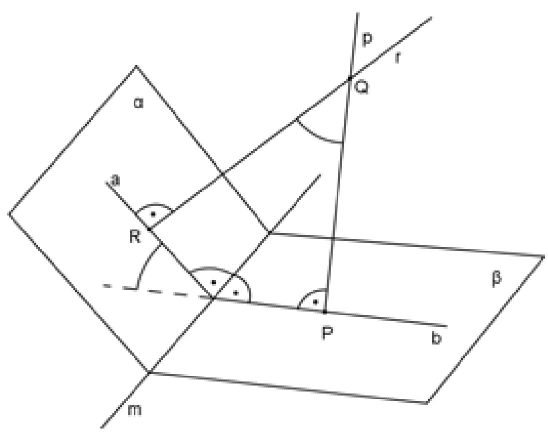



*Uhlom dvoch rovnobežných rovín* je nulový uhol. *Uhlom dvoch rôznobežných rovín* je uhol priamok ležiacich v daných rovinách a kolmých na priesečnicu rovín. Ak je tento uhol pravý, tak hovoríme, že roviny sú kolmé.




Platia nasledujúce vety ako dôsledky uvedených viet:

- Uhol priamky $m$ s rovinou $\alpha$ (priamka nie je kolmá na rovinu) je najmenší zo všetkých uhlov dvojíc priamok $m, a$ $(a \subset \alpha)$.
- Uhol priamky s rovinou je zhodný s doplnkovým uhlom k uhlu priamky s kolmicou na rovinu.
- Uhol dvoch rovín je zhodný s uhlom kolmíc na tieto roviny.

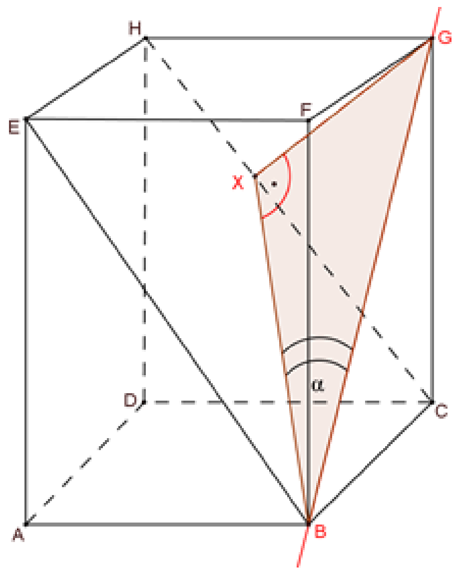


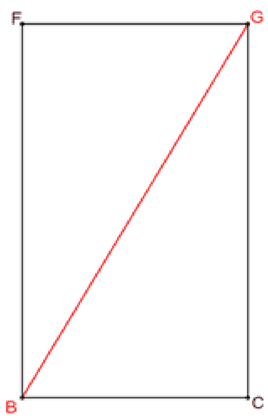
*Príklad 11.*

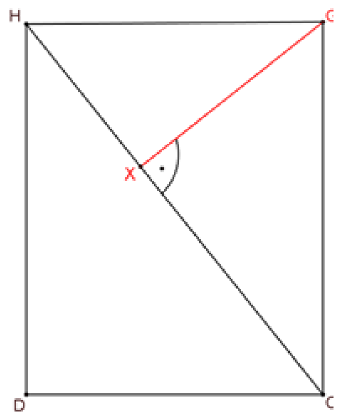
Daný je kváder *ABCDEFGH* s dĺžkami hrán $|AB| = a, |BC| = b, |AE| = c$. Konštrukčne zostrojte uhol priamky $\overleftrightarrow{BG}$ a roviny $\overleftrightarrow{EBC}$.

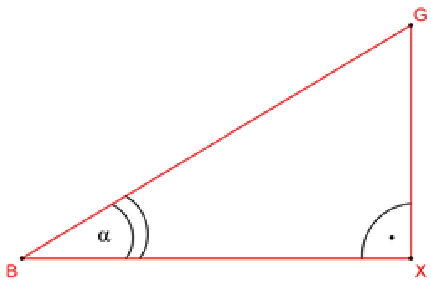
*Riešenie:*

V danom kvádri zostrojme kolmý priemet priamky $\overleftrightarrow{BG}$ do roviny $\overleftrightarrow{EBC}$. Týmto priemetom je priamka $\overleftrightarrow{BX}$, pretože sme našli kolmé priemety dvoch rôznych bodov priamky do roviny $\overleftrightarrow{EBC}$. Preto uhol priamky $\overleftrightarrow{BG}$ a roviny $\overleftrightarrow{EBC}$ je uhol priamok $\overleftrightarrow{BG}, \overleftrightarrow{BX}$. Konštrukčne zistíme tento uhol tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach trojuholník *BGX*, ktorý je navyše aj pravouhlý (priamka $\overleftrightarrow{GX}$ je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{EBC}$, preto je kolmá na všetky priamky z tejto roviny, a teda aj na priamku $\overleftrightarrow{BX}$). Skutočnú dĺžku strany *BG* zostrojíme z obdĺžnika *BCGF* a dĺžku strany *GX* zostrojíme z obdĺžnika *DCGH*. Preto platí: $\sphericalangle\left(\overleftrightarrow{BG}, \overleftrightarrow{EBC}\right) = \sphericalangle(GBX) = \alpha$.



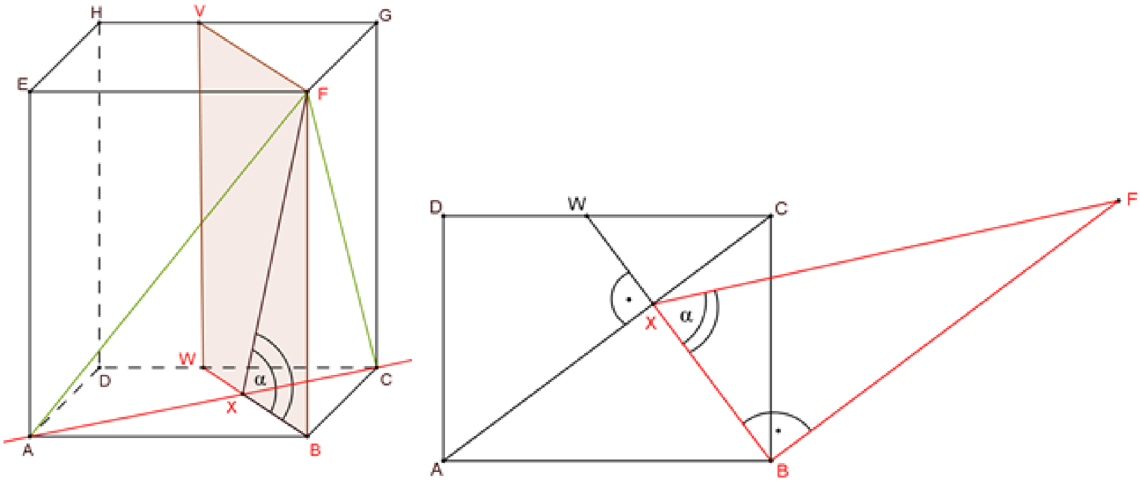



*Príklad 12.*

Daný je kváder *ABCDEFGH* s dĺžkami hrán $|AB| = a, |BC| = b, |AE| = c$. Konštrukčne zostrojte uhol rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ACF}$.

*Riešenie:*

Uhol rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ACF}$ je uhol kolmých priamok na priesečnicu týchto rovín, teda na priamku $\overleftrightarrow{AC}$. Najskôr nájdeme kolmú rovinu na priamku $\overleftrightarrow{AC}$. Keďže priamky $\overleftrightarrow{BF}, \overleftrightarrow{BW}$ sú kolmé na danú priesečnicu, preto aj rovina $\overleftrightarrow{BFW}$ je kolmá na $\overleftrightarrow{AC}$ podľa kritéria kolmosti priamky a roviny. Priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{BFW}$ je priamka $\overleftrightarrow{BW}$ a priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{BFW}$ je priamka $\overleftrightarrow{XF}$. Preto uhol rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ACF}$ je uhol priamok $\overleftrightarrow{BW}, \overleftrightarrow{XF}$. Konštrukčne zistíme tento uhol tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach trojuholník *BXF*, ktorý je tiež pravouhlý. Skutočnú dĺžku strany *BX* zostrojíme z obdĺžnika *ABCD* a dĺžka strany *BF* je známa zo zadania úlohy. Platí teda: $\sphericalangle(\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ACF}) = \sphericalangle(BXF) = \alpha$.




Medzi ďalšie metrické vlastnosti geometrických útvarov patrí vzdialenosť medzi nimi. Preto *vzdialenosť dvoch geometrických útvarov U, V* je číslo, ktoré je minimom množiny dĺžok úsečiek *XY*, kde *X* je ľubovoľný bod útvaru *U* a bod *Y* je ľubovoľný bod útvaru *V*.
$|U, V| = \min\{|XY|; X \in U \wedge Y \in V\}$

*Poznámka.* Ak útvary majú spoločný aspoň jeden bod, potom ich vzdialenosť je 0.

Pri vzdialenosti geometrických útvarov môžu nastať nasledujúce prípady:

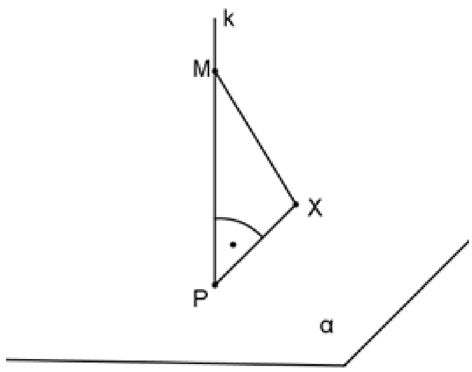
- vzdialenosť dvoch bodov,
- vzdialenosť bodu od priamky,
- vzdialenosť bodu od roviny,
- vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok,
- vzdialenosť dvoch mimobežných priamok,

- vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín,
- vzdialenosť priamky od roviny.

Ďalej sa budeme jednotlivým vzdialenostiam.

*Vzdialenosť dvoch bodov A, B* je dĺžka úsečky *AB*; označujeme $|A, B|$. $|A, B| = |AB|$

*Vzdialenosť bodu M od roviny α* je dĺžka úsečky *MP*, kde bod *P* je päta kolmice z bodu *M* na rovinu $\alpha$; označenie danej vzdialenosti je $|M, \alpha|$. $|M, \alpha| = |M, P| = |MP|, P \in k \cap \alpha \wedge M \in k$



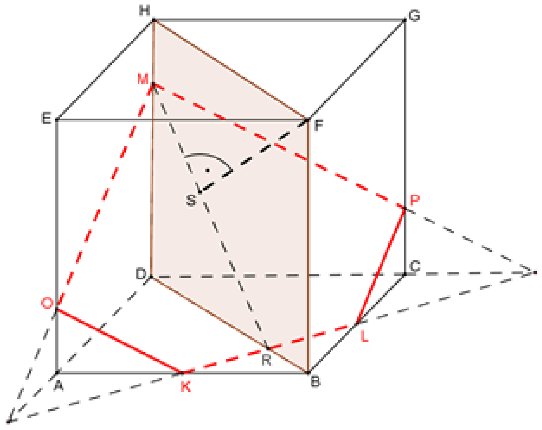

*Poznámka.* Ak $|M, \alpha| = |M, P| = |MP|$, tak $|MP|$ je zrejme kratšia ako $|MX|$ pre ľubovoľný bod *X*, kde $X \in \alpha \wedge X \neq P$.

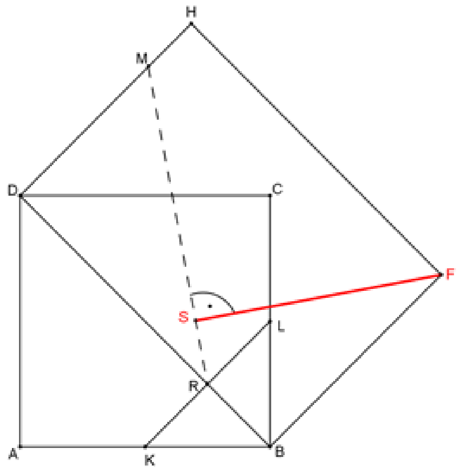
*Príklad 13.*

Daná je kocka *ABCDEFGH* s dĺžkou hrany $|AB| = a$. Konštrukčne zostrojte vzdialenosť bodu *F* od roviny $\overleftrightarrow{KLM}$, pričom body *K*, *L* sú postupne stredy hrán *AB*, *BC* a pre bod *M* platí: $|DM| = 3|MH|$.

*Riešenie:*

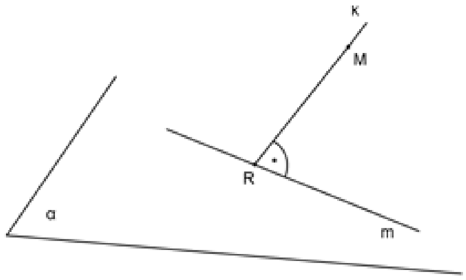
Vzdialenosť bodu *F* od roviny $\overleftrightarrow{KLM}$ je dĺžka úsečky *FS*, pričom bod *S* je kolmým priemetom bodu *F* do roviny $\overleftrightarrow{KLM}$. Zostrojíme rovinu (s využitím kritéria kolmosti dvoch rovín) kolmú na rovinu $\overleftrightarrow{KLM}$ a prechádzajúcu bodom *F*. Uvedená kolmica *FS* leží potom v tejto kolmej rovine. Zvoľme si napríklad rovinu $\overleftrightarrow{BFH}$: $\overleftrightarrow{KL} \subset \overleftrightarrow{KLM}, \overleftrightarrow{KL} \perp \overleftrightarrow{BD} \wedge \overleftrightarrow{KL} \perp \overleftrightarrow{FB}$, preto $\overleftrightarrow{KLM} \perp \overleftrightarrow{BFH}$. Taktiež aj kolmý priemet *S* bodu *F* do roviny $\overleftrightarrow{KLM}$ leží na priesečnici $\overleftrightarrow{RM}$ rovín $\overleftrightarrow{KLM}, \overleftrightarrow{BFH}$. Konštrukčne zistíme túto vzdialenosť tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach obdĺžnik *BFHG*, pričom dĺžku jednej jeho strany zostrojíme zo štvorca *ABCD* a druhá dĺžka obdĺžnika je zhodná s dĺžkou hrany kocky *ABCDEFGH*. Preto platí: $\left|F, \overleftrightarrow{KLM}\right| = |F, S| = |FS|$.



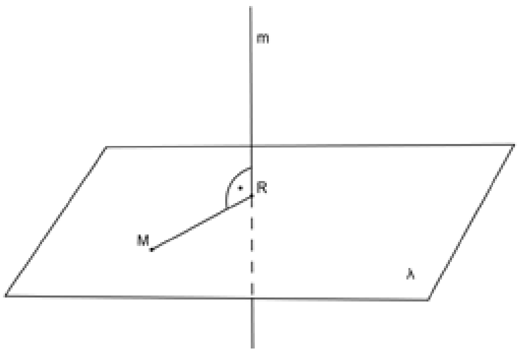




*Vzdialenosť bodu M od priamky m* je definovaná ako:

- planimetrické riešenie: dĺžka úsečky *MR*, kde bod *R* je päta kolmice z bodu *M* na priamku *m*; označenie $|M,m|$; $|M,m| = |M,R| = |MR|, R \in k \cap m \wedge M \in k$,




- stereometrické riešenie: dĺžka úsečky *MR*, kde bod *R* je prienikom roviny $\lambda$ (rovina $\lambda$ je kolmá na priamku *m* a prechádza bodom *M*) a priamky m; označenie $|M,m|$; $|M,m| = |M,R| = |MR|, R \in \lambda \cap m \wedge M \subset \lambda \wedge \lambda \perp m$.



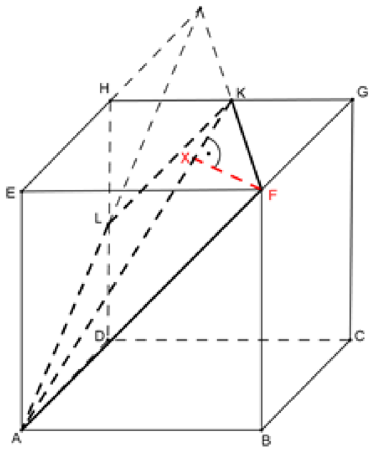

*Príklad 14.*

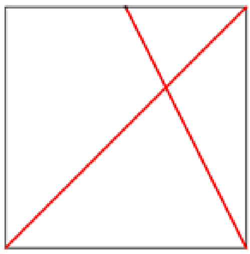
Daná je kocka *ABCDEFGH* s dĺžkou hrany $|AB| = a$. Konštrukčne určte vzdialenosť bodu *F* od priamky $\overleftrightarrow{AK}$, pričom bod *K* je stredom hrany *GH*.

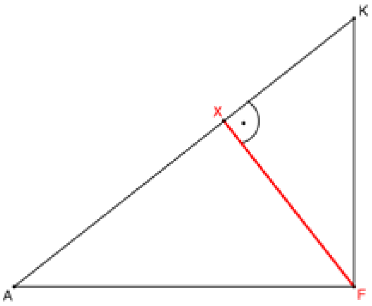
*Riešenie:*

Na zostrojenie vzdialenosti bodu *F* od priamky $\overleftrightarrow{AK}$ využijeme vyššie popísané planimetrické riešenie. Zostrojíme najskôr rovinu, ktorá je určená priamkou $\overleftrightarrow{AK}$

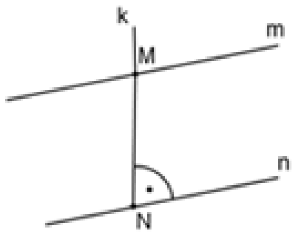
a bodom *F*. V danej rovine $\overleftrightarrow{AFK}$ hľadaná vzdialenosť je dĺžka úsečky *FX*, kde bod *X* je päta kolmice z bodu *F* na priamku $\overleftrightarrow{AK}$. Konštrukčne zistíme túto vzdialenosť tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach lichobežník AFKL, prípadne iba trojuholník *AFK*, ktorý je navyše aj pravouhlý. Dĺžky strán *AF* a *FK* tohto pravouhlého trojuholníka *AFK* zostrojíme z jednotlivých stien kocky, t. j. zo štvorca *ABFE* a štvorca *EFGH*. Platí: $\left|F,\overleftrightarrow{AK}\right| = |F,X| = |FX|$.



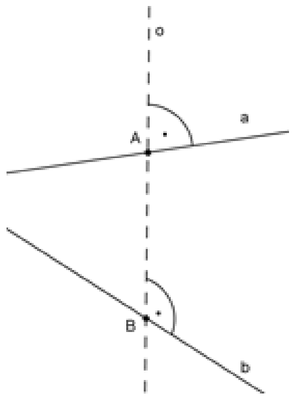






*Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok m, n* je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej priamky od druhej priamky; označujeme $|m,n|$. $|m,n| = |M,n| = |MN|, M \in m \wedge N \in k \cap n \wedge M \in k \wedge k \perp n$




*Vzdialenosť dvoch mimobežných priamok a, b* je vzdialenosť dvoch bodov *A, B*, ktoré sú prienikom priamok *a*, *b* a osi *o* daných mimobežných priamok *a*, *b*; označenie $|a,b|$.
$|a,b| = |A,B| = |AB|, A \in a \wedge B \in b \wedge \overleftrightarrow{AB} \perp a \wedge \overleftrightarrow{AB} \perp b$



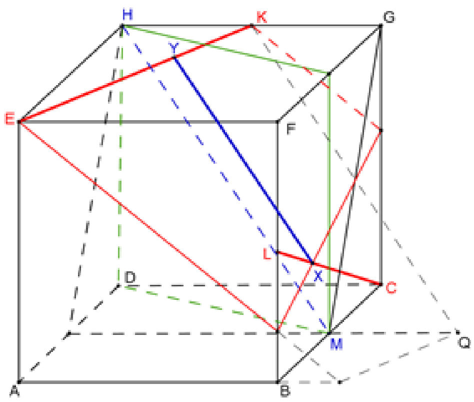

*Poznámka.* Os mimobežných priamok zostrojíme podľa nasledujúceho postupu: na priamke napr. *a* si zvolíme ľubovoľný bod *X* a daným bodom zostrojíme rovnobežku *b´* s druhou priamkou *b*; nech rovina $\alpha = \overleftrightarrow{a, b'}$, potom zostrojíme ľubovoľnú kolmicu *k* na rovinu $\alpha$ a rovina $\beta$ je určená $\beta = \overleftrightarrow{a, k}$; rovina $\beta$ pretne priamku *b* v bode *B* a týmto bodom vedieme rovnobežku *o* s priamkou *k*; priamka *o* pretne priamku *a* v bode *A*; os *o* mimobežiek *a*, *b* je teda priamka $\overleftrightarrow{AB}$, pričom je jedinou osou mimobežiek.

*Príklad 15.*

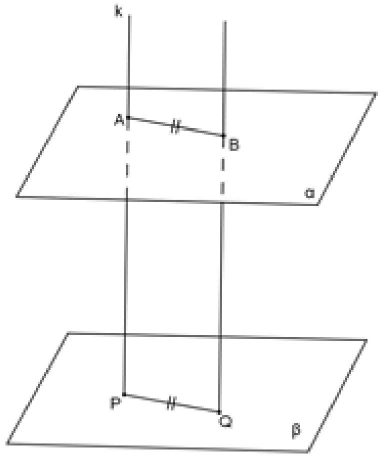
Daná je kocka *ABCDEFGH* s dĺžkou hrany $|AB| = a$. Zostrojte os mimobežných priamok $\overleftrightarrow{EK}, \overleftrightarrow{LC}$, pričom body *K*, *L* sú postupne stredy hrán *GH*, *BF*.

*Riešenie:*

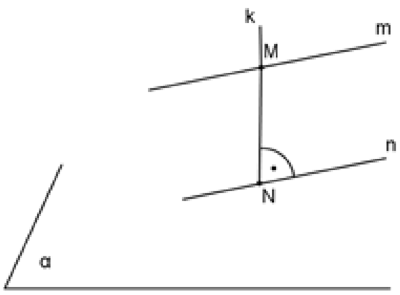
Keďže os mimobežných priamok je kolmá na obidve mimobežky $\overleftrightarrow{EK}, \overleftrightarrow{LC}$, tak najskôr nájdeme tento kolmý smer. Následne budeme už riešiť úlohu, kde budeme hľadať priečku daných mimobežiek rovnobežnú s daným smerom. Z kritéria kolmosti priamky a roviny vyplýva, že rovina $\overleftrightarrow{GHM}$ je kolmá na priamku $\overleftrightarrow{LC}$ a rovina $\overleftrightarrow{DMH}$ je kolmá na priamku $\overleftrightarrow{EK}$. Potom ich priesečnica $\overleftrightarrow{MH}$ je kolmá na obidve mimobežné priamky, a teda priamka $\overleftrightarrow{MH}$ je hľadaný smer osi daných mimobežných priamok. Zostrojíme ďalej rovinu $\overleftrightarrow{EKQ}$, ktorá obsahuje priamku $\overleftrightarrow{EK}$ a je rovnobežná so smerom $\overleftrightarrow{MH}$. Bod *X* je priesečníkom priamky $\overleftrightarrow{LC}$ s rovinou $\overleftrightarrow{EKQ}$, a týmto bodom *X* už prechádza hľadaná os mimobežiek. Os pretína priamku $\overleftrightarrow{EK}$ v bode *Y*.



