Úvod do didaktiky matematiky

pre rozširujúce štúdium

Gabriela Pavlovičová

Fakulta prírodných
vied a informatiky

2023

Úvod do didaktiky matematiky pre rozširujúce štúdium

Edícia Prírodovedec č. 823

Autori:

doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.

Recenzenti:

doc. PaedDr. PhDr. Valéria Švecová, PhD.
PaedDr. Janka Drábeková, PhD.

Publikácie je podporená z projektu 001UKF-2-1/2022 Zvyšovanie kvality prípravy budúcich učiteľov matematiky, fyziky, chémie, informatiky, anglického jazyka, slovenského jazyka a techniky formou doplňujúceho pedagogického štúdia a rozširujúceho štúdia na UKF v Nitre.

ISBN 978-80-558-2057-6

OBSAH

Predslov

„Didaktika jest umění jak dobře učiti. Učiti značí působiti, aby tomu, kdo něco zná, se naučil také někdo jiný a znal to“ J. A. Komenský

Matematika je vysoko abstraktný predmet vo vyučovaní na všetkých stupňoch vzdelávania a všetkých typoch škôl. Mnohé matematické pojmy vznikli na základe abstrakcií z reálnych situácií a predstavy o nich sa budujú najskôr na základe intuície, čím vzniká i problém s motiváciou pri ich zavádzaní vo vyučovaní matematiky. Ak sa chceme vyhnúť vzniku formálnych poznatkov, ktoré nie sú pevne začlenené do kognitívnej štruktúry žiaka, čo vedie k ich rýchlemu zabúdaniu, musíme sa snažiť využiť také metódy a formy vyučovania, ktoré sú primerané veku a kognitívnej úrovni žiaka.

Matematika ako vedná disciplína obsahuje obrovské množstvo poznatkov a len malá časť tvorí obsah učiva matematiky ako vyučovacieho predmetu. Pre vyučovanie matematiky je potrebná didaktická transformácia teoretického matematického základu do učiva matematiky tak, aby učivo bolo primerané žiakom príslušného veku a bolo podané jazykom im zrozumiteľným a s využitím matematického aparátu, ktorý majú k dispozícii, a zároveň bolo matematicky správne. V rámci prípravy na učiteľské povolanie je preto potrebné nadobudnutie mnohých všeobecných i špecifických vedomostí a zručností z oblasti didaktiky matematiky.

Predložená publikácia obsahuje vybrané časti z didaktiky matematiky, ktoré sú vstupnou bránou k jej ďalšiemu štúdiu. Zameriava sa na vybrané teórie učenia, proces štrukturalizácie matematických poznatkov, na kognitívne procesy pri rozvoji matematických predstáv, na poznávací proces všeobecne i konkrétne zameraný na číselné a geometrické predstavy a pojmy. Ďalej obsahuje teoretické základy vybraných metód vyučovania, ako je problémové, projektové a objavné vyučovanie.

Publikácia je prioritne určená pre vysokoškolské štúdium učiteľstva matematiky, no môže osloviť každého čitateľa zaujímajúceho sa o matematiku a jej vzdelávanie.

Autorka

1 Vybrané teórie učenia

Rôzne teórie učenia sa matematike nám môžu pomôcť pochopiť proces učenia vysvetlením javov, ktoré môžeme pozorovať u študentov, keď sa snažia konštruovať svoje chápanie matematických pojmov. Ako uvádzajú Dubinsky, McDonald (2001) modely a teórie v matematickom vzdelávaní môžu :

- podporiť predikcie,
- mať vysvetľovaciu schopnosť,
- byť použiteľné na širokú škálu javov,
- pomôcť človeku usporiadať myslenie o zložitých, vzájomne súvisiacich javoch,
- slúžiť ako nástroj na analýzu údajov ,
- poskytnúť jazyk na komunikáciu ideí o učení, ktoré presahujú povrchné popisy.

Štrukturalizmus

Štrukturalizmus je jedným z významných myšlienkových smerov 20. storočia, ktorý chápe myslenie ako štruktúru. Ústredným pojmom štrukturalizmu je pojem štruktúry (lat. structura), čo označuje budovu alebo stavbu. Definícia štruktúry sa opiera o hľadisko celku, ktoré je tvorené kombináciou prvkov, tie však samy nič neoznačujú, sú len rečou znakov tvoriacich „mlčanlivý" diskurz. Mukařovský (1996) v tejto súvislosti hovorí o estetickej funkcii, ktorá sa stáva priehľadnou, nestavia sa k iným funkciám nepriateľsky, ale kooperuje s nimi (Matejovič, 2012).

Podľa tejto teórie jednotlivé poznatky dostávajú zmysel až po ich prepojení so širším celkom a zapojením do štruktúry. Ide o široký vedecký smer, ktorý kladie do popredia záujem celkovej štruktúry – zložitého usporiadania, kde každý prvok nadobúda význam až po prepojení s ostatnými. Vplyv štrukturalizmu výrazne ovplyvnil predovšetkým lingvistiku a literárne vedy, no je pozorovaný aj vo francúzskej škole didaktiky matematiky, ktorá je súčasne ovplyvnená antropológiou. Pod jej vplyvom vznikla teória didaktických situácií, ktorej zakladateľom je Brousseau (Jančařík, 2013).