*Vzdialenosť rovnobežných rovín* $\alpha, \beta$ je vzdialenosť ľubovoľného bodu z jednej roviny od druhej roviny; označenie je $|\alpha, \beta|$. $|\alpha, \beta| = |A, \beta| = |AP|, A \in \alpha \wedge P \in k \cap \beta \wedge A \in k \wedge k \perp \beta$




*Vzdialenosť priamky m od roviny* $\alpha$ je vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky od roviny; označenie je $|m, \alpha|$. $|m, \alpha| = |M, \alpha| = |MN|, M \in m \wedge N \in k \cap \alpha \wedge M \in k \wedge k \perp \alpha$




*Úlohy na precvičenie*

1. V danom telese konštrukčne zostrojte uhol priamok:
   a) kocka *ABCDEFGH*, priamky $\overleftrightarrow{AF}, \overleftrightarrow{BG}$,
   b) kocka *ABCDEFGH*, priamky $\overleftrightarrow{BH}, \overleftrightarrow{DM}$, kde bod *M* je stred hrany *BC*,
   c) pravidelný trojboký hranol *ABCDEF*, priamky $\overleftrightarrow{EG}, \overleftrightarrow{AF}$,
   d) pravidelný šesťboký hranol *ABCDEFGHIJKL*, priamky $\overleftrightarrow{CG}, \overleftrightarrow{BI}$.
2. V danom telese konštrukčne zostrojte uhol priamky a roviny:
   a) kváder *ABCDEFGH*, priamka $\overleftrightarrow{KF}$, rovina $\overleftrightarrow{ACK}$, ak bod *K* je stred hrany *HD*,
   b) kocka *ABCDEFGH*, priamka $\overleftrightarrow{DF}$, rovina $\overleftrightarrow{BKL}$, ak bod *K* je stred hrany *AE* a bod *L* je stred hrany *CG*,
   c) pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*, priamka $\overleftrightarrow{AV}$, rovina $\overleftrightarrow{ABC}$.

3. V danom telese konštrukčne zostrojte uhol rovín:

   a) kocka *ABCDEFGH*, roviny $\overleftrightarrow{BKH}, \overleftrightarrow{ABG}$, ak bod *K* je stred hrany *AE*,
   b) pravidelný šesťboký ihlan *ABCDEFV*, roviny $\overleftrightarrow{BCV}, \overleftrightarrow{ABC}$,
   c) pravidelný štvorsten *ABCD*, uhol bočných stien štvorstena.

4. Dokážte, že v kocke *ABCDEFGH* platí: $\overleftrightarrow{ADK} \perp \overleftrightarrow{BCL}$, ak bod *K* je stred hrany *EF* a bod *L* je stred hrany *AE*.

5. Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zostrojte priamku prechádzajúcu bodom *F* a kolmú na rovinu $\overleftrightarrow{\mathrm{EKL}}$, ak bod *K* je stred hrany *AB* a bod *L* je stred hrany *GH*.

6. Dokážte, že v pravidelnom štvorstene *ABCD* sú každé dve mimobežné hrany na seba kolmé.

7. Daný je pravidelný štvorsten *ABCD* a bod *M* je stred hrany *CD*. Zostrojte vzdialenosť bodu *M* od priamky $\overleftrightarrow{AB}$.

8. Daná je kocka *ABCDEFGH* a bod *O* je stred steny *ABCD*. Zostrojte vzdialenosť bodu *E* od priamky $\overleftrightarrow{OG}$.

9. Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV* a bod *K* je stred hrany *AB*. Zostrojte vzdialenosť bodu *K* od priamky $\overleftrightarrow{CV}$.

10. Daná je kocka *ABCDEFGH* a bod *S* je stred hrany *AE*. Zostrojte vzdialenosť bodu *C* od roviny $\overleftrightarrow{HSG}$.

11. Daný je pravidelný šesťboký ihlan *ABCDEFV*. Zostrojte vzdialenosť bodu *F* od roviny $\overleftrightarrow{ABV}$.

12. Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zostrojte vzdialenosť priamok $\overleftrightarrow{HF}$ a $\overleftrightarrow{BG}$.

13. Daný je pravidelný osemsten *ABCDEF*. Zostrojte vzdialenosť priamky $\overleftrightarrow{CE}$ od roviny $\overleftrightarrow{ABF}$.

14. Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*. Zostrojte vzdialenosť rovín $\overleftrightarrow{BCV}$ a $\overleftrightarrow{KLM}$, ak body *K, L, M* sú postupne stredy hrán *AB, CD, DV*.

15. Daný je pravidelný štvorsten *ABCD* a body *K, L, M* sú postupne stredy hrán *BC, AC, CD*. Zostrojte vzdialenosť rovín $\overleftrightarrow{ABD}$ a $\overleftrightarrow{KLM}$.

# 4 Vektory v geometrii

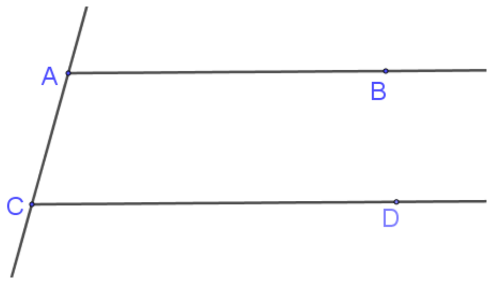
V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať vektorom a ich vlastnostiam. Uvedieme najdôležitejšie pojmy a vlastnosti súvisiace so zavedeným súradnicovej sústavy v rovine aj v priestore. Na štvrtú kapitolu nadväzuje potom ďalšia kapitola, v ktorej využijeme uvedené poznatky v analytických rovniciach priamok a rovín. Popísanú problematiku doplníme o niekoľko riešených úloh a v rámci cvičení sú uvedené ďalšie typy úloh súvisiace s riešenou témou.

## 4.1 Orientované úsečky, vektor

Najskôr uvedieme vlastnosti potrebné k zavedeniu pojmov ako je orientovaná úsečka a vektor. Úvahy budú pre geometrické útvary v priestore, pričom pod geometrickým útvarom budeme rozumieť ľubovoľnú množinu bodov. Základnými geometrickými útvarmi sú body, priamky, polpriamky, úsečky, roviny a polroviny.

Priamky *a, b* sú *rovnobežné*, ak ležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod. Polpriamky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ (tiež úsečky *AB*, *CD*) sú *rovnobežné*, ak sú priamky $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ rovnobežné. Rovina $\alpha$ a priamka $\overleftrightarrow{AB}$ sú *rovnobežné,* ak nemajú spoločný bod. Rovina $\alpha$ a polpriamka $\overrightarrow{AB}$ (úsečka *AB*) sú *rovnobežné*, ak sú rovnobežné rovina $\alpha$ a priamka $\overleftrightarrow{AB}$.

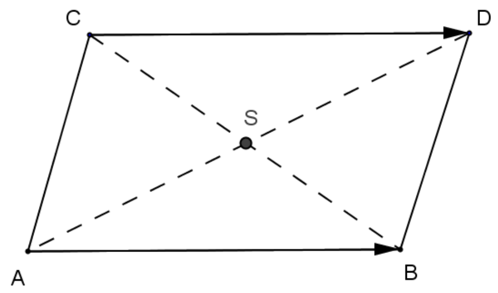
Dve polpriamky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sú *súhlasne rovnobežné* (ležia v jednej polrovine s hranicou $\overleftrightarrow{AC}$ alebo ležia na jednej priamke, pričom jedna je podmnožinou druhej), v opačnom prípade sú polpriamky *nesúhlasne rovnobežné*.





Úsečku *AB* nazveme *orientovanou*, ak *A* je začiatočný bod úsečky, *B* je koncový bod úsečky, pre takéto označení použijeme šípku, t. j. $\overrightarrow{AB}$. Orientovanú úsečku *AB* možno definovať aj ako usporiadanú množinu bodov *A*, *B*, označujeme ju $[A,\ B]$. *Nulovou orientovanou úsečkou* je úsečka, ktorej začiatočný bod je totožný s koncovým bodom úsečky, označenie nulovej úsečky je $\overrightarrow{AA}$. Dĺžka orientovanej úsečky $\overrightarrow{AB}$ je dĺžka úsečky *AB*, teda $|\overrightarrow{AB}|$=$|AB|$. Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ sú rôzne a každá z nich je opačná k druhej.

Nenulové orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sú *súhlasne (nesúhlasne) orientované*, ak polpriamky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sú súhlasne (nesúhlasne) rovnobežné. Úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sa nazývajú *ekvipolentné*, ak sú súhlasne orientované a majú rovnaké dĺžky. Dané ekvipolentné úsečky označujeme $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sú *ekvipolentné* práve vtedy, ak stredy úsečiek *AD, BC* splývajú.




Podmienky pre ekvipolentnosť orientovaných úsečiek sú tieto:

- $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$,
- $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} => \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$,
- $(\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}) => \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Ďalej definujeme *voľný vektor* ako množinu všetkých orientovaných úsečiek, z ktorých každé dve sú ekvipolentné. Vektory označujeme $\vec{a}$, $\vec{b}, \overrightarrow{AB}$, ...

Nech $\vec{a}$ je ľubovoľný vektor, O je ľubovoľný bod priestoru. Potom existuje jediný bod M taký, že platí: $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ (vektor $\vec{a}$ sme umiestnili do bodov O, M; $M = O + \vec{a}$, $\vec{a} = M - O$).

Vektory sú *kolineárne,* ak existuje priamka, ktorá je s nimi rovnobežná (t. j. vektor je rovnobežný s priamkou, ak je reprezentant je rovnobežný s danou priamkou alebo na nej leží). Nulový vektor je kolineárny s každým vektorom.

Nech orientované úsečky sú reprezentantmi vektorov $\vec{a}, \vec{b}$, $(\overrightarrow{AB} \in \vec{a}, \overrightarrow{CD} \in \vec{b})$. Vektory $\vec{a}, \vec{b}$ sú *súhlasne rovnobežné*, ak sú súhlasne rovnobežne orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, označenie je $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Vektory $\vec{a}, \vec{b}$ sú *nesúhlasne rovnobežné*, ak sú nesúhlasne rovnobežne orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, označenie je $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

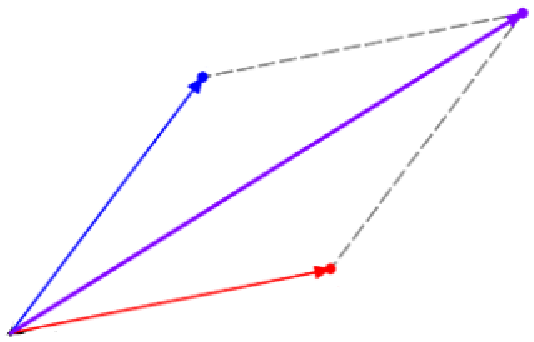
Nech $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Vektor $\overrightarrow{BA}$ je *opačný vektor* k vektoru $\vec{a}$, označenie opačného vektora je $-\vec{a}$. Opačný vektor k nulovému vektoru je nulový vektor, tiež platí: $-(-\vec{a})$=$\vec{a}$.

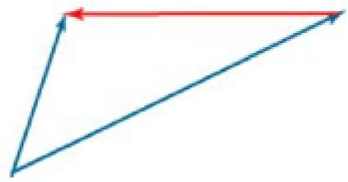
*Veľkosť vektora* je dĺžka ľubovoľného reprezentanta tohto vektora, označenie $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\overrightarrow{AB}|$, ... Tiež platí: $|\vec{a}| = 0$, vektor má nulovú dĺžku a $|\vec{a}| = 1$, daný vektor nazývame *jednotkovým vektorom.*

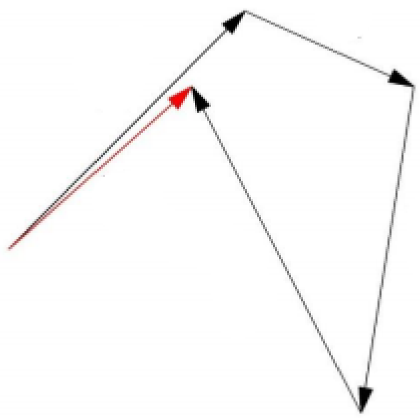
## 4.2 Operácie s vektormi, lineárna závislosť a nezávislosť vektorov

Nech $\vec{a}, \vec{b}$ sú ľubovoľné vektory, bod *A* je ľubovoľný vektor a $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Zostrojme bod C tak, aby $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, potom vektor $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ nazývame *súčtom vektorov* $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Súčet vektorov $\vec{a}$ , $\vec{b}$ nezávisí od voľby bodu *A*.

Pre dva nekolineárne vektory a ich súčet platí trojuholníkové pravidlo a pravidlo rovnobežníka. Pre n nekolineárnych vektorov platí pravidlo mnohouholníka.







Pre ľubovoľné vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ platia vety:

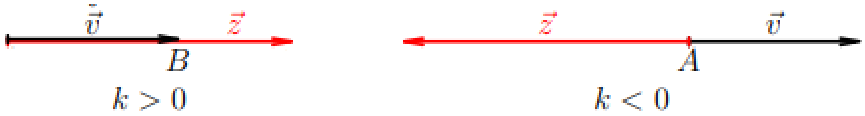
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutatívny zákon),
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (asociatívny zákon).

*Rozdiel vektorov* $\vec{a}, \vec{b}$ vždy existuje a je nimi jednoznačne určený, označenie: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Súčinom vektora $\vec{v}$ a reálneho čísla *k* sa nazýva vektor $\vec{z}$, pre ktorý platí:

- $|\overrightarrow{z}| = |k|.|\vec{v}|$, kde $|k|$ je absolútna hodnota čísla $k$,
- vektory $\vec{v}, \vec{z}$ sú súhlasne rovnobežné, ak $k \geq 0$,
- vektory $\vec{v}, \vec{z}$ sú nesúhlasne rovnobežné, ak $k < 0$.

Vektor $\vec{p} = k.\vec{a}$ nazývame aj tzv. skalárnym súčinom vektora $\vec{a}$.




Pre ľubovoľné reálne čísla $k$, $l$ a ľubovoľný vektor $\vec{a}$ platí:

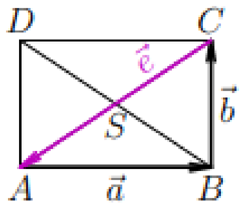
- $1.\vec{a} = \vec{a}$,
- $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$,
- $k(l\vec{a}) = (k.l)\vec{a}$,
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$,
- $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.

*Príklad 1.*

Daný je obdĺžnik *ABCD* so stredom *S*. Dané sú vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Vyjadrite pomocou vektorov $\vec{a}, \vec{b}$ vyjadrite vektory $\vec{e} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{f} = \overrightarrow{DS}$.

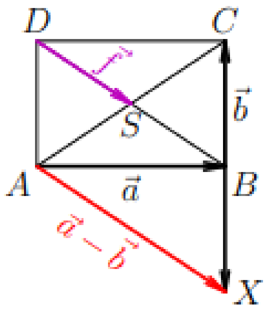
*Riešenie:*

Vyznačíme si v obrázku zadané vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$.




Súčtom vektorov $\vec{a}, \vec{b}$ je vektor $\overrightarrow{AC}$, čo je opačný vektor k vektoru $\vec{e}$. Z uvedeného teda vyplýva, že $\vec{e} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$ .

V tomto prípade najskôr využijeme opačný vektor k vektoru $\vec{b}$ a zakreslíme rozdiel vektorov $\vec{a} - \vec{b}$. Platí $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{AX}$. Môžeme teraz zistiť vzťah medzi vektormi $\vec{a} - \vec{b}, \vec{f}$, a teda platí $\vec{f} = \overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.



Ak vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ sú *kolineárne* $(\vec{a} \neq \vec{0})$, potom existuje jediné reálne číslo $k$ také, že $\vec{b} = k\vec{a}$.

Vektor $\vec{a}$ je rovnobežný s rovinou $\sigma$, ak je rovnobežný s niektorou priamkou ležiacou v rovine $\sigma$. Ak je vektor $\vec{a}$ rovnobežný s rovinou $\sigma$, potom je rovnobežný s každou rovinou rovnobežnou s rovinou $\sigma$. Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nazývame *komplanárnymi*, ak existuje rovina, s ktorou sú rovnobežné (ak je aspoň jeden vektor nulový, potom sú vektory vždy komplanárne). Inak sú vektory *nekomplanárne.* Ak vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sú *komplanárne*, ale $\vec{a}$, $\vec{b}$ sú nekolineárne, potom existujú jediné reálne čísla $k, l$ také, že platí $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

Nech $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{n}$ sú vektory a $k, l, \dots, w$ sú reálne čísla. Potom vektor $\vec{b} = k\vec{a} + \cdots + w\vec{n}$ sa nazýva *lineárnou kombináciou* vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{n}$

Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{n}$ sa nazývajú *lineárne závislými*, ak aspoň jedno z čísel $k, l, \dots, w$ sa nerovná nule a platí $\vec{0} = k\vec{a} + \cdots + w\vec{n}$. Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{n}$ sa nazývajú *lineárne nezávislými,* ak $k = l = \cdots = w = 0$ a platí $\vec{0} = k\vec{a} + \cdots + w\vec{n}$.

Pre vektory platia aj nasledujúce vety:

- pri $n > 1$ sústava *n* vektorov je lineárne závislá práve vtedy, ak aspoň jeden z nich je lineárnou kombináciou ostatných vektorov tejto sústavy,
- ak ľubovoľný počet sústavy *n* vektorov je lineárne závislá, potom celá sústava je lineárne závislá,
- sústava lineárne nezávislých vektorov neobsahuje nulový vektor,
- ak je sústava vektorov lineárne nezávislá, potom každá jej časť je lineárne nezávislá,
- sústava vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ je lineárne závislá práve vtedy, ak tieto vektory sú kolineárne,
- sústava vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je lineárne závislá práve vtedy, ak sú tieto vektory komplanárne.

## 4.3 Súradnice vektora, súradnicová sústava v rovine a v priestore

Najskôr definujme bázu vektorového priestoru. *Bázou vektorového priestoru* nazývame sústavu vektorov s nasledujúcimi vlastnosťami:

- vektory sústavy sú dané v určitom poradí,
- sústava je lineárne nezávislá,
- každý vektor priestoru je lineárnou kombináciou bázy.

Počet vektorov bázy sa nazýva *rozmer* (dimenzia) vektorového priestoru. Rozmer roviny je dva (označujeme ako trojrozmerný vektorový priestor) a rozmer priestoru je tri (označujeme ako trojrozmerný vektorový priestor). Bázové vektory $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ sú vektory bázy priestoru, zápis je $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle$. Nasledujúce zápisy $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle, \langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} \rangle, \langle \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1} \rangle$ sú rôzne bázy daného vektorového priestoru.

Nech $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ je báza a vektor $\vec{a}$ je ľubovoľný vektor priestoru. Potom platí $\vec{a} = a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ , vektor sme rozložili na tri vektory v danej báze. Súradnice vektora $\vec{a}$ v danej báze sú $a_1, a_2, a_3$, označenie je $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

Pre operácie s vektormi $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ platia nasledujúce vety:

- Každá súradnica súčtu dvoch vektorov sa rovná súčtu odpovedajúcich si súradníc daných vektorov.

  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

- Každá súradnica rozdielu dvoch vektorov sa rovná rozdielu odpovedajúcich si súradníc daných vektorov.

  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

- Každá súradnica skalárneho násobku vektora sa rovná tomu istému násobku odpovedajúcej si súradnice daného vektora.

  $k.\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$

Nutnou a postačujúcou podmienkou toho, aby vektory $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ v súradnicovej báze $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ boli kolineárne je, aby ich súradnice boli ľubovoľným násobkom.

Báza $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ sa nazýva *ortonormálna*, ak vektory $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ spĺňajú podmienky:

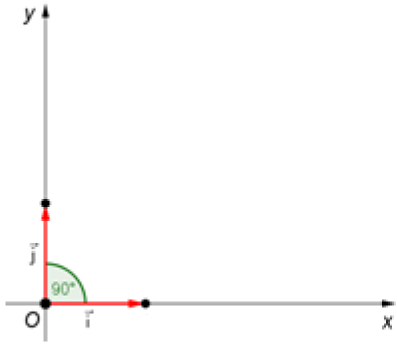
- $|\ \vec{\imath}\ | = |\ \vec{\jmath}\ | = |\ \vec{k}\ | = 1$,
- ak $\overrightarrow{OE_1} = \vec{\imath}, \overrightarrow{OE_2} = \vec{\jmath}, \overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$, potom $\sphericalangle E_1OE_2, \sphericalangle E_2OE_3, \sphericalangle E_3OE_1$ sú pravé.

*Veľkosť vektora* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ určeného v ortonormálnej báze $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ je $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Definujme pravouhlú súradnicovú sústavu v rovine, v ktorej sú súradnicové vektory na seba kolmé a sú jednotkové. Takúto súradnicovú sústavu nazývame aj *karteziánskou sústavou súradníc.*

Označme *O* ako začiatok súradnicovej sústavy, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ ako súradnicové vektory a *x*, *y* ako súradnicové osi. Potom karteziánskú súradnicovú sústavu označujeme trojicu $\langle O, x, \vec{\jmath} \rangle$. Nech $\langle O, \vec{\imath}, \vec{\jmath} \rangle$ je afinná súradnicová sústava, *M* ľubovoľný bod roviny, vektor $\overrightarrow{OM}$

je polohový vektor. Súradnice *x, y* vektora $\overrightarrow{OM}$ v báze $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ nazývame *súradnicami bodu M* v sústave súradníc $\langle O, \vec{\imath}, \vec{\jmath} \rangle$, označenie je $M[x, y]$.



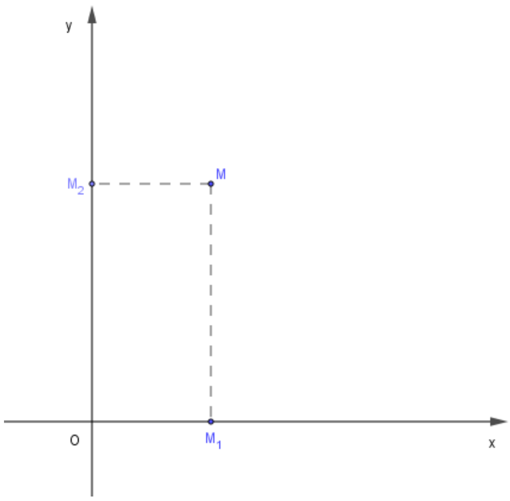

Pre každý ľubovoľný bod *M* v $\langle O, x, y \rangle$ so súradnicami *x, y* platí $x\vec{\imath} = \overrightarrow{OM_1}$, $y\vec{\jmath} = \overrightarrow{OM_2}$, kde $M_1, M_2$ sú pravouhlými priemetmi bodu *M* na osi *x, y.* Platí:

$$M[x, y] => \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

$$x\vec{\imath} \parallel \vec{\imath}, \; y\vec{\jmath} \parallel \vec{\jmath}$$

a existujú body $M_1 \in x, M_2 \in y$: $x\vec{\imath} = \overrightarrow{OM_1}, y\vec{\jmath} = \overrightarrow{OM_2}$,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}, \text{ t. j. } MM_1 \parallel y, \; MM_2 \parallel x.$$




Dané sú dva body $A[x_1, y_1]$, $B[x_2, y_2]$ v karteziánskej sústave súradníc, potom $|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Teraz definujme pravouhlú súradnicovú sústavu v priestore. Zvoľme ľubovoľný bod *O*, ľubovoľnú bázu $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ priestoru. *Karteziánskou sústavou súradníc v priestore* nazveme štvoricu $\langle O, x, y, z \rangle$. Použijeme ďalej nasledujúce označenia:

*O* – začiatok súradníc,

$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ - súradnicové vektory,

$\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$– súradnicové osi,

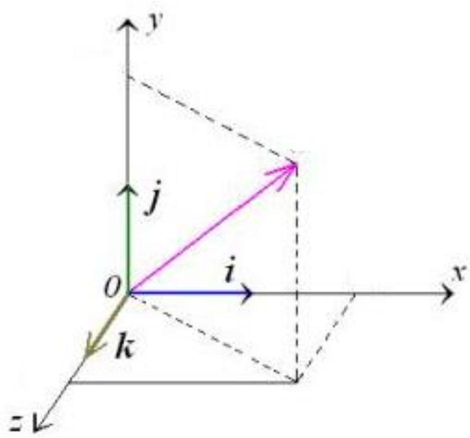
$\overleftrightarrow{Oxy}, \overleftrightarrow{Oxz}, \overleftrightarrow{Oyz}$ - súradnicové roviny,

*Oxyz* – sústava súradníc.

Nech $\langle O, x, y, z\rangle$je sústava súradníc, bod *M* je ľubovoľný bod priestoru, $\overrightarrow{OM}$ je polohový vektor bodu *M* vzhľadom na bod *O*.

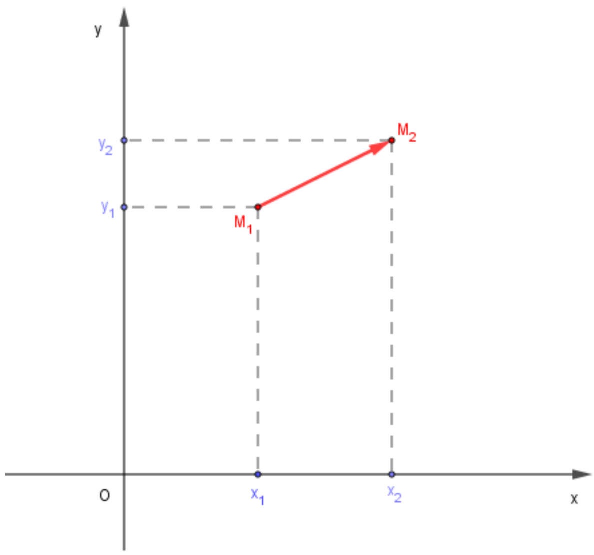
Súradnice vektora $\overrightarrow{OM}$ v báze $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ nazývame súradnicami bodu *M* v$\langle O, x, y, z\rangle$, označujeme $M[x, y, z]$, pričom $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Pre polohový vektor $\overrightarrow{OM}$ platí: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

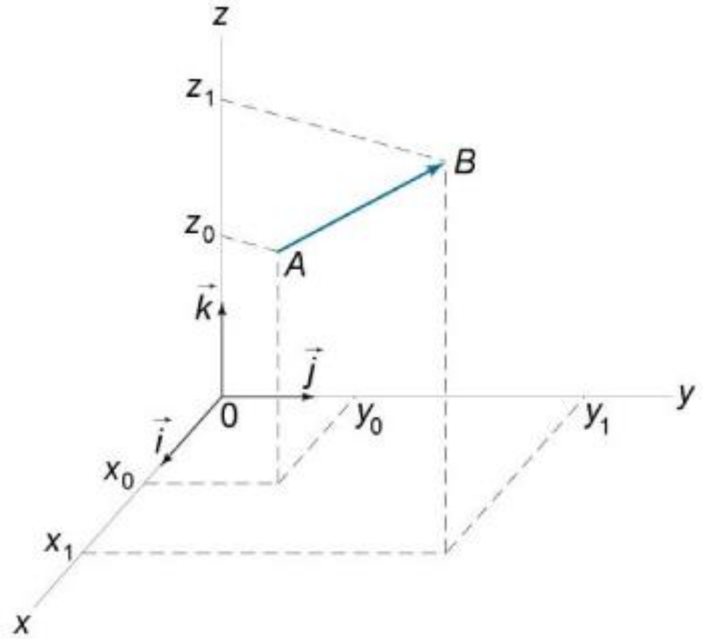



Každá súradnica vektora sa rovná rozdielu odpovedajúcich súradníc koncového a začiatočného bodu vektora.

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



Podobný vzťah platí aj pre súradnice vektora v priestore.




Súradnice stredu $S[x, y, z]$ úsečky *AB*, kde $A[x_1, y_1, z_1], B[x_2, y_2, z_2]$ sú $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z = \frac{z_1+z_2}{2}$.

Rozlišujeme pravotočivú, t. j. kladne orientovanú v priestore sústavu súradníc alebo ľavotočivú, t. j. záporne orientovanú v priestore sústavu súradníc.

V karteziánskej sústave súradníc $\langle O, x, y, z\rangle$sú dané body $M_1[x_1,\ y_1, z_1], M_2[x_2,\ y_2, z_2]$, potom pre vzdialenosť bodov $M_1,\ M_2$ platí: $|M_1, M_2| = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$.

*Poznámka*. Nech *L* je neprázdna množina vektorov z vektorového priestoru *V*. Potom *L* sa nazýva vektorovým podpriestorom priestoru *V,* ak platí:

- $\vec{a}\epsilon L, \vec{b}\epsilon L \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})\epsilon L$,
- $\vec{a}\epsilon L \Rightarrow \alpha\vec{a}\epsilon L$, pre $\alpha\epsilon R$.

Bázou vektorového podpriestoru *L* nazývame takú usporiadanú sústavu lineárne nezávislých vektorov, ak každý vektor podpriestoru *L* je lineárnou kombináciou danej sústavy vektorov. Počet vektorov bázy je dimenziou podpriestoru *L.*

*Príklad 2.*

Vypočítajte súradnice a veľkosť vektora $2\vec{m} - \vec{n}$, ak $\vec{m} = \overrightarrow{MN}$, $M[3,0], N[5,-1], \vec{n}(-3,2)$.

*Riešenie:*

Vypočítame najskôr súradnice vektora $\vec{m} = \overrightarrow{MN} = N - M = (5-3, -1-0) = (2, -1)$. Tiež vyjadrime vektor $2\vec{m} = 2.(2,-1) = (4,-2)$, preto rozdiel vektorov je $2\vec{m} - \vec{n} = (4,-2) - (-3,2) = (4+3, -2-2) = (7,-4)$.

Ešte nám zostáva vypočítať dĺžku výsledného vektora, využijeme na to dosadenie do vzťahu: $|2\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$ .

*Príklad 3.*

Dané sú tri rôzne body $A[-3,-2], B[1,4], B[-5,0]$. Tvoria tieto body trojuholník? Ak áno, tak zistite, aký je to typ trojuholníka.

*Riešenie:*

Nech $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,6)$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-2,-2)$. Ak by boli vektory $\vec{u}, \vec{v}$ kolineárne, tak body *A, B, C* ležia na jednej priamke. Pre kolineárne vektory platí vzťah $\vec{u} = k.\vec{v}$. Dosadíme súradnice vektorov:

$$(4,6) = k.(-2,-2)$$

$$\underline{(4,6) = (-2k, -2k)}$$

$$4 = -2k \Rightarrow k = -2$$

$$6 = -2k \Rightarrow k = -3$$

Z uvedených hodnôt vyplýva, že neexistuje jediná hodnota pre *k*, a tak body neležia na jednej priamke a môžu tvoriť vrcholy trojuholníka.

Aby sme zistili o aký typ trojuholníka ide, vypočítame dĺžky všetky vektorov, ktoré sú umiestnime na jednotlivé strany daného trojuholníka, t. j. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}, \vec{w} = \overrightarrow{BC}$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,6)$$

$$|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-2,-2)$$

$$|\vec{v}| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-6,-4)$$

$$|\vec{w}| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Trojuholník *ABC* je rovnoramenný.

*Príklad 4.*

Dokážte, že vektory $\vec{u}(2,-1{,}0), \vec{v}(1{,}0{,}4), \vec{w}(3,-2,-4)$ sú lineárne závislé.

*Riešenie:*

Lineárne závislé vektory sú vtedy, ak aspoň jeden z týchto troch vektorov je lineárnou kombináciou ostatných dvoch vektorov, preto napríklad platí vzťah $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$.

Dosadíme súradnice daných vektorov:

$$\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$$

$$(3,-2,-4) = k.(2,-1{,}0) + l.(1{,}0{,}4)$$

$$\underline{(3,-2,-4) = (2k,-k,0) + (l,0{,}4l)}$$

$$3 = 2k + l$$

$$-2 = -k \Longrightarrow k = 2$$

$$\underline{-4 = 4l \Longrightarrow l = -1}$$

Dosadením do tretej rovnici overíme riešenie:

$$3 = 2.2 + (-1)$$

$$3 = 3$$

Hodnoty $k = 2, l = -1$ vyhovujú aj tretej rovnici, teda sústava rovníc má práve jedno riešenie. Znamená to, že vektor $\vec{w}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ a môžeme zapísať túto vlastnosť vektorov aj vzťahom:

$$\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sú lineárne závislé.

*Úlohy na precvičenie*

1. Zvoľte si dva vektory $\vec{m}, \vec{n}$ a graficky znázornite nasledujúce vektory:

   a) $\vec{m} - 5\vec{n}$,
   b) $2\vec{m} + 3\vec{n}$,
   c) $-\vec{m} - 2\vec{n}$.

2. Vektory $\vec{s} = B - A, \vec{t} = C - B,\ \vec{u} = D - C,\ \vec{v} = E - D,\ \vec{w} = A - E$ sú totožné so stranami pravidelného päťuholníka *ABCDE*. Zostrojte vektory:

   a) $-\vec{s} + \vec{t} - \vec{u}$,
   b) $-\vec{s} + 2\vec{t} - \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w}$.

3. V obdĺžniku *ABCD* platí $\vec{u} = \overrightarrow{AC}, \vec{v} = \overrightarrow{BD}$. Vyjadrite vektory, ktorými sú určené jeho stranami, pomocou $\vec{u}, \vec{v}$.
4. Je daný štvoruholník *ABCD*. Dokážte, že stredy jeho strán tvoria rovnobežník.
5. Daná je úsečka *AB*. Vyjadrite jej stred S pomocou bodov *A*, *B*.
6. Daný je trojuholník *ABC*. Vyjadrite pomocou bodov *A*, *B*, *C* sú radnice jeho ťažiska *T*.
7. Daný je štvorsten *ABCD*. Vyjadrite pomocou bodov *A*, *B*, *C*, *D* súradnice jeho ťažiska *T*.
8. V danej karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, x, y \rangle$, resp. $\langle O, x, y, z \rangle$ vypočítajte súradnice nasledujúcich vektorov:

   a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, A[1,2], B[4,-3]$,
   b) $\vec{v} = \overrightarrow{DC}, D[2,2], C[-1,4]$,
   c) $\vec{u} + \vec{v}, -\vec{u} + 5\vec{v}$, $\vec{u}, \vec{v}$ sú zadané v a), b),
   d) $\vec{p} = \overrightarrow{PR}, P[1,1,3], B[4,3,2]$,
   e) $\vec{q} = \overrightarrow{QS}, Q[-2,6,0], S[2,-4,-3]$,
   f) $5\vec{p} - 3\vec{q}, -\vec{q} - 8\vec{v}$, $\vec{u}, \vec{v}$ sú zadané v d), e).
9. Rozhodnite, či body $A[1,2,3], B[3,5,7], C[10,11,12]$ ležia na jednej priamke.
10. Určte druhú súradnicu bodu $C[4, y]$ tak, aby body $A[3,2], B[6,-1]$, *C* ležali na priamke.
11. Rozhodnite, či body $A[3,1,2], B[2,-1,-2], C[0,3,5], D[-3,0,2]$ ležia v jednej rovine.
12. Dané sú body $A[1,2,3], B[4,7,9], C[7,-2,-1]$. Určte súradnice bodu *D* tak, aby *ABCD* bol rovnobežník.
13. Zistite, či vektor $\vec{w}(0,6,3)$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u}(2,0,1)$, $\vec{v}(-1,3,2)$.
14. Dokážte, že vektory $\vec{u}(3,-2,1)$, $\vec{v}(-1,1,-2)$, $\vec{w}(2,1,-3)$ sú lineárne nezávislé.
15. Vyjadrite vektor $\vec{t}(11,-6,5)$ pomocou vektorov $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ z úlohy 14.

## 4.4 Skalárny, vektorový a zmiešaný súčin vektorov

Uhlom vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ nazývame konvexný uhol určený polpriamkami $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, ktoré nesplývajú ($\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$), označenie $\sphericalangle AOB$. Pre nulový uhol platí, že polpriamky $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ splývajú. Uhol určený vektormi nezávisí od voľby bodu *O*.

Dva nenulové vektory $\vec{a}$, $\overrightarrow{b}$ nazývame kolmými (ortogonálnymi), ak medzi nimi je pravý uhol. Nulový vektor je kolmý na každý iný vektor.

*Skalárnym súčinom ľubovoľných dvoch vektorov a, b* nazývame číslo $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$.

Pre skalárny súčin dvoch vektorov platia nasledujúce vety:

- $\vec{a}.\overrightarrow{b}$ *= 0* práve vtedy, keď sú vektory navzájom kolmé (platí aj ak jeden vektor je nulový),
- číslo $\vec{a}.\overrightarrow{a}$ nazývame *skalárnym štvorcom vektora* $\vec{a}$, platí: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$,
- skalárnym súčinom vektorov $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, ktorých súradnice sú v ortonormálnej báze sa rovná $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$,
- vektory $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ ktorých súradnice sú v ortonormálnej báze, sú navzájom ortogonálne práve vtedy, keď $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$,
- kosínus uhla dvoch nenulových vektorov $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, ktorých súradnice sú dané v ortonormálnej báze, vypočítame pomocou vzťahu $$cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Ďalšie vety pre $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ľubovoľné vektory a pre $k \in R$ sú:

- $\vec{a}.\vec{b}$=$\vec{b}.\vec{a}$,
- $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$,
- $\vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$,
- $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$,
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d}$,

Nech $\vec{a}, \vec{b}$ sú dva ľubovoľné nenulové vektory. *Vektorovým súčinom vektorov* $\vec{a}, \vec{b}$ (v tomto poradí) je vektor $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$, definovaný takto:

- vektor $\vec{v}$ je kolmý na každý z vektorov $\vec{a}, \vec{b}$,
- $|\vec{v}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$,
- usporiadaná trojica vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ tvorí pravotočivú sústavu súradníc.

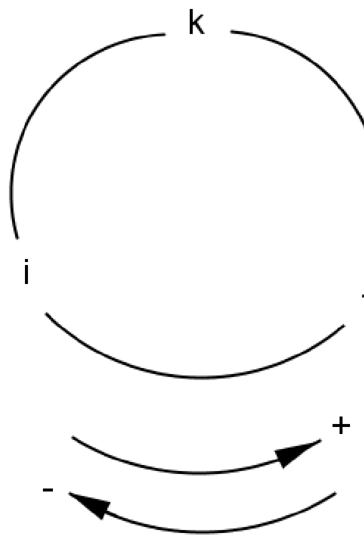
Ak aspoň jeden z vektorov $\vec{a}, \vec{b}$ je nulový, tak $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

*Poznámka.* Geometrický význam vektorového súčinu: veľkosť vektora a obsah rovnobežníka určeného vektormi $\vec{a}, \vec{b}$.

*Vektorový súčin* dvoch nenulových vektorov $\vec{a}, \vec{b}$ je nulovým vektorom práve vtedy, keď dané vektory sú kolineárne, t. j. práve vtedy, keď $\vec{b} = m\vec{a}$.

Pre vektorové súčiny súradnicových vektorov $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ platia vzťahy: $\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{0}, \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{0}$, $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}, \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}, \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}, \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$.

Môžeme pri vektorovom súčine dvoch rôznych vektorov $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ použiť aj nasledujúcu schému:




Uvedieme najdôležitejšie vlastnosti pre vektorový súčin dvoch vektorov:

- ak sú vektory $\vec{a}, \vec{b}$ dané súradnicami $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ v ortonormálnej báze, potom ich pre vektorový súčin platí:
  $\vec{a} \times \vec{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ alebo $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$,
- ak $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú ľubovoľné vektory a $m_1, m_2$ ľubovoľné reálne čísla, potom platí:
  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
  $m_1\vec{a} \times m_2\vec{b} = m_1 m_2 (\vec{a} \times \vec{b})$
  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- pre výpočet obsahu rovnobežníka *ABCD*, kde $\vec{a} = \overrightarrow{CB}, \vec{b} = \overrightarrow{CD}$ platí: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$,
- pre obsah trojuholníka *ABC,* kde $\vec{a} = \overrightarrow{CB}, \vec{b} = \overrightarrow{CA}$ platí: $S_1 = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

*Zmiešaným súčinom* usporiadanej trojice ľubovoľných vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nazývame skalárny súčin vektorov $\vec{a}, (\vec{b} \times \vec{c})$, označujeme $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$.

Nech je daná karteziánska sústava súradníc $\langle O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} \rangle$ a vektory $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, potom $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = \vec{a}.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Nech vektory $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ sú nekomplanárne, potom rovnobežnosten nimi určený má objem $V = \left|\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\right|$. Príslušný štvorsten (z daného rovnobežnostena) má objem $V_1 = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\right|$.

Zmiešaný súčin $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = 0$ práve vtedy keď, aspoň jeden z vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je nulový vektor alebo vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú komplanárne.

Pre zmiešaný súčin usporiadanej trojice vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ platí:

- $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = \vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\vec{a} = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b} = \vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) =$
  $= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c}$,
- $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = -\vec{a}\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) = -\left(\vec{c} \times \vec{b}\right)\vec{a} = -\vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) = -(\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} = -\vec{c}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) =$
  $= -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)\vec{c}$.

Ak sú vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ľubovoľné vektory a $m \in R$, potom tiež platí:

- $\left[\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c}\vec{d}\right] = \left[\vec{a}\vec{c}\vec{d}\right]$+$\left[\vec{b}\vec{c}\vec{d}\right]$,
- $\left[(m\vec{a})\vec{b}\vec{c}\right] = m\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]$,
- ak aspoň dva vektory sa rovnajú, potom napr. $\left[\vec{a}\vec{a}\vec{b}\right] = 0$.

*Príklad 5.*

Akého typu je štvoruholník *ABCD*, ak $A[5; 2; 6]$, $B[6; 4; 4]$, $C[4; 3; 2]$, $D[3; 1; 4]$.

*Riešenie:*

Najskôr vypočítame súradnice vektorov, ktoré sú totožné so stranami daného štvoruholníka, potom zistíme dĺžky daných vektorov:

$$\overrightarrow{AB}(1,2,-2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\overrightarrow{BC}(-2,-1,-22) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

$$\overrightarrow{DC}(1,2,-2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\overrightarrow{AD}(-2,-1,-22) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Daný štvoruholník je teda rovnobežníkom vzhľadom na to, že vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ a $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ sú lineárne závisle. Z dĺžok týchto vektorov zase vyplýva, že ide o štvorec alebo o kosoštvorec.

Využijeme skalárny súčin vektorov so spoločným vrchom na zistenie, či sú tieto vektory kolmé, vtedy je daný štvoruholník *ABCD* štvorcom, alebo vektory nie sú kolmé a štvoruholník *ABCD* je kosoštvorcom.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) = 0$$

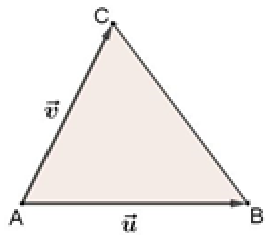
Vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ sú na seba kolmé, a keďže sú dĺžky strán zhodné, tak daný štvoruholník je štvorec.

*Príklad 6.*

Vypočítajte obsah trojuholníka *ABC*, ak $A[7,3,4]$, $B[1,0,6]$, $C[4,5,-2]$.

*Riešenie:*

Na výpočet obsahu trojuholník *ABC* využijeme vzťah $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$ a pre vektory $\vec{u}, \vec{v}$ platí: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.




Vypočítajme súradnice týchto vektorov:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-6, -3, 2)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 2, -6)$$

Pre vektorový súčin $\vec{u} \times \vec{v}$ platí: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 18\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 12\vec{k} - \left(4\vec{\imath} + 36\vec{\jmath} + 9\vec{k}\right) = 18\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 12\vec{k} - 4\vec{\imath} - 36\vec{\jmath} - 9\vec{k} = 14\vec{\imath} - 42\vec{\jmath} - 21\vec{k} = (14, -42, -21)$.

Obsah trojuholníka *ABC* je polovicou z dĺžky vektora, ktorý sme získali vektorovým súčtom $\vec{u} \times \vec{v}$. Platí:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = \sqrt{2401}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} . 49 = 24{,}5\ j^2$$

Obsah trojuholníka *ABC* je $24{,}5\ j^2$.

*Príklad 7.*

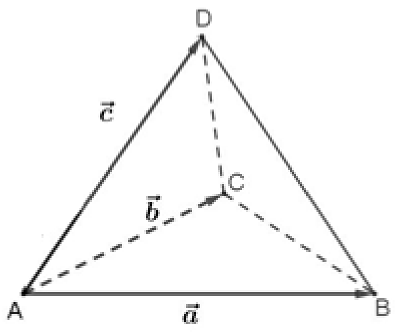
Daný je štvorsten *ABCD*, kde $A[1,-5,4]$, $B[0,3,1]$, $C[-2,-4,3]$ a $D[-4,4,-2]$.

*Riešenie:*

Objem štvorstena *ABCD* vypočítame pomocou zmiešaného súčinu, t. j. zo vzťahu:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$$

Zvolíme si vektory nasledovne: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ a $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$.




Súradnice vektorov $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sú:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-1,8,-3)$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=C-A=(-3,1,-1)$$

$$\vec{c}=\overrightarrow{AD}=D-A=(-5,9,-6)$$

Najskôr vypočítame súradnice vektora $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\begin{array}{c|cccccc} \vec{a} & -1 & 8 & -3 & -1 & 8 & -3 \\ \vec{b} & -3 & 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(8\cdot(-1)-1\cdot(-3);(-3)\cdot(-3)-(-1)\cdot(-1);(-1)\cdot 1-(-3)\cdot 8)\\&=(-5;\ 8;\ 23)\end{aligned}$$

Pre skalárny súčin vektorov $\vec{a}\times\vec{b}$ a $\vec{c}$ platí:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=(-5)\cdot(-5)+8\cdot 9+23\cdot(-6)=25+72-138=-41$$

Dosadíme do vzorca pre objem štvorstena *ABCD* vypočítané hodnoty:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot|-41|=\frac{41}{6}j^3$$

Objem štvorstena *ABCD* je $\frac{41}{6}j^3$.

*Úlohy na precvičenie*

1. Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{m}, \vec{n}$, ak poznáte ich dĺžky a uhol $\varphi$, ktorý zvierajú:

   a) $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = 3, \varphi = 60°$,
   b) $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = \sqrt{2}, \varphi = 135°$.

2. Vypočítajte veľkosť vektorov $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$, ak $\vec{u}(3, -5{,}8), \vec{v}(-1{,}1, -4)$.

3. Dané sú vektory $\vec{u}(3, -2), \vec{v}(x, 2)$. Vypočítajte *x*, ak $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$.

4. Rozhodnite, akého druhu je štvoruholník *ABCD*, ak $A[0, 0]$, $B[3, -4]$, $C[6{,}0]$, $D[3{,}4]$.

5. Vypočítajte veľkosť uhlov v trojuholníku *ABC*, ak $A[2, -1]$, $B[1{,}1]$, $C[0{,}0]$.

6. Dané sú body $A[6{,}2{,}2]$, $B[0{,}4{,}7]$, $C[2{,}0{,}5]$.

   a) dokážte, že body *A*, *B*, *C* tvoria trojuholník *ABC*,
   b) vypočítajte súradnice vrcholu *D* rovnobežníka *ABCD*,
   c) vypočítajte obvod rovnobežníka *ABCD*,
   d) vypočítajte súradnice stredu rovnobežníka *ABCD*.

7. Dané sú body $A[-\ 2{,}0]$, $B[4, -6]$. Určte:

   a) súradnice bodu *C* tak, aby trojuholník *ABC* bol rovnostranný,
   b) vypočítajte dĺžku strany *AC*,
   c) vypočítajte veľkosť uhla pri vrchole *A*,
   d) vypočítajte dĺžku ťažnice na stranu $a$ a súradnice ťažiska.

8. V kocke s hranou *a* vypočítajte uhol telesových uhlopriečok.

9. V kocke s hranou *a* vypočítajte uhol telesovej a stenovej uhlopriečky.

10. Daná je kocka *ABCDFEFGH*. Vypočítajte uhol vektorov:

    a) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{FD}$,
    b) $\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FH}$.

11. Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*, kde jeho podstavná hrana má dĺžku 6 cm a výška $v = 3\sqrt{2}\ cm$. Vypočítajte uhol $\overleftrightarrow{VA}, \overleftrightarrow{BC}$.

12. Vypočítajte vektorový súčin vektorov $\vec{u}, \vec{v}$, ak poznáte ich dĺžky a uhol $\varphi$, ktorý zvierajú:

    a) $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 2, \varphi = 90°$,
    b) $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = \sqrt{2}, \varphi = 135°$.

13. Vypočítajte veľkosť vektora $|\vec{u} \times \vec{v}|$, ak $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 2, \varphi = 60°$.

14. Vypočítajte $\vec{a} \times \vec{b}$, ak $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$, $A[2, 2, -1]$, $B[2,1,0]$, $C[-1,2,2]$, $D[2,1,3]$.

15. Vypočítajte obsah a obvod trojuholníka *ABC* a výšku na stranu *AC*, ak:

    a) $A[3, 1,4]$, $B[0,2,1]$, $C[5,0,8]$,
    b) $A[1, -2,8]$, $B[0,0,4]$, $C[6,2,0]$.

16. Vypočítajte obsah rovnobežníka *ABCD*, ak $A[0, 4,7]$, $B[2,2,2]$, $D[6,1,5]$.

17. Vypočítajte zmiešaný súčin vektorov $\vec{a}, \vec{b}\ \vec{c}$, ak poznáte:

    a) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 2,\ \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°, \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = 150°, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = 90°$,
    b) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 4,\ \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°, \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = 90°, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = 90°$.

18. Dané sú vektory $\vec{a}(2, -3,2), \vec{b}(2,2, -1), \vec{c}(1,2,2)$. Vypočítajte $(\vec{a} \times \vec{b}). \vec{c}$, $\vec{b}. (\vec{a} \times \vec{c}), \vec{c}. (\vec{a} \times \vec{b})$. Výsledky potom porovnajte.

19. Daný je štvorsten *ABCD*. Vypočítajte jeho objem a vzdialenosť bodu *A* od steny *BCD*, ak $A[2, -1, -2]$, $B[1,2,1]$, $C[2,3,0]$, $D[5,0, -6]$.

20. Vypočítajte objem rovnobežnostena *ABCDEFGH*, ak $A[2,1,0]$, $B[0,2,0]$, $D[-2,3,0]$, $E[3,2, -6]$.

# 5 Rovnice lineárnych útvarov v rovine a v priestore. Polohové a metrické vlastnosti lineárnych útvarov v priestore

Vlastnosti vektorov, ktoré sme uviedli v štvrtej kapitole, teraz využijeme v rámci rôznych aplikácií súvisiacich s analytickými vyjadreniami priamok a rovín, ich polohovými a metrickými vlastnosťami v rovine, ale aj v priestore. Tieto aplikácie popíšeme jednak z teoretického hľadiska, ale uvádzame aj konkrétne úlohy k daným témam.

## 5.1 Rovnice lineárnych útvarov v rovine a v priestore

*Smerový vektor* priamky je ľubovoľný nenulový vektor, rovnobežný s danou priamkou. Z uvedeného vyplýva, že priamka má nekonečne veľa smerových vektorov, každé dva smerové vektory sú kolineárne, pretože sú rovnobežné s danou priamkou.

Daná je priamka *p* smerový vektorom $\vec{a}(a_1, a_2)$ a bodom $M_0[x_0,\ y_0]$. Pre ľubovoľný bod $X[x, y]$ priamky $p$ platí, že vektory $\overrightarrow{M_0X}$ a $\vec{a}$ sú kolineárne. Uvedenú vlastnosť vieme zapísať vzťahom: $\overrightarrow{M_0X} = t\vec{a};\, t \in R$, a teda pre každý bod $X$ priamky $p$ platí:

$$X - M_0 = t\vec{a}$$

$$\underline{X = M_0 + t\vec{a}, t \in R}$$

$$x = x_0 + a_1 t$$

$$y = y_0 + a_2 t, t \in R$$

Uvedené rovnice nazývame *parametrickými rovnicami* priamky *p* v rovine.

*Poznámka.* Parameter pre polpriamku je $t \geq 0$ a parameter pre úsečku $0 \leq t \leq 1$.

Parametrické rovnice priamky *p* v priestore vieme odvodiť podobne ako v rovine:

$$\underline{X = M_0 + t\vec{a}, t \in R}$$

$$x = x_0 + a_1 t$$

$$y = y_0 + a_2 t$$

$$z = z_0 + a_3 t, t \in R$$

Ďalším typom rovnice priamky v rovine je *smernicový tvar* rovnice priamky. Táto rovnica je určená bodom a smernicou. Číslo $k = tg\varphi$, kde $\varphi$ je smerový uhol priamky, nazývame *smernicou* priamky. Ak $k = 0$, tak priamka je rovnobežná s osou $O_x$. Priamka je rovnobežná s osou $O_y$, tak priamka smernicu nemá.

Nech je priamka *p* daná bodom $M_0[x_0,\ y_0]$ a smernicou *k*, potom platí:

$$M \in p => k = tg\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Ak miesto bodu $M_0[x_0,\ y_0]$ zvolíme bod $B[0,\ q]$ ako priesečník priamky *p* s osou *y,* tak $y = kx + q$ je *smernicovým tvarom* rovnice priamky.

*Poznámka.* Ak poznáme smerový vektor $\vec{a}(a_1, a_2)$ priamky *p*, tak $k = \frac{a_2}{a_1}, a_1 \neq 0$.
Pre priamku určenú dvoma rôznymi bodmi $M_1[x_1,\ y_1]$, $M_2[x_2,\ y_2]$ platí:

- $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,
- $\mathrm{y} - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$.

V rovine môže mať priamka rovnicu aj vo *všeobecnom tvare*. Ľubovoľná priamka v rovine vzhľadom na karteziánsku sústavu súradníc môže byť určená rovnicou prvého stupňa tvaru:

$$ax + by + c = 0,\ a, b, c \in R,\ \ a \neq 0, b \neq 0 \text{ (platí aj obrátená veta).}$$

Ľubovoľnú priamka *p* v rovine môžeme vyjadriť tvarom $ax + by + c = 0$*,* kde *a, b, c* sú vhodné konštanty, pričom *a, b* ≠0 ($a^2 + b^2 > 0$). Vektor $\vec{n}(a, b)$ je kolmý na priamku *p* (platí aj obrátená veta), daný vektor nazývame *normálovým vektorom* priamky *p*. Nech smerový vektor priamky *p* je vektor $\vec{s}$, potom pre normálový a smerový vektor priamky platí:

$$\vec{s}(mb, -ma) \perp \vec{n}\ => \vec{n}.\vec{s} = mab - mab = 0$$

Uvedieme rôzna tvary rovnice $ax + by + c = 0$:

- $c = 0 => ax + by = 0; x = y = 0$ (priamka prechádza začiatkom sústavy súradníc),
- $b = 0, c \neq 0 => ax + c = 0$ (priamka je rovnobežná s osou $O_y$),
- $b = 0, c = 0 => x = 0$ (priamka je totožná s osou $O_y$),
- $a = 0 => by + c = 0; y = \frac{-c}{b}$ (priamka je rovnobežná s osou $O_x$),
- $a = 0, c = 0 => by = 0,\ y = 0$ (priamka je totožná s osou $O_x$),
- $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 => ax + by + c = 0$.

Zo všeobecného tvaru rovnice priamky *p* jednoduchými úpravami získame *úsekový tvar* rovnice priamky *p*.

Daná je priamka $p = \overleftrightarrow{PQ}$, kde $P[p, 0], Q[0, q]$, potom platí:

$$P \in p: ap + c = 0 => p = \frac{-c}{a}$$

$$Q \in p: bq + c = 0 => q = \frac{-c}{b}$$

Upravíme rovnicu $ax + by + c = 0$ na tvar $\frac{x}{\frac{-c}{a}} + \frac{y}{\frac{-c}{b}} = 1$ alebo $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, čo je tzv. *úsekový tvar* rovnice priamky.

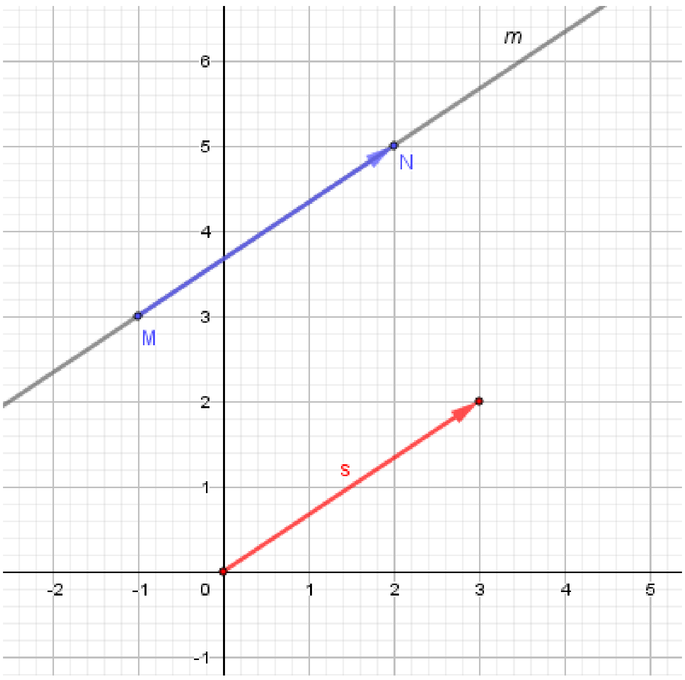
*Poznámka.* Priamku v priestore vieme vyjadriť buď parametrickým tvarom, kanonickým tvarom $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ alebo ako priesečnicu dvoch rôznobežných rovín, ktoré sú dané všeobecnými rovnicami.

*Príklad 1.*

Daná je priamka $m = \overleftrightarrow{MN}$, kde $M[-1,3], N[2,5]$. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky *m*, všeobecný tvar priamky *m* a úsekový tvar rovnice priamky *m*.

*Riešenie:*

Priamka *m* je určená bodom *M* a vektorom. K parametrickému vyjadreniu danej priamky potrebujeme smerový vektor, ktorý je napríklad vektor $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$, $\vec{s} = \overrightarrow{MN} = N - M = [2,5] - [-1,3] = (3,2)$.




Potom parametrické vyjadrenie priamky *m* má tvar:

$$\underline{m: \quad X = M + t\vec{s}, t \in R}$$

$$m: \quad x = -1 + 3t$$

$$y = 3 + 2t, t \in R$$

Priamka *m* vyjadrená všeobecným tvarom je určená bodom *M* a normálovým vektorom $\vec{n}$. Normálový vektor je kolmý na priamku, preto je kolmý aj na smerový vektor danej priamky. Využijeme vlastnosť skalárneho súčinu na nájdenie súradníc normálového vektora:

$$\vec{s} = (3,2), \vec{n} = (-2,3),\ \vec{n}.\vec{s} = (3,2).(-2,3) = 3.(-2) + 2.3 = 0.$$

Z uvedeného teda vyplýva, že vektory $\vec{n}, \vec{s}$ sú navzájom kolmé.

Potom pre priamku *m* platí:

$$m: ax + by + c = 0$$

$$-2x + 3y + c = 0$$

$$M \in m:\ -2.(-1) + 3.3 + c = 0$$

$$2 + 9 + c = 0$$

$$c = -11$$

$$m:\ -2x + 3y - 11 = 0$$

Priamka *m* má všeobecnú rovnicu $-2x + 3y - 11 = 0$.

Úsekový tvar rovnice priamky *m* získame úpravami z jej všeobecnej rovnice:

$$m: -2x + 3y - 11 = 0$$

$$-2x + 3y = 11$$

$$\frac{-2x}{11} + \frac{3y}{11} = 1$$

$$m:\ \frac{x}{-\frac{11}{2}} + \frac{y}{\frac{11}{3}} = 1$$

Z úsekového tvaru rovnice priamky $m$: $\frac{x}{-\frac{11}{2}} + \frac{y}{\frac{11}{3}} = 1$ vieme zistiť aj priesečníky danej priamky so súradnicovými osami *x*, *y*:

$$X \in m \cap o_x : X\left[-\frac{11}{2}, 0\right]$$

$$Y \in m \cap o_y : Y\left[0, \frac{11}{3}\right]$$

*Príklad 2.*

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží výška $v_c$ v trojuholníku *ABC*, ak $A[5,6], B[-2,4], C[6,-1]$.

*Riešenie:*

V trojuholníku *ABC* je výška $v_c$ kolmá na stranu *AB* a prechádza bodom *C*, preto vektor $\overrightarrow{AB}$ je normálovým vektorom priamky, na ktorej leží výška $v_c$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = B - A = [-2,4] - [5,6] = (-7,-2)$$

Všeobecná rovnica priamky, na ktorej leží výška $v_c$, je určená bodom *C* a vektorom $\vec{n}$:

$$v_c: -7x - 2y + c = 0$$

$$C \in v_c: -7.6 - 2.(-1) + c = 0$$

$$-42 + 2 + c = 0$$

$$c = 40$$

$$v_c: -7x - 2y + 40 = 0$$

V trojuholníku *ABC* má všeobecná rovnica priamky, na ktorej leží výška $v_c$, tvar: $-7x - 2y + 40 = 0$.

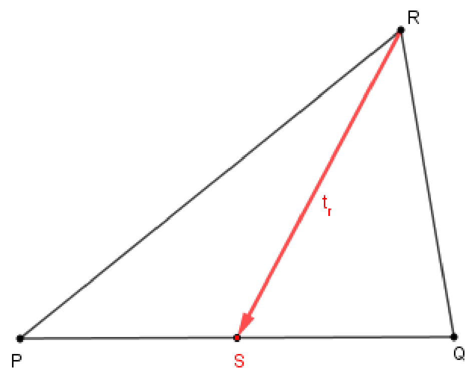
*Príklad 3.*

Daný je trojuholník *PQR*, kde $P[1,2,-4], Q[-1,4,0], R[3,-1,-2]$. Napíšte rovnicu ťažnice $t_r$.

*Riešenie:*

Zo súradníc vrcholov daného trojuholníka je zrejmé, že máme napísať rovnicu úsečky v priestore, preto ťažnicu vyjadríme parametrickou rovnicou.

Ťažnica $t_r$ je určená bodom *R* a smerovým vektorom $\vec{u} = \overrightarrow{RS}$.




Súradnice stredu *S* strany *PQ* sú:

$$S = \frac{P+Q}{2} = \frac{[1,2,-4] + [-1,4,0]}{2} = \frac{[0,6,-4]}{2} = [0,3,-2]$$

Smerový vektor $\vec{u}$ ťažnice $t_r$ má súradnice $\vec{u} = \overrightarrow{RS} = S - R = (-3,4,0)$.

Parametrické vyjadrenie ťažnica $t_r$ má tvar:

$$t_r: \quad X = R + t.\overrightarrow{RS}, t \in \langle 0,1\rangle$$

$$t_r: \quad x = 3 - 3t$$
$$y = -1 + 4t$$
$$z = -2,\ t \in \langle 0,1\rangle$$

V ďalšej časti uvedieme rovnice roviny, ktoré sa najčastejšie používajú v školskej praxi. Daná je rovina $\sigma$ a zameranie $L$ roviny $\sigma$. Zameranie $L$ je dvojrozmerný podpriestor trojrozmerného priestoru, pričom vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ sú bázou podpriestoru. Zameranie roviny $\sigma$ je určené dvoma nekolineárnymi vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$, ktoré sú rovnobežné s danou rovinou $\sigma$.

Rovina je určená bodom a dvoma nekolineárnymi vektormi, označenie je $\sigma\left(M_0, \vec{a},\ \vec{b}\right)$. Pre ľubovoľný bod $M$ roviny $\sigma$ platí: $M \in \sigma \ <=> \overrightarrow{M_0M}, \vec{a},\ \vec{b}$ sú komplanárne (ležia v jeden rovine), platí pre zmiešaný súčin vektorov, že $\left[\overrightarrow{M_0M}\vec{a}\vec{b}\right] = 0$.

Najskôr popíšeme *parametrické rovnice* roviny $\sigma$. V sústave súradníc je rovina daná nasledovne: $\sigma(M_0, L\ ), L\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$, kde $M_0[x_0, y_0, z_0], \vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ nazývame *smerovými vektormi* roviny $\sigma$. Odvoďme teraz rovnicu roviny $\sigma\left(M_0, \vec{a},\ \vec{b}\right)$. Vieme, že platí:

Bod $M \in \sigma \ <=> \overrightarrow{M_0M}, \vec{a},\ \vec{b}$ sú komplanárne a $\left[\overrightarrow{M_0M}\vec{a}\vec{b}\right] = 0$, potom $\exists t,\ s \in R$:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} + s\vec{b}$$

$$\underline{\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}$$

Rovnicu roviny $\sigma$ zapíšme po súradniciach:

$$\sigma: x = x_0 + ta_1 + sb_1$$
$$y = y_0 + ta_2 + sb_2$$
$$z = z_0 + ta_3 + sb_3\ , \exists t,\ s \in R$$

Inou používanou rovnicou roviny je rovnica roviny určená bodom a vektorom kolmým na rovinu. Vektor kolmý na rovinu sa nazýva *normálový vektor* roviny. V karteziánskej sústave súradníc sú dané bod $M_0[x_0, y_0, z_0]$ a nenulový vektor $\vec{n}(A, B, C)$. Napíšte rovnicu roviny $\sigma(M_0, \vec{n})$. Vieme, že:

$M[x, y, z] \in \sigma \ <=> \overrightarrow{M_0M}, \vec{n}$ sú kolmé, t. j. $\overrightarrow{M_0M}.\vec{n} = 0$ a platí:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)(A, B, C) = 0$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Ďalej z rovnici roviny $\sigma\left(M_0, \vec{a},\ \vec{b}\right)$ platí:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Po úprave determinantu dostávame tvar $Ax+By+Cz+D=0$, kde $A=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, C=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Rovnicu $Ax+By+Cz+D=0$ nazývame *všeobecnou rovnicou* roviny $\sigma$.

Ak sústava súradníc je karteziánska, potom všeobecná rovnica je rovnicou roviny. Vektor $\vec{n}(A,B,C)$ je kolmý na rovinu, preto je kolmý na bázu zamerania, t. j. $\overrightarrow{a},\ \vec{b}$.

Daná je rovina $\sigma: Ax+By+Cz+D=0$ a vektor $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$. Nutnou a postačujúcou podmienkou rovnobežnosťou vektora $\vec{p}$ a roviny $\sigma$ je $Ap_1+Bp_2+Cp_3=0$.

Ak v rovnici $Ax+By+Cz+D=0$ sú koeficienty *A, B, C, D* rôzne od 0, rovnicu môžeme upraviť *na úsekový tvar rovnice roviny* $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$, kde $p=-\frac{D}{A}$, $q=-\frac{D}{B}, r=-\frac{D}{C}$. Čísla *p, q, r* predstavujú úseky, ktoré rovina vytína na osiach $O_x, O_y, O_z$.

*Príklad 4.*

Zistite, či bod *M* leží v rovine $\overleftrightarrow{ABC}$, ak $A[0,-1,1], B[1,3,-2], C[2,2,-1], M[1,1,1]$.

*Riešenie:*

Určíme si najskôr smerové vektory roviny $\overleftrightarrow{ABC}$, napríklad $\overrightarrow{AB}=B-A=(1,4,-3), \overrightarrow{AC}=C-A=(2,3,-2)$. Rovina $\overleftrightarrow{ABC}$ je určená bodom *A* a smerovými vektormi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Potom:

$$\underline{\overleftrightarrow{ABC}: \quad X=A+t.\overrightarrow{AB}+s.\overrightarrow{AC}, t, s\in R}$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{ABC}: \quad & x=t+2s \\ & y=-1+4t+3s \\ & z=1-3t-2s\ , t,\ s\in R \end{aligned}$$

Bod *M* leží v rovine $\overleftrightarrow{ABC}$, ak:

$$1=t+2s \qquad \Longrightarrow t=1-2s$$

$$1 = -1 + 4t + 3s$$

$$\underline{1 = 1 - 3t - 2s}$$

$$1 = -1 + 4t + 3s$$

$$2 = 4.(1 - 2s) + 3s$$

$$2 = 4 - 8s + 3s$$

$$-2 = -5s \qquad \Rightarrow s = \frac{2}{5}$$

$$t = 1 - 2.\frac{2}{5} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

Dosadením súradníc bodu *M* do jednotlivých parametrických rovníc roviny zistíme, či nastane rovnosť pravej a ľavej strany v rovnici:

$$1 = 1 - 3t - 2s$$

$$0 = -3t - 2s$$

$$0 = -3.\frac{1}{5} - 2.\frac{2}{5}$$

$$0 = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$$

$$0 \neq -\frac{7}{5}$$

Bod *M* neleží v rovine $\overleftrightarrow{ABC}$.

Overíme naše zistenie aj s využitím všeobecnej rovnice roviny $\overleftrightarrow{ABC}$. Vypočítame súradnice normálového vektora $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -4, -5)$. Dosadíme súradnice normálového vektora do všeobecnej rovnici roviny, získame vzťah:

$$x - 4y - 5z + D = 0$$

$$A \in \overleftrightarrow{ABC}: -4.(-1) - 5.1 + D = 0$$

$$4 - 5 + D = 0$$

$$D = 1$$

$$\overleftrightarrow{ABC}: x - 4y - 5z + 1 = 0$$

Všeobecná rovnica roviny $\overleftrightarrow{ABC}$ má tvar $x - 4y - 5z + 1 = 0$ a dosadením súradníc bodu *M* do tohto tvaru zistíme, či daný bod leží v tejto rovine:

$$x - 4y - 5z + 1 = 1 - 4.1 - 5.1 + 1 = -7 \neq 0$$

Iným spôsobom sme ukázali, že bod *M* neleží v rovine $\overleftrightarrow{ABC}$.

*Príklad 5.*

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny $\alpha$, ktorá je daná parametrickým vyjadrením $\alpha$: $x = 1 + 2t - s, y = 2 - t,\ z = 1 + t + s\ , t,\ s \in R$.

*Riešenie:*

Vypíšeme si z parametrického vyjadrenia roviny $\alpha$ jej smerové vektory $\vec{u}(2,-1,1)$, $\vec{v}(-1,0,1)$ a súradnice bodu $A[1,2,1]$ danej roviny. Normálový vektor roviny $\vec{n}$ získame vektorovým súčinom dvoch smerových vektorov roviny, $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-1,-3,-1)$.

Všeobecná rovnica roviny $\alpha$ má tvar $-x - 3y - z + D = 0$ a teraz do tohto tvaru dosadíme súradnice bodu $A[1,2,1]$:

$$-1 - 3.2 - 1 + D = 0$$

$$D = 8$$

Všeobecná rovnica roviny $\alpha$ je $-x - 3y - z + 8 = 0$ alebo $x + 3y + z - 8 = 0$.

*Úlohy na precvičenie*

1. Napíšte parametrické rovnice priamky *p* určenej bodom a vektorom:

   a) $A[2,5], \vec{u}(5,4)$,
   b) $A[1,4], \vec{u}(-3,-7)$,
   c) $A[0,-2,3], \vec{u}(3,2,-5)$.

2. Napíšte parametrické rovnice priamky *p* určenej bodmi:

   a) $A[2,5], B[5,1]$,
   b) $A[-1,0,-1], B[3,2,1]$,
   c) $C[-4,3,1], D[-2,-3,4]$.

3. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky *p* určenú bodmi:

   a) $A[2,5], B[3,2]$,
   b) $A[1,4], \mathrm{B}[-3,-7]$.

4. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ak $x = 1 - 3t, y = 4 - 7t, t \in R$.

5. Napíšte parametrickú rovnicu priamky $4x - 5y + 17 = 0$.

6. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, určenú:

   a) smerovým uhlom $\varphi = 135°$ a úsekom $q = -2$ na osi *y*,
   b) úsekmi $p = -2, q = -3$ na osiach *x*, *y*,
   c) bodom $A[2,3]$ a zvierajúcu s osou x uhol $45°$.

7. Napíšte parametrickú, všeobecnú, smernicovú a kanonickú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A$[-2,3] a je rovnobežná:

   a) s osou *x*,
   b) s osou *y*.

8. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky určenej bodmi $M[2,-3,7], N[5,-1,4]$ a zistite, či body $A[-4,-7,1], B[11,3,-2]$ ležia na tejto priamke.

9. Rozhodnite, ktorý z bodov $A[-1,3], B[0,5]$ ležia na priamke s rovnicou $2x - y + 5 = 0$.

10. Určte číslo m tak, aby priamka $x = 2 + mt, y = -1 + t, t \in R$ prechádzala bodom $A[-4,1]$.

11. V trojuholníku *ABC* napíšte rovnice:

    a) výšok, ak $A[7,8], B[5,-2], C[-3,-6]$,
    b) ťažníc, ak $A[1,0,2], B[2,1,3], C[0,0,1]$.

12. Napíšte rovnice dvoch telesových uhlopriečok kocky a zistite, či sú na seba kolmé.

13. Napíšte parametrickú rovnicu roviny $\overleftrightarrow{ABC}$:

    a) $A[1,1,1], B[0,2,3], C[0,-1,2]$,
    b) $A[1,-2,3], B[-4,5,6], C[7,8,-9]$.

14. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny $\beta$, ak:

    a) $\beta: x = 3 - 2t + 2s, y = 1 + t - 2s, z = 3 - 4t - 6s;\ t, s\ \in R$,
    b) $\beta: x = t + s, y = 1 + t + s, z = 3 + s;\ t, s\ \in R$.

15. Napíšte úsekový tvar rovnice roviny $\alpha$, ak:

    a) $\alpha: 5x - 2y + 3z - 10 = 0$,
    b) $\alpha: 3x + 2z = 6$.

16. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $E[-3,5,7]$ a je kolmá na vektor $\vec{n}(1,-2,-1)$.

17. Napíšte rovnicu roviny $\alpha$ prechádzajúcej bodom $D[2,-1,1]$ a kolmej k rovinám $\gamma: 3x + 2y - z + 4 = 0$ a $\delta: x + y + z = 3$.

## 5.2 Polohové vlastnosti lineárnych útvarov v priestore

V rámci polohových vlastností rôznych útvarov zisťujeme ich vzájomnú polohu. Uvedieme ďalej vzájomnú polohu dvoch priamok, dvoch rovín a vzájomnú polohu priamky a roviny z pohľadu analytickej geometrie. Viac k polohovým vlastnostiam lineárnych útvarov je uvedené v podkapitole 3.2.

Dané sú priamky $p_1(M_1, \vec{a})$, $p_2(M_2, \vec{b})$. Zaveďme jednotlivé súradnice bodov $M_1[x_1, y_1, z_1]$, $M_2[x_2, y_2, z_2]$, ktoré patria priamkam $p_1$, $p_2$, a tiež ich smerových vektorov $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$.

Pre *vzájomnú polohu dvoch priamok* môžu nastať tieto prípady:

- vektory $\vec{a}, \vec{b}$ sú kolineárne práve vtedy, keď priamky $p_1$, $p_2$ sú rovnobežné alebo totožné (nemajú spoločný bod alebo majú spoločné body),
- vektory $\vec{a}, \vec{b}$ sú nekolineárne práve vtedy, keď priamky $p_1$, $p_2$ sú rôznobežné alebo mimobežné (majú spoločný bod alebo nemajú spoločný bod).

*Poznámka.* Nutnou a postačujúcou podmienkou, aby rovnice $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ boli rovnicami tej istej priamky je úmernosť koeficientov v týchto rovniciach ($a_2 = ta_1, b_2 = tb_1, c_2 = ta_1$).

V sústave súradníc sú dané dve priamky rovnicami $p_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $p_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Smerové vektory daných priamok sú $\vec{s}_1(-b_1, a_1), \overrightarrow{s_2}(-b_2, a_2)$.

Vzhľadom na lineárnu závislosť smerových vektorov môžu pre priamky nastať dva prípady ich vzájomnej polohy:

- ak $\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ sú nekolineárne, tak priamky $p_1, p_2$ sa pretínajú (existuje jediné riešenie sústavy rovníc z daných priamok),
- ak $\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ sú kolineárne, tak priamky $p_1, p_2$ sú rovnobežné (nesplývajúce).

Priamky $p_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, p_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ môžu byť:

- *rôznobežné* práve vtedy, keď koeficienty pri *x, y* v rovniciach priamok nie sú násobkom jediného reálneho čísla *k*, $\exists\, k \in R$: $a_2 \neq ka_1$, $b_2 \neq kb_1$, $c_2 \neq kc_1$,
- *totožné* práve vtedy, keď všetky koeficienty pri *x, y* v rovniciach priamok sú násobkom jediného reálneho čísla, $\exists\, k \in R$: $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$,
- *rovnobežné* práve vtedy, keď koeficienty pri *x, y* v rovniciach priamok sú násobkom jediného reálneho čísla, ale absolútne členy nie sú násobkom jediného reálneho čísla, $\exists\, k \in R$: $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 \neq kc_1$.

V sústave súradníc sú dané roviny $\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ a $\sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, pričom $h = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, $h' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$.

Pre *vzájomnú polohu dvoch rovín* môžu nastať nasledujúce prípady:

- ak sú všetky koeficienty v daných rovniciach úmerné, rovnice rovín určujú tú istú rovinu, $h = h' = 1$,
- ak sú koeficienty pri *x, y, z* v daných rovniciach úmerné (len $D_1 \neq D_2$), rovnice rovín určujú rovnobežné roviny, $h = 1, h' = 2$
- ak sú všetky koeficienty v daných rovniciach neúmerné, rovnice rovín určujú rôznobežné roviny, $h = 2, h' = 2$.

Daná je priamka $p(M_0, \vec{a})$ a rovina $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ v sústave súradníc, kde bod $M_0$ patriaci priamke *p* má súradnice $M_0[x_0, y_0, z_0]$ a smerový vektor $\vec{a}$ priamky má zase súradnice $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

Pre *vzájomnú polohu priamky a roviny* môžu nastať tieto prípady:

- priamka $p$ pretína rovinu $\sigma$ práve vtedy, keď smerový vektor priamky $\vec{a}$ nie je rovnobežný s rovinou $\sigma$, t. j. $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$, ich spoločný priesečník je riešením sústavy rovníc priamky $p$ a roviny $\sigma$,
- priamka $p$ je rovnobežná s rovinou $\sigma$ práve vtedy, keď smerový vektor priamky $\vec{a}$ je rovnobežný s rovinou $\sigma$ a bod $M_0$ neleží v rovine $\sigma$, platí:
$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$$
- priamka $p$ leží v rovine $\sigma$ práve vtedy, keď platí:
$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

*Príklad 6.*

Určte vzájomnú polohu priamok *p*, *q* s parametrickými vyjadreniami $p: x = 1 + 4t$, $y = -t, t \in R$, $q: x = 3 - 12s, y = -2 + 3s, s \in R$.

*Riešenie:*

Vzájomnú polohu dvoch priamok môžeme zistiť rôznymi spôsobmi. Najskôr využijeme smerové vektory $\vec{p}(4,-1), \vec{q}(-12,3)$ priamok *p*, *q* a zistíme, či sú lineárne závislé:

$$\vec{p} = k.\vec{q}$$

$$\underline{(4,-1) = k.(-12,3)}$$

$$4 = -12.k \Rightarrow k = -3$$

$$\underline{-1 = 3.k \Rightarrow k = -3}$$

$$\vec{p} = -3\vec{q}$$

Smerové vektory $\vec{p}, \vec{q}$ daných priamok sú lineárne závislé, preto priamky *p*, *q* sú rovnobežné alebo totožné. Využijeme bod $P[1,0]$ patriaci priamke *p* na zistenie vzájomnej polohy priamok *p*, *q*. Ak bod *P* bude ležať aj na priamke *q*, a teda budú jeho súradnice vyhovovať parametrickým rovniciam priamky *q*, tak sú priamky *p*, *q* totožné, inak sú priamky rovnobežné rôzne:

$$1 = 3 - 12s \Rightarrow s = \frac{1}{6}$$

$$0 = -2 + 3s \Rightarrow s = \frac{2}{3}$$

Hodnoty s sú rôzne, sústava rovníc nemá riešenie, tak bod *P* nepatrí priamke *q*. Priamky *p*, *q* sú preto rovnobežné.

Vzájomnú polohu priamok môžeme zistiť aj riešením sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi, pričom podľa počtu spoločných bodov vieme usúdiť ich vzájomnú polohu:

$$1 + 4t = 3 - 12s$$

$$\underline{-t = -2 + 3s}$$

$$4t + 12s = 2$$

$$\underline{-t - 3s = -2 \quad /.4}$$

$$4t + 12s = 2$$

$$\underline{-4t - 12s = -8}$$

$$0 = -6 \ \Rightarrow \text{sústava rovníc nemá riešenie}$$

Keďže sústava rovníc nemá riešenie, to znamená, že priamky *p*, *q* nemajú žiadne spoločné body, preto sú rovnobežné a rôzne.

*Príklad 7.*

Zistite vzájomnú polohu rovín $\rho$: $2x - 3y + z - 4 = 0, \sigma: x + 2y - z + 1 = 0$.

*Riešenie:*

Roviny môžu byť rovnobežné, rôznobežné alebo totožné. Keďže sú roviny $\rho, \sigma$ dané všeobecnými rovnicami, využijeme na ich normálové vektory. Súradnice normálových vektorov rovín sú $\overrightarrow{n_\rho}(2,-3,1)$, $\overrightarrow{n_\sigma}(1,2,-1)$. Ak budú normálové vektory lineárne závislé, roviny sú buď rovnobežné alebo totožné, inak sú roviny rôznobežné:

$$\overrightarrow{n_\rho} = k.\overrightarrow{n_\sigma}$$

$$\underline{(2,-3,1) = k.(1,2,-1)}$$

$$2 = k \Rightarrow k = 2$$

$$-3 = 2k \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

$$\underline{1 = -k \Rightarrow k = -1}$$

Pretože hodnoty *k* nie sú rovnaké, normálové vektory rovín sú lineárne nezávislé, $\overrightarrow{n_\rho} \neq k.\overrightarrow{n_\sigma}$.

Roviny $\rho, \sigma$ sú rôznobežné.

*Príklad 8.*

Zistite vzájomnú polohu priamky $m: x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = 1 - t, t \in R$ a roviny $\rho: x + y + z + 1 = 0$. Ak sú rôznobežné, tak nájdite aj súradnice ich priesečníka.

*Riešenie:*

S využitím skalárneho súčinu dvoch vektorov zistime vzájomnú polohu smerového vektora $\vec{s}$ priamky *m* a normálového vektora $\vec{n}$ roviny $\rho$: $\vec{s}.\vec{n} = (2,1,-1).(1,1,1) = 2 + 1 - 1 \neq 0$. Z uvedeného vyplýva, že priamka *m* a rovina $\rho$ sú rôznobežné. Potrebujeme ešte vypočítať súradnice ich spoločného bodu *R*:

$R \in m \cap \rho$: $$x + y + z + 1 = 0$$

$$(1 + 2t) + (-1 + t) + (1 - t) + 1 = 0$$

$$2 + 2t = 0$$

$$t = -1$$

Priesečník *R* má potom súradnice:

$$x = 1 + 2t = 1 + 2.(-1) = -1$$

$$y = -1 + t = -1 + (-1) = -2$$

$$z = 1 - t = 1 - (-1) = 2$$

Priamka *m* a rovina $\rho$ majú spoločný bod $R[-1,-2,2]$.

*Úlohy na precvičenie*

1. Zistite vzájomnú polohu priamok:

   a) $p: x = 2 - 3t, y = 6 + t, z = -t, q: x = 1 - 2s, y = 3s, z = 2, t, s \in R$,
   b) $p: x = 5 + 3t, y = 8 - 6t, z = -6 + 9t, q: x = 7 - 2s, y = 4 + 4s,$
   $z = -6, t, s \in R$,
   c) $x + 2y + 5 = 0, -x + y + 1 = 0$,
   d) $p: x = -2 + t, y = -t, z = 3 - 2t, t \in R, x + y + 2 = 0$,
   e) $x + 4y + 1 = 0, 2x + 8y + 2 = 0$.

2. Nájdite spoločný bod priamok *AB*, *CD*, ak $A[-4,2], B[-1,7], C[9,-2], D[-3,-5]$.

3. Určte čísla $m$, $n$ tak, aby priamky $3x - 5y + 4 = 0$, $(2 - m)x - 3ny + 3 - s = 0$ boli:
   a) rovnobežné,
   b) totožné,
   c) rôznobežné.

4. Dané sú body $A[2,5], B[-3,9], C[0,0]$. Vypočítajte súradnice stredu $S$ opísanej kružnice trojuholníku $ABC$.

5. Napíšte rovnice strán kosoštvorca s uhlopriečkami 10 cm a 6 cm, ak dlhšia uhlopriečka leží na osi $x$ a kratšia na osi $y$.

6. Body $A[-2,1], B[-2,2]$, sú vrcholy trojuholníka $ABC$ a $V[-1,-1]$ je ortocentrum trojuholníka $ABC$. Určte súradnice vrcholu $C$.

7. Zistite vzájomnú polohu rovín $\alpha, \beta$:

   a) $\alpha: x = -1 + r, y = -2r + s, z = 1 + r + s, r, s \in R, \beta: x = 1 + m + n,$
   $y = 2 - m + n, z = m + n, m, n \in R,$
   b) $\alpha: x = 1 + 3s, y = 2r + s, z = -r, r, s \in R, \beta: x = 2m, y = 1 - m - n,$
   $z = n, m, n \in R$
   c) $\alpha: 5x + 7y - 4z = 0, \beta: -3x + 4y + 2z = 8,$
   d) $\alpha: x + y + z = 0, \beta: 2x + 2y + 2z = 5.$

8. Zistite vzájomnú polohu roviny $\rho$ a priamky $t$:

   a) $t: x = 3 + 2r, y = 1 - r, z = 2 - r;\ r \in R, \rho: x = 1 + m + 3n, y = 1 + 2m -$
   $n, z = -1 + 3m + 2n;\ m, n \in R$
   b) $t: x = 1 + r, y = 3 - r, z = 2 - 3r;\ r \in R,\ \rho: x = -1 + m, y = 1 - 3m +$
   $2n, z = 2 - 3n;\ m, n \in R,$
   c) $\rho: x + y + 2z = 0, t: x = r, y = -r, z = -4 - 2r;\ r \in R.$

## 5.3 Metrické vlastnosti lineárnych útvarov v priestore

K metrickým vlastnostiam zaraďujeme uhol a vzdialenosť medzi rôznymi útvarmi. Budeme sa Daným vlastnostiam venovať v tejto podkapitole z pohľadu analytickej geometrie. Viac k metrickým vlastnostiam lineárnych útvarov je uvedené v podkapitole 3.3.

*Uhlom priamok* sa nazýva veľkosť toho uhla zo štyroch uhlov, ktoré zvierajú priamky a nie je väčšia ako veľkosť ostatných uhlov. Uhol dvoch rôznobežných priamok nie je väčší ako $\frac{\pi}{2}$. Pozrime sa na veľkosť uhla dvoch priamok analyticky.

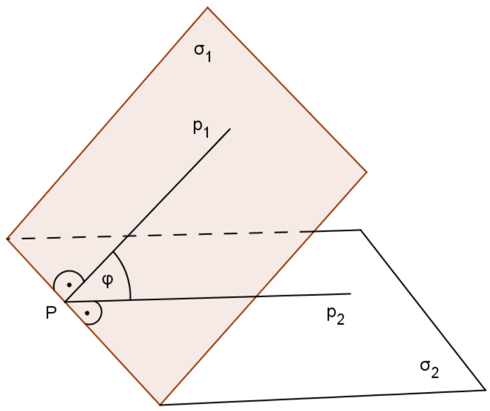
Dané sú priamky $p_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $p_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, potom ich smerové vektory sú $\overrightarrow{s_1}(-b_1, a_1), \overrightarrow{s_2}(-b_2, a_2)$. Uhol priamok $\sphericalangle(p_1, p_2) = \sphericalangle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}) = \varphi$ , pričom $\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Ak sú priamky kolmé, tak $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ alebo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\overrightarrow{s_1}.\overrightarrow{s_2} = 0$.

Tiež platia nasledujúce vlastnosti:

- $\sphericalangle(p_1, p_2) = \varphi, tg\varphi = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{a_1a_2 + b_1b_2}$,
- $p_1: y = k_1x + q_1, p_2: y = k_2x + q_2$, ich smerové vektory sú $\overrightarrow{s_1}(1, k_1), \overrightarrow{s_2}(1, k_2)$, potom sú priamky kolmé a $k_1.k_2 + 1 = 0$, inak pre $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$: $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_1.k_2 + 1}$.

*Poznámka*. *Zväzok priamok* je množina všetkých priamok, ktoré prechádzajú priesečníkom dvoch rôznobežiek. Stred zväzku je priesečník zväzku priamok. Osi dvoch rôznobežných priamok $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ majú rovnice $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}}$.

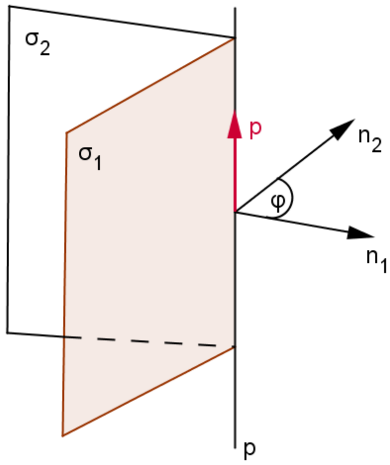
*Uhol dvoch rôznobežných rovín* je uhol priamok ležiacich v daných rovinách, ktoré sú kolmé na priesečnicu rovín.




Dané sú roviny $\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ a $\sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Normálové vektory rovín $\sigma_1, \sigma_2$ sú vektory $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1), \overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$. Potom uhol rovín $\varphi$ určujú tieto normálové vektory a platí vzťah:

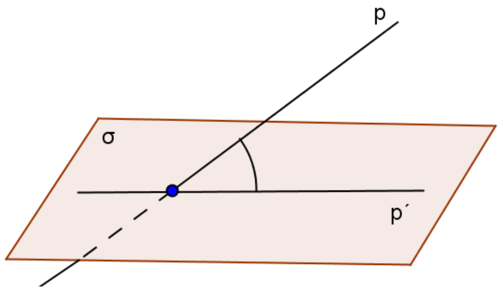
$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

*Poznámka.* Uhol rovín je $\varphi$ alebo $\pi - \varphi$.




Posledným prípadom, ktorému sa budeme venovať, je *uhol priamky s rovinou*. Zo stereometrie vieme, že platí veta:

Uhol priamky *p* a roviny $\sigma$ nazývame ostrý uhol určený priamkou a jej pravouhlým priemetom do roviny $\sigma$.




Nech uhol $\varphi$ je hľadaný uhol priamky *p* a roviny $\sigma$. Normálový vektor $\vec{n}(A,\ B,\ C)$ je kolmý na rovinu, preto $\rho = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{s})$. Potom platí:

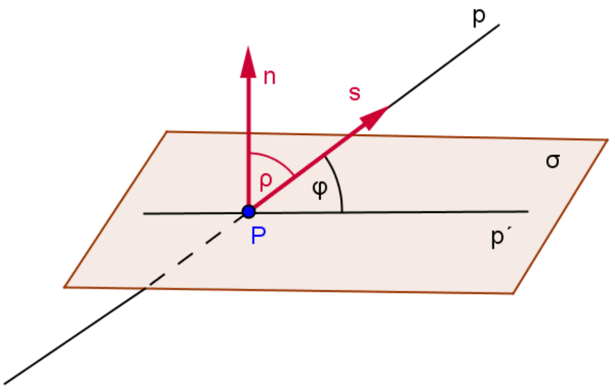
- $\varphi = \frac{\pi}{2} - \rho$, kde $\rho$ je ostrý uhol priamok *p, p´*,
- $\varphi = \rho - \frac{\pi}{2}$, kde $\rho$ je tupý uhol priamok *p, p´*.

Platia preto nasledujúce vzťahy:

- $sin\varphi = cos\rho$, ak $cos\rho > 0$,
- $sin\varphi = -cos\rho$, ak $cos\rho < 0$.

Odtiaľ dostávame vzťah:

$$sin\varphi = |cos\rho\,| = \frac{|\vec{n}.\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}$$

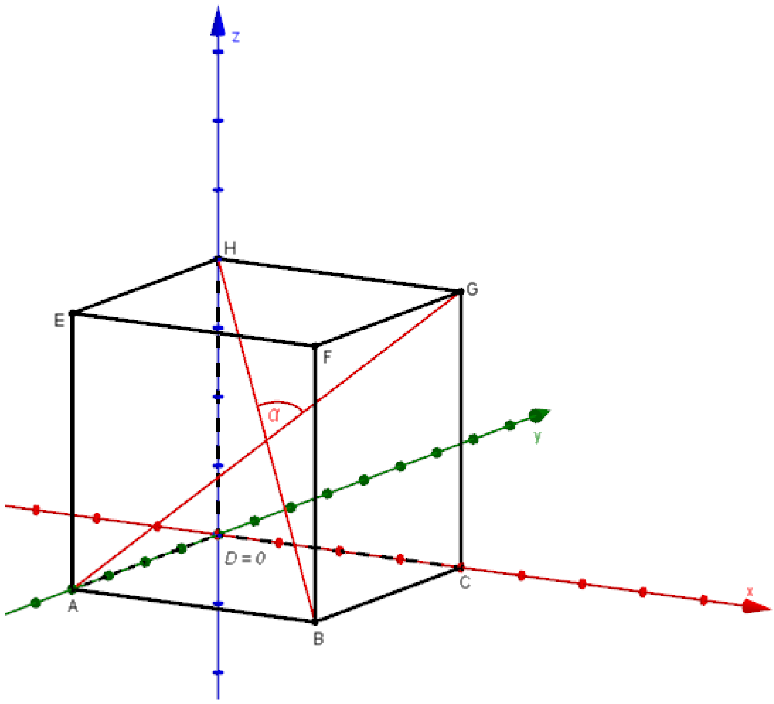



*Príklad 9.*

V kocke *ABCDEFGH* s hranou dĺžky *a* vypočítajte uhol telesových uhlopriečok.

*Riešenie:*

Zavedieme súradnicovú sústavu so začiatkom vo vrchole *D* kocky *ABCDEFGH*. Zvolíme telesové uhlopriečky danej kocky, napríklad priamky $\overleftrightarrow{AG}, \overleftrightarrow{BH}$, potom súradnice bodov priamok sú $A[0, a, 0], G[a, 0, a], B[a, a, 0], H[0,0, a]$.




Vypočítame smerové vektory priamok $\overleftrightarrow{AG}, \overleftrightarrow{BH}$:

$$\overrightarrow{AG} = G - A = (a, -a, a), \overrightarrow{BH} = H - B = (-a, -a, a)$$

Uhol priamok $\varphi$ je uhol ich smerových vektorov, ktorý vypočítame zo vzťahu:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|}$$

$$cos\varphi = \frac{(a, -a, a).(-a, -a, a)}{\sqrt{a^2 + (-a)^2 + a^2}.\sqrt{(-a)^2 + (-a)^2 + a^2}}$$

$$cos\varphi = \frac{a.(-a) + (-a).(-a) + a.a}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}.\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}}$$

$$cos\varphi = \frac{-a^2 + a^2 + a^2}{\sqrt{3a^2}.\sqrt{3a^2}}$$

$$cos\varphi = \frac{a^2}{3a^2}$$

$$cos\varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \doteq 71°$$

Uhol telesových uhlopriečok v kocke je približne 71°.

*Príklad 10.*

Vypočítajte uhol rovín $\alpha$: $2x - y + z - 1 = 0$, $\beta$: $x + y + 2z + 3 = 0$.

*Riešenie:*

Uhol $\varphi$ rovín $\alpha, \beta$ je uhol normálových vektorov $\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}$ daných rovín. Súradnice normálových vektorov vieme zistiť zo všeobecných rovníc rovín $\alpha, \beta$: $\overrightarrow{n_\alpha}(2, -1, 1)$, $\overrightarrow{n_\beta}(1, 1, 2)$.

Potom platí:

$$\cos\varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{6}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$$

Uhol rovín $\alpha, \beta$ má veľkosť 60°.

*Príklad 11.*

Vypočítajte uhol priamky $p$ a roviny $\alpha$, ak $p: x = 4 - 2t, y = 1 - 2t, z = t$, $t \in R, \alpha: x + 4y + z - 1 = 0$.

*Riešenie:*

Uhol priamky a roviny vypočítame pomocou ich vektorov, využijeme smerový vektor $\vec{s}$ priamky *p* a normálový vektor $\vec{n}$ roviny $\alpha$. Súradnice uvedených vektorov sú: $\vec{s}(-2,-2,1)$, $\vec{n}(1,4,1)$.

Uhol priamky a roviny vypočítame zo vzťahu:

$$sin\varphi = \frac{|\vec{s}.\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$$

$$sin\varphi = \frac{|(-2)\cdot 1 + (-2)\cdot 4 + 1\cdot 1|}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2+1^2}}$$

$$sin\varphi = \frac{|-2-8+1|}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+16+1}}$$

$$sin\varphi = \frac{|-9|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}}$$

$$sin\varphi = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}}$$

$$sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \varphi = 45°$$

Uhol priamky *p* a roviny $\alpha$ je $45°$.

Najskôr sa budeme venovať *vzdialenosti bodu a priamky*. Daná je priamka *p:* $ax + by + c = 0$, potom $\vec{n}(a,b)$ je normálový vektor priamky. Nech $M_0[x_0, y_0] \notin$ *p* a bod *P* je päta kolmice z bodu $M_0$ na priamku *p*, potom:

- ak $M_1[x_1, y_1] \in$ *p*, tak $|M_1, p| = 0$,
- pre ľubovoľný bod *M* priamky *p* platí: $|M_0, p| \leq |M_0M|$.

V karteziánskej sústave súradníc $\langle O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle$ je daný bod $M_0[x_0, y_0]$ a priamka *p:*$ax + by + c = 0$. Vypočítajte vzdialenosť bodu $M_0$ od priamky *p*.

Ak $\overleftrightarrow{PM_0}$ je kolmica na priamku *p,* $\vec{n}(a,b)$ je normálový vektor priamky, tak $\overrightarrow{PM_0}$, $\vec{n}$ sú kolineárne vektory a platí:

$$\overrightarrow{PM_0}.\vec{n} = |\overrightarrow{PM_0}|.|\vec{n}|.cos\sphericalangle(\overrightarrow{PM_0},\vec{n}) = \mp|\overrightarrow{PM_0}|.|\vec{n}|$$

$$|M_0, p| = |\overrightarrow{PM_0}| = \frac{|\overrightarrow{PM_0}.\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$P[x_1, y_1] => \overrightarrow{PM_0}(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$$

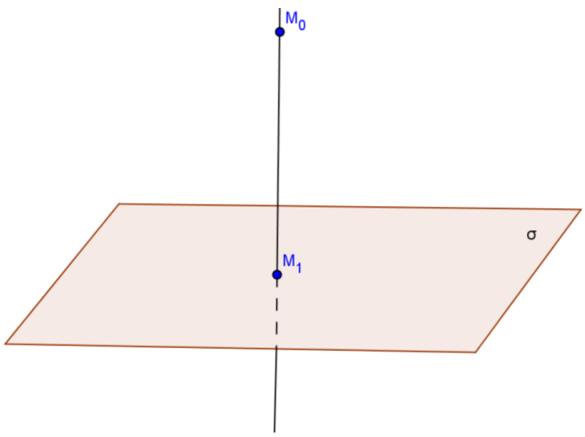
$\overrightarrow{PM_0}.\vec{n} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1).(a, b) = ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1) = ax_0 + by_0 + c$, pretože $P[x_1, y_1] \in p \Rightarrow ax_1 + by_1 + c = 0$.

$$|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|M_0, p| = |\overrightarrow{PM_0}| = \frac{|\overrightarrow{PM_0}.\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ďalej uvedieme vzťah pre *vzdialenosť bodu od roviny*. Daná je rovina $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ a bod $M_0[x_0, y_0, z_0]$. Vzdialenosť $|M_0, \sigma|$ vypočítame zo vzťahu $|M_0, \sigma| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Naznačíme stručne dôkaz tohto vzťahu.

Bodom $M_0$ vedieme kolmicu $k$ na rovinu $\sigma$. Nech $M_1 = k \cap \sigma$, t. j. $M_1[x_1, y_1, z_1]$, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0$, normálový vektor roviny je $\vec{n}(A, B, C)$.




Vektor $\vec{n}$ je kolineárny s vektorom $\overrightarrow{M_1M_0}$, kde $\overrightarrow{M_1M_0}(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$. Preto platí:

$\vec{n}.\overrightarrow{M_1M_0} = |A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)| = \ldots = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|$

Podobne vieme zistiť aj *vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín*. Dané sú dve rovnobežné roviny $\sigma_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\sigma_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$. Vypočítajte ich vzdialenosť.

Ak bod $M_0[x_0, y_0, z_0] \in \sigma_1$, tak platí:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1 = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D_1$$

$$|\sigma_1, \sigma_2| = |M_0, \sigma_2| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$|\sigma_1, \sigma_2| = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

*Príklad 12.*

Napíšte rovnicu priamky, ktorá je rovnobežná s priamkou $5x + 12y - 1 = 0$ a má od nej vzdialenosť $d = 5$.

*Riešenie:*

Priamka rovnobežná s danou priamkou $5x + 12y - 1 = 0$ má rovnicu v tvare $5x + 12y + D = 0$. Pre vzdialenosť bodu od priamky platí vzťah:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + \mathrm{c}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Dosadíme konkrétne hodnoty podľa zadania:

$$5 = \frac{|5x + 12y - 1|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$5 = \frac{|5x + 12y - 1|}{\sqrt{169}} = \frac{|5x + 12y - 1|}{13}$$

$$5 = \frac{5x + 12y - 1}{13} \vee 5 = \frac{-(5x + 12y - 1)}{13}$$

$$5x + 12y - 1 = 65 \vee -5x - 12y + 1 = 65$$

$$5x + 12y - 66 = 0 \vee -5x - 12y - 64 = 0$$

Rovnobežné roviny k danej rovine majú rovnice v tvare $5x + 12y - 66 = 0$ a $-5x - 12y - 64 = 0$.

*Príklad 13.*

Vypočítajte vzdialenosť bodu $A[5, -1,3]$ od priamky $p: x = -1 + 2t$, $y = -5 + 3t, z = -2 + 2t, t \in R$.

*Riešenie:*

V predchádzajúcej úlohe sme využili vzťah na určenie vzdialenosti bodu od priamky, ale v rovine. V priestore nie je jednoduché nájsť analytické vyjadrenie kolmice z bodu na danú priamku. Využijeme preto rovinu $\alpha$, ktorá je kolmá na priamku *p* s prechádza bodom *A*. Prienikom priamky *p* a roviny $\alpha$ je bod *A´*, preto vzdialenosť bodu *A* od priamky *p* je vzdialenosť bodov *A*, *A´*, $|A, p| = |A, A´|$.

Nájdeme najskôr všeobecnú rovnicu roviny $\alpha$, pretože vieme, že smerový vektor priamky *p* je aj normálovým vektorom $\vec{n}$ roviny $\alpha$, a teda $\vec{n}(2,3,2)$. Rovnica roviny $\alpha$ má potom všeobecný tvar $2x + 3y + 2z + D = 0$. Koeficient *D* vypočítame s využitím súradníc bodu $A[5, -1,3]$ roviny $\alpha$:

$$2.5 + 3.(-1) + 3.2 + D = 0$$

$$10 - 3 + 6 + D = 0$$

$$D = -13$$

Všeobecná rovnica roviny $\alpha$ je $2x + 3y + 2z - 13 = 0$. Teraz nájdeme súradnice bodu *A´*, ktorý je prienikom priamky *p* a roviny $\alpha$:

$$2.(-1 + 2t) + 3.(-5 + 3t) + 2.(-2 + 2t) - 13 = 0$$

$$-2 + 4t - 15 + 9t - 4 + 4t - 13 = 0$$

$$17t - 34 = 0$$

$$t = 2$$

Dosadením hodnoty $t = 2$ do parametrických rovníc priamky *p* získame súradnice bodu *A´*:

$$x = -1 + 2.2 = 3$$

$$y = -5 + 3.2 = 1$$

$$z = -2 + 2.2 = 2$$

Priesečníkom *p* a roviny $\alpha$ je bod $A'[3,1,2]$. Vzdialenosť dvoch bodov *A, A´* vypočítame ako veľkosť vektora $\overrightarrow{AA'}$:

$$|A, p| = |A, A'| = \left|\overrightarrow{AA'}\right| = \sqrt{(3-5)^2 + (1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Vzdialenosť bodu *A* od priamky *p* je 3.

*Príklad 14.*

Vzdialenosť bodu *A* od roviny $\beta$ je dĺžkou strany štvorca *ABCD,* ak $\beta: 3x + 2y - 6z + 26 = 0$ a $A[9, -2, 0]$. Vypočítajte obsah štvorca *ABCD*.

*Riešenie:*

Súradnice normálového vektora $\vec{n}$ roviny $\beta$ sú $\vec{n}(3,2,-6)$. Potom pre vzdialenosť bodu *A* od roviny $\beta$ platí:

$$|A, \beta| = \frac{|3x + 2y - 6z + 26|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}}$$

$$|A, \beta| = \frac{|3.9 + 2.(-2) - 6.0 + 26|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{|27 - 4 + 26|}{\sqrt{49}}$$

$$|A,\beta| = \frac{|27 - 4 + 26|}{\sqrt{49}} = \frac{49}{7} = 7$$

Obsah štvorca *ABCD* so stranou s dĺžkou $a = 7j$ je:

$$S = a^2 = 7^2 = 49j^2$$

Obsah štvorca *ABCD* je $49\ j^2$.

*Úlohy na precvičenie*

1. Vypočítajte uhol uhlopriečok štvoruholníka *MNPQ*, ak $M[3,4], N[2,0], P[-2,2]$, $Q[-2,-1]$.
2. Vypočítajte vzdialenosť vrcholu *C* trojuholníka *ABC* od strany *AB*, ak $A[-4,2]$, $B[2,-5], C[5,0]$.
3. Vypočítajte vzdialenosť rovnobežiek s rovnicami $3x + 4y - 20 = 0$, $6x + 8y + 25 = 0$.
4. Napíšte rovnice osí uhlov priamok $4x - 12y - 2 = 0$ a $5x + y + 3 = 0$.
5. Nájdite pravouhlý priemet bodu $A[3,1,-1]$ do roviny $\beta: x + 2y + 3z - 30 = 0$.
6. Vypočítajte vzdialenosť bodu $B[5,1,-1]$ od roviny $\rho: x - 2y - 2z = -4$.
7. Vypočítajte vzdialenosť rovnobežných rovín $4x + 3y - 5z - 8 = 4x + 3y - 5z + 12 = 0$.
8. Napíšte rovnice rovnobežnej roviny $\alpha$ k rovine $\beta: x - 2y + 2z - 5 = 0$ tak, aby ich vzdialenosť bola 2.
9. Vypočítajte vzdialenosť bodu $P[1,2,5]$ od priamky $p: x = t, y = 1 - 2t, z = 3 + t, t \in R$.
10. Určte bod súmerný s bodom $P[2,7,1]$ podľa roviny $\alpha: x - 4y + z + 7 = 0$.
11. Vypočítajte uhol stien *ABC, ABD* štvorstena *ABCD*, ak $A[1,2,-2], B[-1,-3,-1]$, $C[2,3,-3], D[1,-1,2]$.
12. Vypočítajte uhol priamky *p* a roviny $\alpha$:

    a) $p: x = 5 + 6t, y = 1 - 3t, z = 2 + t, t \in R;\ \alpha: 7x + 2y - 3z + 5 = 0$,
    b) $p: x = t, y = -t, z = -4 - 2t, t \in R;\ \alpha: x + y + z + 1 = 0$.

# 6 Kužeľosečky

V šiestej kapitole uvedieme definíciu a vlastnosti kužeľosečiek vrátane ich analytického vyjadrenie.

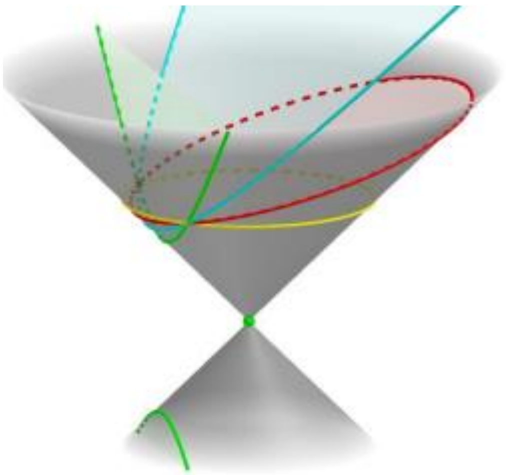
Kužeľosečky sú rovinné krivky druhého stupňa, ktoré delíme na:

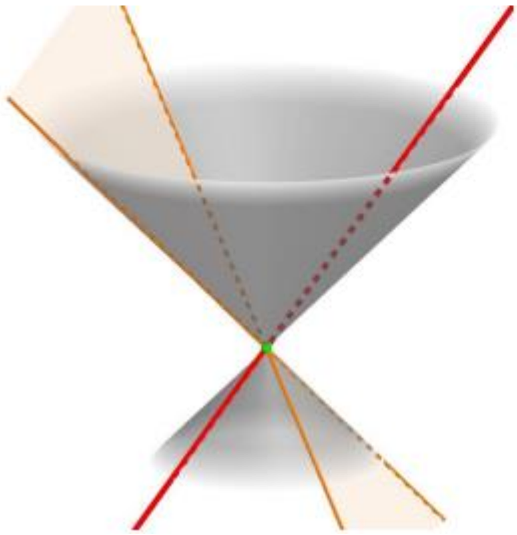
- regulárne kužeľosečky: kružnica, elipsa, parabola hyperbola,
- singulárne kužeľosečky: bod, priamka, dve priamky.

Všetky typy kužeľosečiek môžeme získať ako rezy kužeľovej plochy rovinou. Ak rovina rezu neprechádza vrcholom, rezom kužeľovej plochy je *regulárna kužeľosečka*. Ak je rovina rezu vrcholová (t. j. prechádza vrcholom), rezom kužeľovej plochy je *singulárna kužeľosečka*. My sa ďalej budeme venovať len regulárnym kužeľosečkám, pričom všeobecná rovnica týchto kužeľosečiek je:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Tvar krivky závisí od veľkosti uhla, ktorý zviera rovina rezu s osou kužeľovej plochy. Na obrázku sú uvedené dva špecifické prípady.



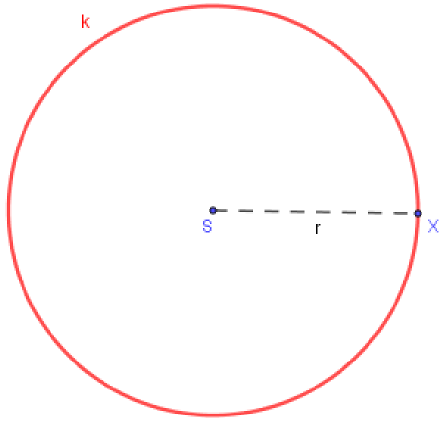


## 6.1 Kružnica

Uvedieme najznámejšiu definíciu kružnice. Nech je v rovine daný bod $S$ a reálne číslo $r > 0$ . *Kružnica* $k(S, r)$ je množina bodov $X$ roviny, pre ktoré platí $|SX| = r$.

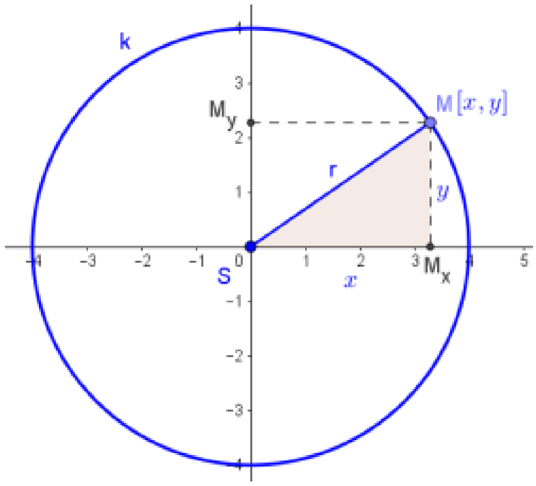
Symbolicky zápis definície: $k = \{X \in E_2, |SX| = r\}$

Bod *S* sa nazýva *stred* kružnice a číslo *r* je *polomer* kružnica. Pre priemer kružnice *d* platí: $d = 2r$.




Teraz odvodíme *stredovú rovnicu kružnice*. Zavedieme karteziánsku súradnicovú sústavu $\langle O, x, y \rangle$. Nech stred *S* kružnice je totožný so začiatkom súradnicovej sústavy *O*, bod $M[x, y]$ je ľubovoľný bod kružnice a je daný pevný polomer *r*. Podľa Pytagorovej vety pre trojuholník $SMM_x$ a definície kružnice platí:

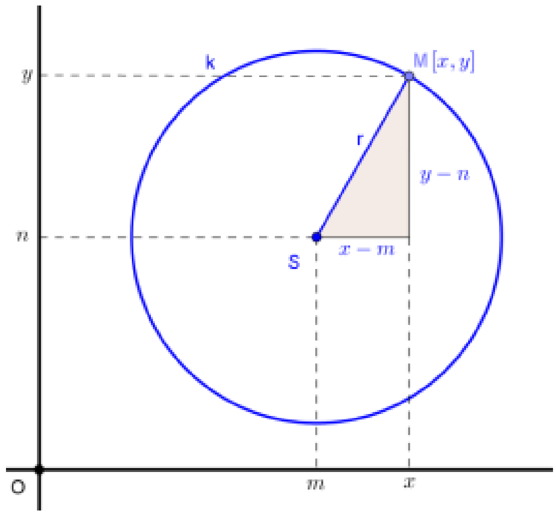
$$|SX| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2$$




*Poznámka.* Každý bod $X[x, y]$, ktorého súradnice vyhovujú uvedenej stredovej rovnici kružnice, tak je bodom kružnice *k* a opačne, každý bod kružnice *k* má súradnice vyhovujúce stredovej rovnici kružnice.

Ak $S[m, n]$, potom podľa Pytagorovej vety pre trojuholník $SMM_0$ platí:

$$|SM|^2 = |SM_0|^2 + |MM_0|^2$$




Dosadíme súradnice dĺžok strán trojuholníka, potom platí: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.
Získaná rovnica sa nazýva stredová rovnica kružnice $k(S, r)$, kde $S[m, n]$.

*Príklad 1.*

Upravte všeobecnú rovnicu kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ na jej stredovú rovnicu. Určte jej súradnice stredu *S* a polomer *r*.

*Riešenie:*

Všeobecnú rovnicu kružnice postupne upravujeme:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = 15$$

$$x^2 - 2.1.x + y^2 + 2.3.y = 15$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 = 15$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

Z uvedenej rovnici vyplýva, že kružnica má stred $S[1, -3]$ a polomer $r = 5$.

*Príklad 2.*

Zistite, či rovnica $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 29 = 0$ je rovnicou kružnice. Ak áno, určte jej súradnice stredu *S* a polomer *r*.

*Riešenie:*

Postupujeme ako v predchádzajúcom príklade:

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 29 = 0$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 10y = -29$$

$$x^2 + 2.1. x + y^2 - 2.5. y = -29$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y-5)^2 - 25 = 15$$

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = -3$$

Daná rovnica nie je rovnicou kružnice.

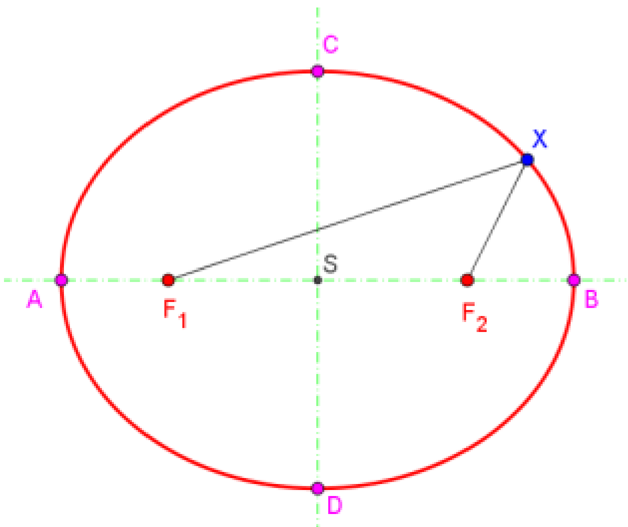
## 6.2 Elipsa

Definujme ďalšiu kužeľosečku – elipsu. V rovine sú dané dva rôzne body $F_1, F_2$ a reálne číslo $a > 0$, kde $|F_1, F_2| < 2a$. *Elipsa* je množina všetkých bodov *X* z roviny, pre ktoré platí: $|F_1X| + |F_2X| = 2a$.

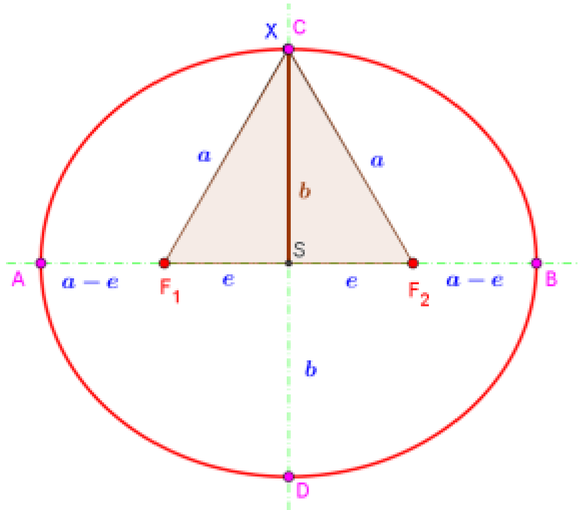
Symbolicky zápis definície: $e = \{X \in E_2, |F_1X| + |F_2X| = 2a\}$

Body $F_1, F_2$ sa nazývajú *ohniská* elipsy, úsečky $F_1X$, $F_2X$ sú *ohniskové sprievodiče* bodu *X*.

*Poznámka.* Podľa definície je elipsa množinou takých bodov v rovine, z ktorých každý má rovnaký súčet vzdialeností od dvoch pevne zvolených bodov (ohnísk). Vzdialenosť ohnísk je teda prirodzene menšia ako $2a$, inak by pre trojuholník $F_1F_2X$ nebola splnená trojuholníková nerovnosť.

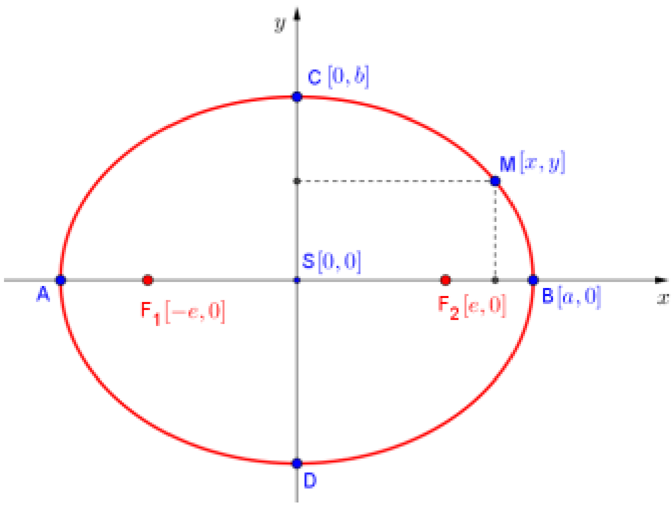



Elipsa je rovinná krivka, ktorá má svoj tvar a pomenovanie jednotlivých jej súčastí. Priamka, ktorá prechádza ohniskami $F_1, F_2$ sa nazýva *hlavná os* elipsy. Stred úsečky $F_1F_2$ je *stred* elipsy, ktorý označíme $S$. Priesečníky hlavnej osi s elipsou sú body $A$, $B$, ktoré nazývame *hlavné vrcholy* elipsy a $|AS| = |BS| = a$. Priamka, kolmá na hlavnú os a prechádzajúca stredom elipsy, je *vedľajšia os* elipsy. Vedľajšia os elipsy pretína elipsu v bodoch $C$,$D$, ktoré nazývame *vedľajšie vrcholy* elipsy a platí $|CS| = |DS| = b$. Ohniská sú pevne určené, preto ich vzdialenosť je taktiež pevne stanovená. Označíme $|F_1F_2| = 2e$. Číslo $e = |SF_1| = |SF_2|$ nazývame *ohnisková excentricita* (výstrednosť).




Podľa Pytagorovej vety platí vzťah: $a^2 = e^2 + b^2$

Pre elipsu odvodíme jej *stredovú rovnicu*. Zavedieme karteziánsku súradnicovú sústavu $\langle O, x, y\rangle$ a nech ohniská $F_1, F_2$ majú súradnice $F_1[-e, 0], F_2[e, 0]$, pričom $|F_1, F_2| = 2e < 2a$. Nech $M[x, y]$ je ľubovoľný bod elipsy, potom podľa definície platí: $|F_1M| + |F_2M| = 2a$.




Uvedený vzťah prepíšeme podľa súradníc v obrázku a postupne ho upravíme:

$$\sqrt{(x+e)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} \qquad /^2$$

$$(x+e)^2 + (y-0)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} + (x-e)^2 + (y-0)^2$$

$$x^2 + 2xe + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2xe + e^2 + y^2$$

$$4xe = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \qquad /:4$$

$$xe = a^2 - a\sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$xe - a^2 = -a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \qquad /^2$$

$$x^2e^2 - 2xea^2 + a^4 = a^2.((x-e)^2 + y^2)$$

$$x^2e^2 - 2xea^2 + a^4 = a^2.(x^2 - 2xe + e^2 + y^2)$$

$$x^2e^2 - 2xea^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xea^2 + a^2e^2 + a^2y^2$$

$$x^2e^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2e^2 - a^4$$

$$x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$

$$-x^2(a^2 - e^2) - a^2y^2 = -a^2(a^2 - e^2)$$

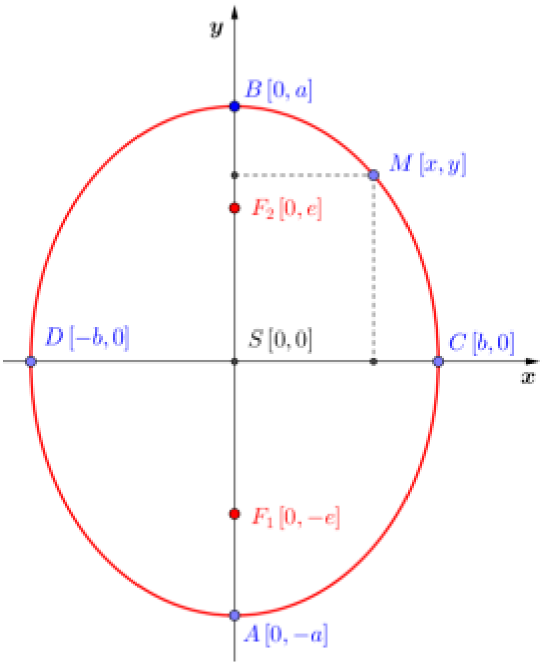
$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad /:(ab)^2$$

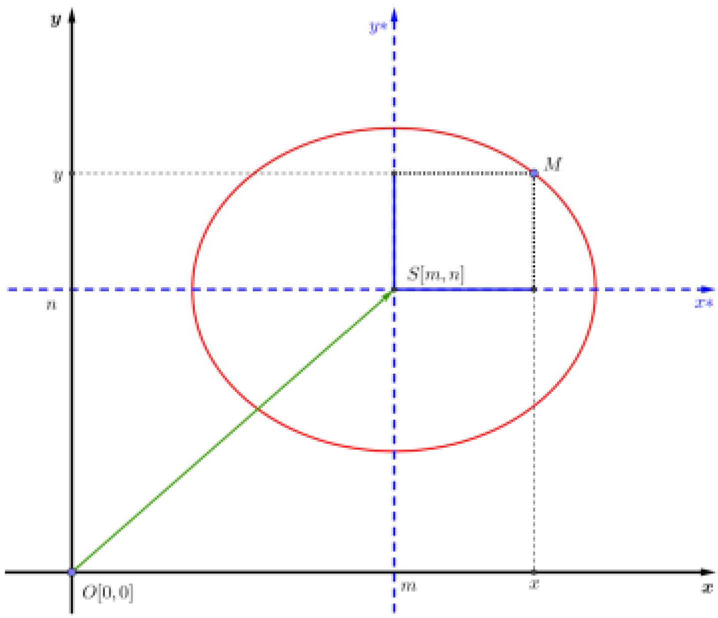
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Rovnicu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nazývame *stredovou rovnicou elipsy*, kde stred elipsy je v bode $S[0,0]$ a jej ohniská ležia na osi *x*.

Stredová rovnica elipsy má tvar $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, ak ohniská ležia na osi *y* a stred elipsy je v bode $S[0,0]$. Platí aj podmienka $a > b$.



Ak $S[m,n]$, potom dostaneme *stredovú rovnicu elipsy* $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$, ak jej hlavná os je rovnobežná so súradnicovou osou *x*, alebo $\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$, ak jej hlavná os je rovnobežná so súradnicovou osou *y*.




*Príklad 3.*

Upravte všeobecnú rovnicu elipsy $9x^2+16y^2+18x-160y+265=0$ na jej stredovú rovnicu. Určte jej súradnice stredu *S*, vrcholov *A*, *B*, *C*, *D* a ohnísk $F_1, F_2$.

*Riešenie:*

Všeobecnú rovnicu elipsy postupne upravujeme:

$$9x^2+16y^2+18x-160y+265=0$$

$$9x^2+18x+16y^2-160y+265=0$$

$$9(x^2+2x)+16(y^2-10y)+265=0$$

$$9(x+1)^2-9.1+16(y-5)^2-16.25+265=0$$

$$9(x+1)^2+16(y-5)^2=9+400-265$$

$$9(x+1)^2+16(y-5)^2=144$$

$$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$$

$$\frac{(x+1)^2}{4^2}+\frac{(y-5)^2}{3^2}=1$$

Z uvedenej rovnici vyplýva, že elipsa má stred $S[-1,5]$, dĺžka hlavne poloosi je $a = 4$, dĺžka vedľajšej poloosi je $b = 3$, pričom hlavná os elipsy je rovnobežná so súradnicovou osou *x*. Potom hlavné a vedľajšie vrcholy elipsy majú tieto súradnice: $A[-5,5]$, $B[3,5]$, $C[-1,8]$, $D[-1,2]$.

Zo vzťahu $a^2 = e^2 + b^2$ vypočítame vzdialenosť ohnísk od stredu elipsy:

$$e^2 = a^2 - b^2$$

$$e^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

$$e = \sqrt{7}$$

Súradnice ohnísk ležiacich na hlavnej osi elipsy majú súradnice $F_1[-1-\sqrt{7}, 5], F_2[-1+\sqrt{7}, 5]$.

*Príklad 4.*

Zistite, či rovnica $x^2 + 9y^2 - 36y + 36 = 0$ je rovnicou elipsy. Ak áno, určte jej súradnice stredu, vrcholov a ohnísk.

*Riešenie:*

Všeobecnú rovnicu elipsy upravujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade:

$$x^2 + 9y^2 - 36y + 36 = 0$$

$$x^2 + 9(y^2 - 4y) + 36 = 0$$

$$x^2 + 9(y-2)^2 - 9.4 + 36 = 0$$

$$x^2 + 9(y-2)^2 - 36 + 36 = 0$$

$$x^2 + 9(y-2)^2 = 0$$

Daná rovnica nie je rovnicou elipsy. Ide o kvadratickú rovnicu, ktorej riešením je bod so súradnicami $[0,2]$.

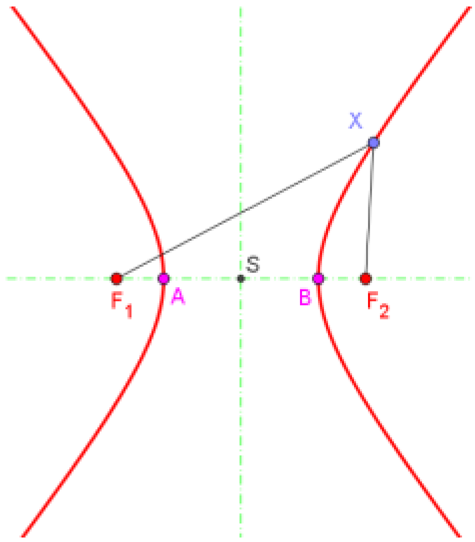
## 6.3 Hyperbola

Ďalšou kužeľosečkou, ktorej sa budeme venovať v tejto kapitole, je hyperbola. Uvedieme jej definíciu. V rovine sú dané dva rôzne body $F_1, F_2$ a reálne číslo $a > 0$, kde $|F_1, F_2| > 2a$. *Hyperbola* je množina všetkých bodov *X* z roviny, pre ktoré platí: $\left||F_1X| - |F_2X|\right| = 2a$.

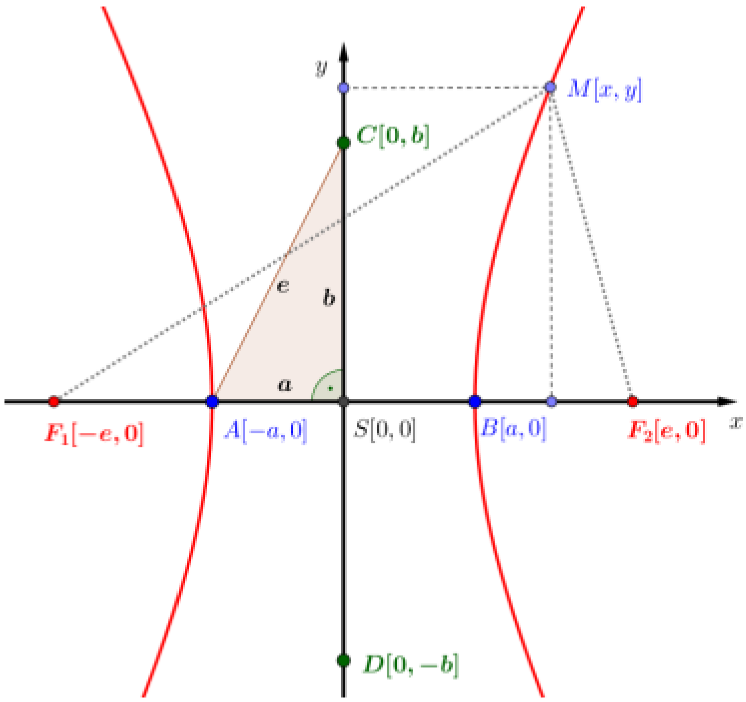
Symbolicky zápis definície: $h = \left\{X \in E_2, \left||F_1X| - |F_2X|\right| = 2a\right\}$

Body $F_1, F_2$ sa nazývajú *ohniská* hyperboly, úsečky $F_1X$, $F_2X$ sú *ohniskové sprievodiče* bodu *X*.

*Poznámka.* Podľa definície je hyperbola množina takých bodov v rovine, z ktorých každý má rovnaký rozdiel vzdialeností od dvoch pevných bodov (ohnísk). Môže nastať prípad takej polohy bodu $X$, kde $|F_1X| < |F_2X|$. Potom by $|F_1X| - |F_2X| < 0$ a dostali by sme sa do sporu s rovnosťou kladnej hodnote $2a$. Z toho dôvodu sa rozdiel $|F_1X| - |F_2X|$ uvádza v absolútnej hodnote. Taktiež vzdialenosť ohnísk je väčšia ako $2a$. Inak by pre trojuholník $F_1F_2X$ nebola splnená trojuholníková nerovnosť.




Hyperbola je rovinná krivka, ktorá má svoj charakteristický tvar. Priamka, ktorá prechádza ohniskami $F_1, F_2$ sa nazýva *hlavná os* hyperboly. Stred úsečky $F_1F_2$ je *stred* hyperboly, ktorý označíme $S$. Priesečníky hlavnej osi s hyperbolou sú body $A$, $B$, ktoré nazývame *hlavné vrcholy* hyperboly a $|AS| = |BS| = a$. Priamka, kolmá na hlavnú os a prechádzajúca stredom hyperboly, je *vedľajšia os* hyperboly. Vedľajšia os hyperboly pretína hyperbolu v bodoch $C$,$D$, ktoré nazývame *vedľajšie vrcholy* hyperboly a platí $|CS| = |DS| = b$. Ohniská sú pevne určené, preto ich vzdialenosť je taktiež pevne stanovená. Označíme $|F_1F_2| = 2e$. Číslo $e = |SF_1| = |SF_2|$ nazývame *ohnisková excentricita* (výstrednosť).




Ak uvážime, že $a$,$e$ sú zvolené reálne čísla, kde $e > a$, potom platí: $e^2 - a^2 = b^2$

Pre hyperbolu odvodíme jej *stredovú rovnicu*. Zavedieme karteziánsku súradnicovú sústavu $\langle O, x, y\rangle$ a nech ohniská $F_1, F_2$ majú súradnice $F_1[-e, 0], F_2[e, 0]$, pričom $|F_1, F_2| = 2e > 2a$. Nech $M[x,\ y]$ je ľubovoľný bod hyperboly, potom podľa definície platí: $\big||F_1X| - |F_2X|\big| = 2a$

Podľa súradníc v obrázku analyticky vyjadríme vzťah z definície hyperboly a postupne ho upravujeme:

$$\sqrt{(x+e)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + (y-0)^2} = 2a + \sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} \qquad /^2$$

$$(x+e)^2 + (y-0)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} + (x-e)^2 + (y-0)^2$$

$$x^2 + 2xe + e^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2xe + e^2 + y^2$$

$$4xe = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \qquad /:4$$

$$xe = a^2 + a\sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$xe - a^2 = a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \qquad /^2$$

$$x^2e^2 - 2xea^2 + a^4 = a^2.((x-e)^2 + y^2)$$

$$x^2e^2 - 2xea^2 + a^4 = a^2.(x^2 - 2xe + e^2 + y^2)$$

$$x^2e^2 - 2xea^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xea^2 + a^2e^2 + a^2y^2$$

$$x^2e^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2e^2 - a^4$$

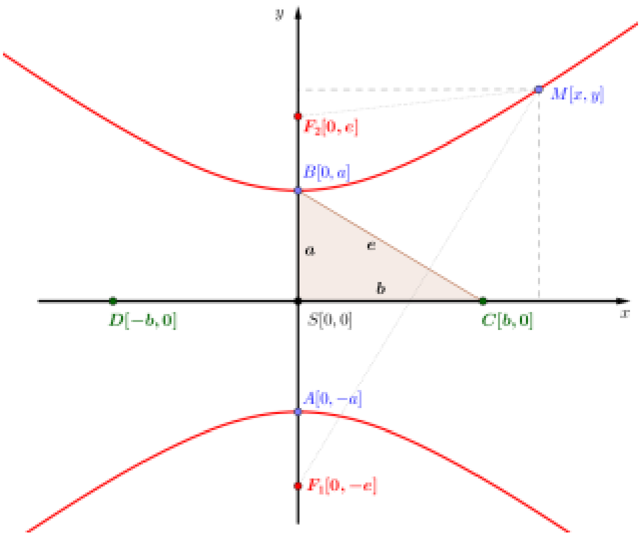
$$x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad /:(ab)^2$$

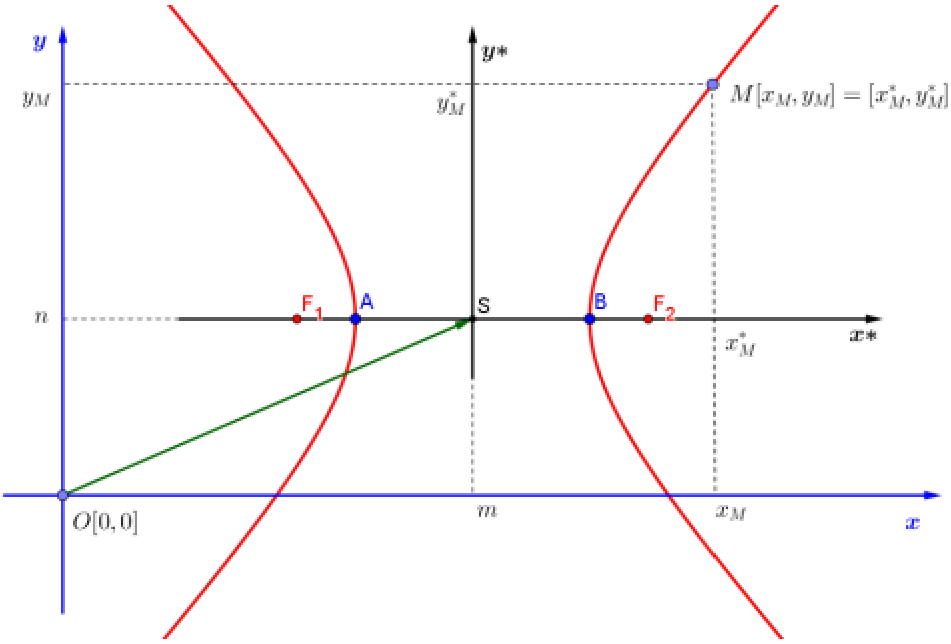
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Rovnicu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ nazývame *stredovou rovnicou hyperboly*, kde stred hyperboly je v bode $S[0,0]$ a jej ohniská ležia na osi *x*.

Stredová rovnica hyperboly má tvar $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, ak ohniská ležia na súradnicovej osi *y* a stred hyperboly je v bode $S[0,0]$.




Ak stred hyperboly má súradnice $S[m,n]$, potom dostaneme *stredovú rovnicu hyperboly* $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, ak jej hlavná os je rovnobežná so súradnicovou osou *x*, alebo $-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, ak jej hlavná os je rovnobežná so súradnicovou osou *y*.




Asymptoty, ktoré zodpovedajú stredovej rovnici hyperboly, sú priamky s rovnicami $\frac{x-m}{a} = \pm\frac{y-n}{b}$

*Príklad 5.*

Vypočítajte súradnice stredu, ohnísk, hlavných vrcholov a asymptot hyperboly, ktorá je daná všeobecnou rovnicou $9x^2 - 16y^2 - 90x - 96y + 225 = 0$.

*Riešenie:*

Upravíme všeobecnú rovnicu hyperboly na jej stredovú rovnicu, z ktorej vieme zistiť ďalšie údaje:

$$9x^2 - 16y^2 - 90x - 96y + 225 = 0$$

$$9x^2 - 90x - 16y^2 - 96y + 225 = 0$$

$$9(x^2 - 10x) - 16(y^2 + 6y) + 225 = 0$$

$$9(x-5)^2 - 9.25 - 16(y+3)^2 + 16.9 + 225 = 0$$

$$9(x-5)^2 + 16(y+3)^2 = 225 - 144 - 225$$

$$9(x-5)^2 + 16(y+3)^2 = -144$$

$$-\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

$$-\frac{(x-5)^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

Z uvedenej rovnici vyplýva, že hyperbola má súradnice stredu $S[5,-3]$, dĺžka hlavne poloosi je $a = 4$, dĺžka vedľajšej poloosi je $b = 3$, pričom hlavná os hyperboly je rovnobežná so súradnicovou osou *y*. Hlavné vrcholy hyperboly majú súradnice $A[5,0]$, $B[5,-6]$.

Zo vzťahu $e^2 - a^2 = b^2$ vypočítame vzdialenosť ohnísk od stredu elipsy:

$$e^2 = a^2 + b^2$$

$$e^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$e = 5$$

Súradnice ohnísk ležiacich na hlavnej osi elipsy majú súradnice $F_1[5,2], F_2[5,-8]$.

Rovnice asymptot získame úpravou rovníc $\frac{x-5}{4} = \pm\frac{y+3}{3}$ , t. j. $a_1\colon 3x - 4y - 27 = 0$, $a_2\colon 3x + 4y - 3 = 0$.

*Príklad 6.*

Vypočítajte súradnice stredu, ohnísk, hlavných vrcholov a asymptot hyperboly, ktorá je daná všeobecnou rovnicou $4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$.

*Riešenie:*

Všeobecnú rovnicu hyperboly postupne upravujeme:

$$4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$$

$$4x^2 + 8x - y^2 - 4y - 4 = 0$$

$$4(x^2 + 2x) - (y^2 + 4y) - 4 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4.1 - (y+2)^2 + 4 - 4 = 0$$

$$4(x+1)^2 - (y+2)^2 = 4$$

$$(x+1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$$(x+1)^2 - \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$$

Stred hyperboly má súradnice $S[-1,-2]$, dĺžka hlavne poloosi je $a = 1$, dĺžka vedľajšej poloosi je $b = 2$, hlavné vrcholy hyperboly majú súradnice $A[0,-2]$, $B[-2,-2]$. Hlavná os hyperboly je rovnobežná so súradnicovou osou *x*.

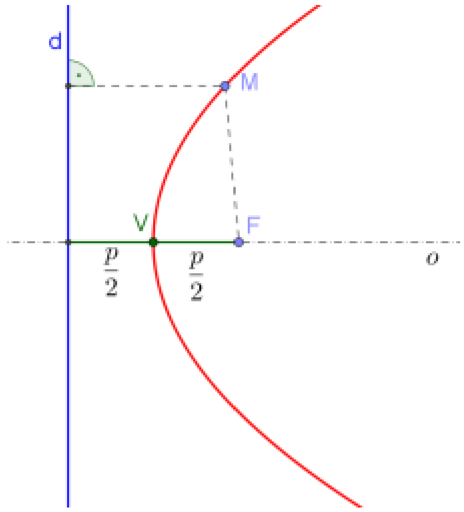
Pre excentricitu platí: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, preto súradnice ohnísk sú $F_1[-1-\sqrt{5},-2], F_2[-1+\sqrt{5},-2]$.

Rovnice asymptot sú: $x + 1 = \frac{y+2}{2}$ a $x + 1 = -\frac{y+2}{2}$.

## 6.4 Parabola

Definícia paraboly je nasledovná. V rovine je daná priamka *d* a bod *F* taký, že $F \notin d$. *Parabola* je množina všetkých bodov *X* roviny, pre ktoré platí: $|FM| = |M,d|$.

Symbolicky zápis definície: $p = \{X \in E_2, |FM| = |M,d|\}$




Bod $F$ sa nazýva *ohnisko* paraboly, priamka $d$ je *direkčná priamka (direkčná os, riadiaca priamka).* Vzdialenosť $|F,\ d|\ =\ p$ sa nazýva *parameter*. Priamka, kolmá na riadiacu priamku a prechádzajúca bodom $F$, sa nazýva *os* paraboly. Bod $V$, ktorý leží na osi paraboly v strede medzi ohniskom riadiacou priamkou, sa nazýva *vrchol* paraboly. Platí

$$|FV| = |V,d| = \frac{p}{2}$$

Odvodíme analytické rovnice paraboly, tzv. vrcholovú rovnicu paraboly tak, že zavedieme karteziánsku súradnicovú sústavu $\langle O,\ x,\ y\rangle$, vhodne umiestnime vrchol, ohnisko a direkčnú priamku.

Nech $V[0,0], d: x = -\frac{p}{2}, \left[\frac{p}{2}, 0\right]$ a všeobecný bod paraboly označíme $M[x,y]$. Podľa definície paraboly platí $|FM| = |M,d|$. Prevedieme do analytického vyjadrenia a dostávame

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \qquad /^2$$

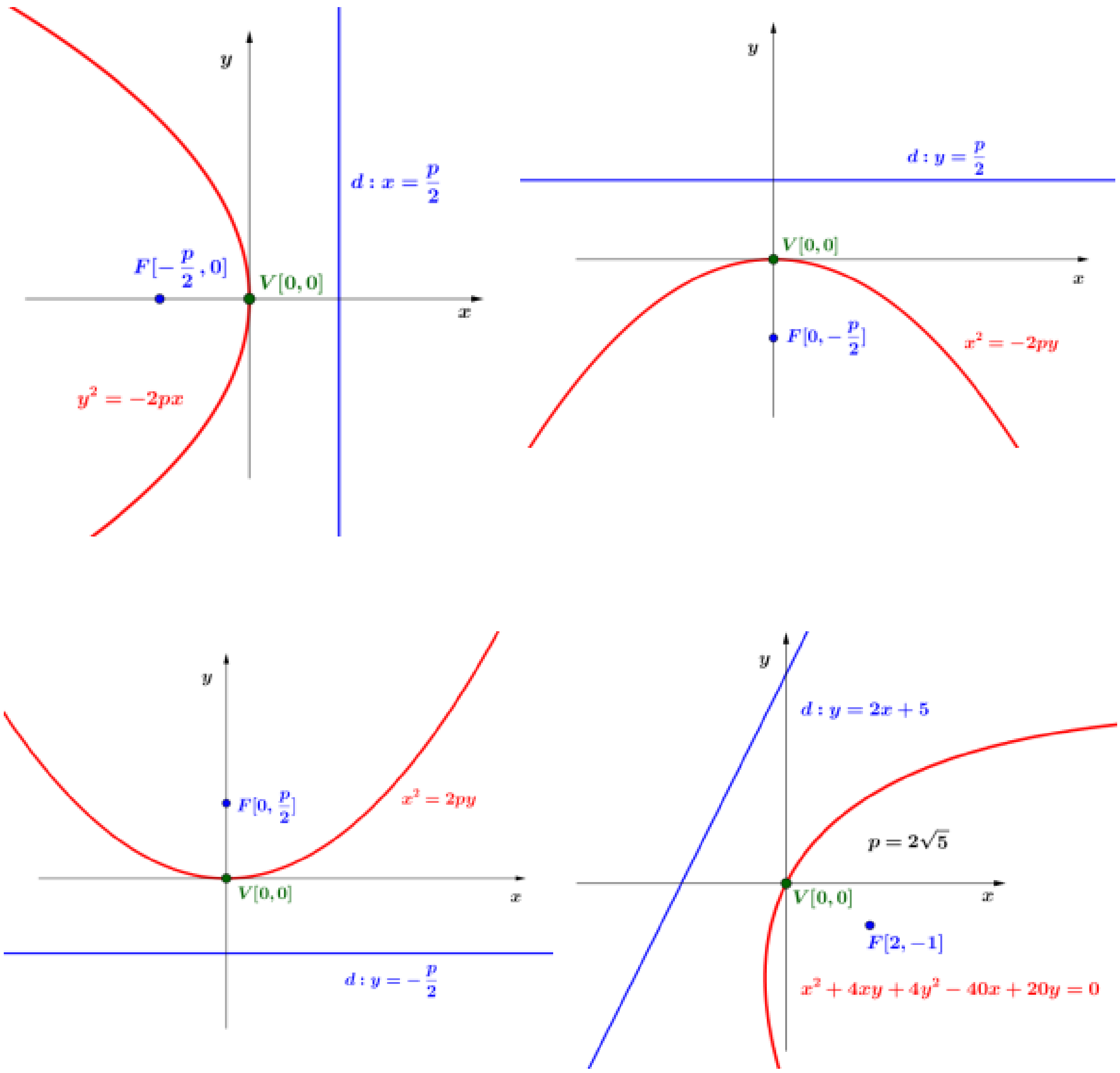
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

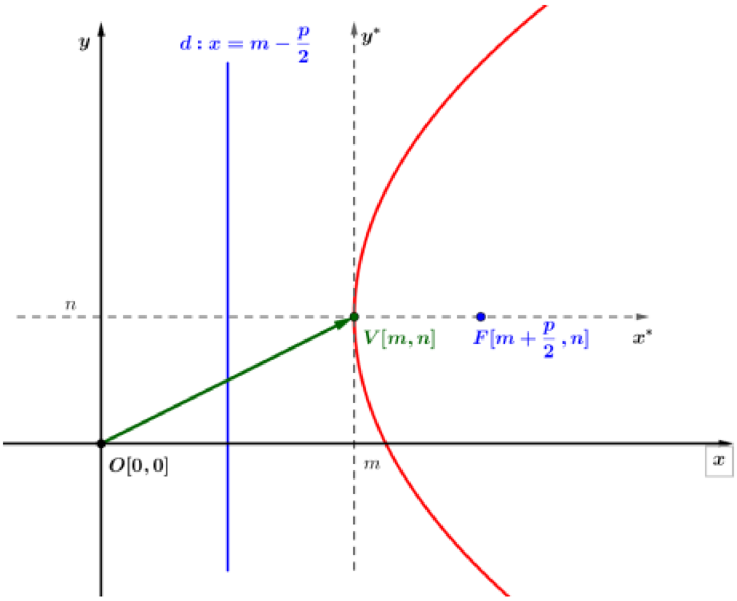
Rovnicu $y^2 = 2px$ nazývame vrcholovou rovnicou paraboly s vrcholom $V[0,0]$ a direkčnou priamkou $x = -\frac{p}{2}$.

*Poznámka.* Od umiestnenia ohniska $F$ a direkčnej priamky $d$ závisí, v akom tvare bude vrcholová rovnica paraboly. Jednotlivé prípady sú naznačené na ďalšom obrázku. Obzvlášť si všimnime prípad, kedy direkčná priamka nie je totožná so súradnicovou osou.

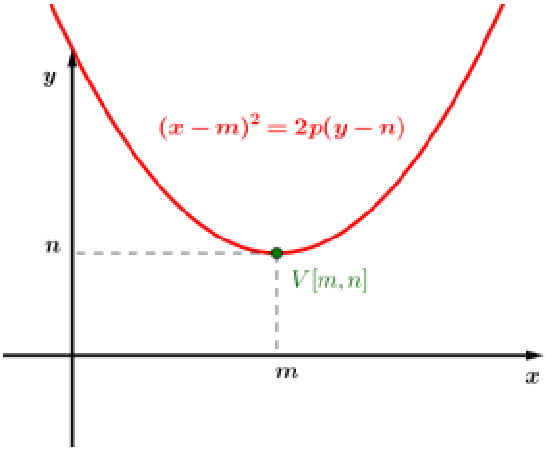


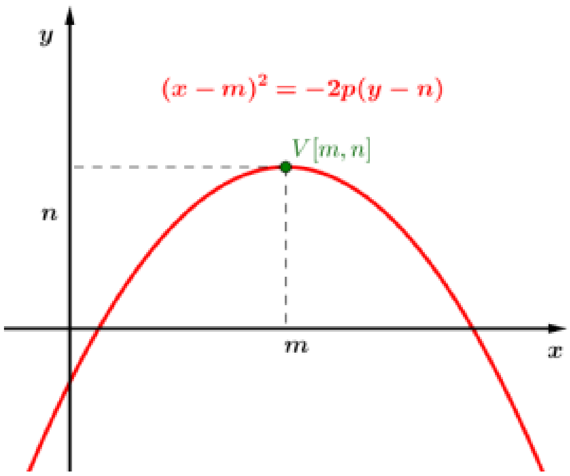

Uvedieme rovnicu paraboly, keď posunieme vrchol so súradnicami $[0,0]$ do $V[m,n], [m,n] \neq [0,0]$.

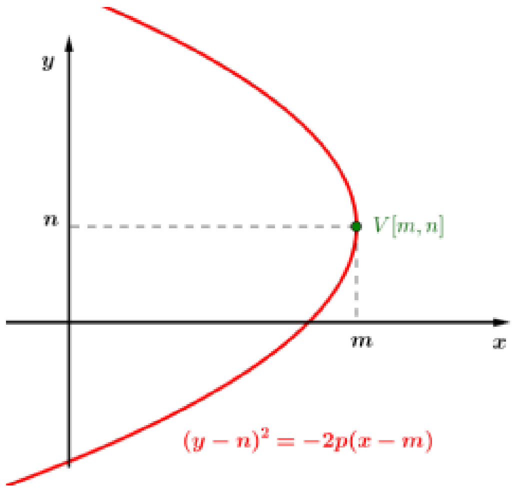
Ak potom $d: x = m - \frac{p}{2}, F\left[m + \frac{p}{2}, n\right]$, *vrcholová rovnica* paraboly má tvar $(y-n)^2 = 2p(x-m)$.




Z uvedeného vyplýva, že existujú aj ďalšie „tvary “ vrcholovej rovnice paraboly pre $V[m,n] \neq [0,0]$. Na jednotlivých obrázkoch sú vyznačené vrcholy parabol, ktorých osi sú vždy rovnobežné s niektorou súradnicovou osou.



*Príklad 7.*

Daná je parabola všeobecnou rovnicou $x^2 + 12x - 6y + 48 = 0$. Upravte danú rovnicu na vrcholovú rovnicu paraboly a zistite súradnice vrcholu.

*Riešenie:*

Rovnicu postupne upravujeme:

$$x^2 + 12x - 6y + 48 = 0$$

$$(x^2 + 2.6.x) - 6y + 48 = 0$$

$$(x + 6)^2 - 36 - 6y + 48 = 0$$

$$(x + 6)^2 = 36 + 6y - 48$$

$$(x + 6)^2 = 6y - 12$$

$$(x + 6)^2 = 6(y - 2)$$

$$(x + 6)^2 = 2.3.(y - 2)$$

Z uvedeného tvaru vyplýva, že parabola má vrchol so súradnicami $V[-6,2]$ a parameter $p = \frac{3}{2}$. Potom rovnica direkčnej priamky je $d: x = -\frac{27}{4}$ a súradnice ohniska paroly je $F\left[-\frac{21}{4}, 2\right]$.

*Úlohy na precvičenie*

1. Dané sú všeobecné rovnice rôznych kužeľosečiek. Zistite, o aké kužeľosečky ide a nájdite súradnice ich stredov, hlavných a vedľajších vrcholov, a tiež ohnísk.

   a) $5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 9 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$
   c) $8x^2 - 3y^2 - 2 = 0$
   d) $x^2 + 14x - 4y + 61 = 0$
   e) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$
   f) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$
   g) $x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$
   h) $64x^2 - 225y^2 + 384x - 450y + 14751 = 0$
   i) $-49x^2 + 16y^2 - 25 = 0$
   j) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 17 = 0$
   k) $x^2 + y^2 + 6x + 12y - 4 = 0$
   l) $25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$
   m) $y^2 - 6x - 10y + 31 = 0$
   n) $9x^2 - 16y^2 - 18x + 24y - 144 = 0$
   o) $3y^2 + x - 12y + 14 = 0$

# Literatúra

[1] Jirotková, D. (1990). Rozvoj prostorové představivosti žáků. Komenský, 114 (5), s. 278 – 281.

[2] Molnár, J. (2004). Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Katedra algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty.

[3] Ostatníková, D., Laznibatová, J. a Dohnányiová, M. (1996). Testosterone influence on spatial ability in prepubertal children. Studia Psychologica, 38(4), s. 237 – 245.

[4] Pavlovičová, G., Rumanová, L. (2008). Polohové úlohy zo stereometrie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 86 s. ISBN 978-80-8094-344-8.

[5] Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vidermanová, K. (2010). Zábavné úlohy z geometrie. Nitra: Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2010. 90 s. ISBN 978-80-8094-789-7.

[6] Pavlovičová, G., Švecová, V. (2016). Pracovné dielne z matematiky. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre. 155 s. ISBN 978-80-558-1046-1.

[7] Páleníková, K., Záhorská, J., Vargová, M., Rumanová, L. (2020). Základy matematiky 2. 1 vydanie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2020. 276 s. ISBN 978-80-558-1606-7.

[8] Rumanová, L., Drábeková, J., Laššová, K. (2022). Metódy zobrazovania vo vyučovacom procese s prepojením na prax. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2022. 102 s. ISBN 978-80-558-1924-2.

[9] Rumanová, L., Hnyk, D. (2012). Niekoľko úloh o štvorstene na rozvoj priestorovej predstavivosti. In Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky: zborník príspevkov z vedeckého seminára organizovaného Katedrou matematiky dňa 4. novembra 2011v Nitre, Nitra: UKF v Nitre, s. 36 – 43.

[10] Rumanová, L., Pavlovičová, G. (2014). Metrické úlohy zo stereometrie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre. 64 s. ISBN 978-80-558-0718-8.

[11] Rumanová, L., Záhorská, J. (2019). Chyby v riešeniach vybraných úloh z geometrie. In Acta Mathematica Nitriensia, 5(2), Nitra: FPV UKF v Nitre, s. 23 – 29.

[12] Rumanová, L., Záhorská, J. (2022). Pytagorova veta v školskej praxi. Nitra: UKF, 2022. 59 s. ISBN 978-80-558-1953-2.

[13] Šedivý, O., Rumanovská, H. (1988). Niekoľko metodických poznámok k rozvoju priestorovej predstavivosti, Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre č. 4, Nitra.

[14] Šedivý, O., Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vallo, D. (2007). Stereometria: umenie vidieť a predstavovať si priestor. Nitra: FPV UKF v Nitre.

[15] Šedivý, O., Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vallo, D., Vidermanová, K., Záhorská,

J. (2013). Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Nitra: FPV UKF v Nitre.
[16] Šedivý, O., Vallo, D. (2012). Geometria V: kužeľovečky a kvadratické plochy. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2012. 85 s. Prírodovedec č. 526. ISBN 978-80-558-0197-1.
[17] ŠPÚ. (2014). Štátny vzdelávací program pre primárne vzdelávanie – 1. stupeň základnej školy. Bratislava: Štátny pedagogický ústav.
[18] ŠPÚ. (2011). Štátny vzdelávací program pre gymnáziá (úplné stredné všeobecné vzdelávanie). ISCED 3A. Bratislava: Štátny pedagogický ústav.
[19] ŠPÚ. (2015). Štátny vzdelávací program pre nižšie sekundárne vzdelávanie – 2. stupeň základnej školy. Bratislava: Štátny pedagogický ústav.
[20] Vallo, D., Ďuriš, V., Záhorská, J. (2014). Specific method how to solve selected stereometry tasks in educational process. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 116, s. 2957 – 2961.
[21] Vallo, D., Rumanová, L., Ďuriš, V. (2015). Spatial Imagination Development through Planar Section of Cube Buildings in Educational Process. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 191, s. 2146 – 2151.
[22] Vallo, D., Rumanová, L., Ďuriš, V., Rybanský, L. (2020). Examination of Spatial Ability with Emphasis on Solving Cube Tasks. TEM Journal, 9(1), s. 361 – 366.

| | |
|---|---|
| **Názov:** | **Geometria pre učiteľov – rozširujúce štúdium** |
| **Autor:** | Lucia Rumanová |
| **Vydavateľ:** | Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre |
| **Edícia:** | Prírodovedec č. 813 |
| **Rok vydania:** | 2023 |
| **Miesto vydania:** | Nitra |
| **Počet strán:** | 135 |

**ISBN 978-80-558-2035-4**

9 788055 820354