Kognitivizmus

Kognitivizmus je smer, ktorý v pedagogike a psychológii zastáva názor, že ľudia vytvárajú svoje znalosti a porozumenie realite prostredníctvom postupného rozvoja kognitívnych schopností. Medzi tieto schopnosti zaraďujeme napríklad schopnosť zapamätať si, analyzovať, reflektovať, chápať či hodnotiť. Môžeme povedať, že kognitivistické teórie učenia sa snažia popísať procesy a operácie, ku ktorým dochádza v mozgu človeka v priebehu učenia sa. Objav neurónov a synapsií slúžiacich na prenášanie vzruchov medzi neurónmi, prípadne medzi zmyslovými bunkami a neurónmi, zmenil prístup k mysleniu. Cieľom kognitivizmu je charakterizovať mozog v rovine ako funguje pri spracovávaní informácií. Dôležitým postulátom kognitivizmu je, že mentálny proces je chápaný ako manipulácia s mentálnymi reprezentáciami, ktoré predstavujú schopnosť znova prezentovať objekty reálneho sveta v mysli jedinca. Vznik a podoba týchto mentálnych reprezentácií je pre pedagogiku a didaktiku veľmi dôležitá. Významnú úlohu tu pritom zohráva tzv. AHA zážitok, ktorý je emocionálnou súčasťou vzniku nového poznatku a jeho začlenenia do existujúcej kognitívnej štruktúry jedinca v rámci učenia sa vhľadom. Dôležitou súčasťou kognitivistických teórií je sledovanie vývinu jedinca v čase, predovšetkým poznanie, že kognitívny vývin neprebieha spojito, a preto môžeme rozlišovať jeho jednotlivé obdobia alebo fázy. Autorom jednej z najznámejších teórií kognitívneho vývinu je Piaget, pričom hlavný prínos spočíval v dvoch základných tézach:

- Dôležitú úlohu v rozvoji kognitívnych schopností hrá interakcia jedinca s prostredím. Piaget tak opustil do tej doby prevládajúci názor, že hlavnú úlohu vo vývine jedinca majú dedičné vplyvy.
- Deti myslia kvalitatívne inak ako dospelí a inteligencia sa vyvíja postupne v rámci niekoľkých jasne vymedzených období (Jančařík, 2013).

Konštruktivizmus

Súbežne s kognitivistickou teóriou, alebo dokonca vrámci nej, vzniká ďalšia významná teória učenia – konštruktivizmus, ktorý sa zameriava na štúdium mentálnych reprezentácií a ich vzniku v ľudskej mysli. Konštruktivizmus kladie dôraz na prostredie a sociálne štruktúry, do ktorých je jedinec zapojený, a ktoré významným spôsobom ovplyvňujú procesy myslenia a učenia sa. Do procesu učenia sa vstupujú ako dôležité faktory **prekoncepty**, ktoré si žiak do vzdelávania prináša a sú samotným nástrojom vzdelávania, sú neustále prebudovávané a nový poznatok musí byť integrovaný do existujúcej štruktúry, ktorú má žiak k dispozícii. Práve konštruktivistické prístupy k učeniu výrazným spôsobom ovplyvnili vyučovanie matematiky a prírodných vied (Jančařík, 2013).

Konštruktivizmus môžeme chápať aj ako teóriu, ktorá nie je jasne vymedzená, skladá sa z rôznych prúdov a neustále sa vyvíja. Psychológia hovorí o kognitívnom konštruktivizme, ktorého základy môžeme vidieť aj v prácach Piageta (1985) a Dewey (1932). Poznanie sa konštruuje tak, že si poznávajúci jedinec spojuje fragmenty informácií z vonkajšieho prostredia do zmysluplných štruktúr a robí s nimi mentálne operácie, ktoré zodpovedajú jeho kognitívnej úrovni (Průcha et al., 2003). Práca Vygotského (1970) je základom tzv. sociálneho konštruktivizmu, ktorý zdôrazňuje nezastupiteľnú úlohu sociálnej interakcie a kultúry v konštrukcii poznatkov (Hejný a kol., 2004).

Hejný a Kuřina (2001) pretvárajú všeobecný konštruktivistický prístup k vyučovaniu na tzv. **didaktický konštruktivizmus**, ktorý má na zreteli špecifiká vyučovania matematiky a formulujú desať zásad:

1. *Aktivita* – matematiku chápeme ako špecifickú ľudskú aktivitu, teda nie len ako jej výsledok, ktorý sa obvykle formuluje do súboru definícií, viet a dôkazov.
2. *Riešenie úloh* – podstatnou zložkou matematickej aktivity je hľadanie súvislostí, riešenie úloh a problémov, tvorba pojmov, zovšeobecňovanie tvrdení a ich dokazovanie. Tento proces môže prebiehať v samotnej matematike alebo v ľubovoľnej oblasti ľudského poznania. Tvorba matematických modelov reality je potom ich súčasťou.
3. *Konštrukcia poznatkov* – poznatky, a to nielen poznatky matematické, sú neprenosné. Prenosné (z kníh, časopisov, prednášok, médií) sú iba informácie. Poznatky vznikajú v mysli poznávajúceho človeka, sú to individuálne konštrukty.
4. *Skúsenosti* – vytváranie poznatkov (napr. v oblasti pojmov, postupov, predstáv, tvrdení, dôvodenia...) sa opiera o informácie, je však podmienené skúsenosťami poznávajúceho. Skúsenosť si žiak prináša čiastočne z kontaktu s realitou svojho života, mal by mať však aj dostatok skúseností v škole (experimentovanie, bádanie, riešenie úloh, ...).
5. *Podnetné prostredie* – základom matematického vzdelávania konštruktivistického typu je vytváranie prostredia podnecujúceho tvorivosť. Nutným predpokladom toho je tvorivý učiteľ a dostatok vhodných podnetov (otázky, úlohy, problémy a pod.) na jednej strane a sociálna klíma v triede priaznivá pre tvorivosť na druhej strane.
6. *Interakcia* – i keď je konštrukcia poznatkov individuálny proces, k jej rozvoju prispieva sociálna interakcia v triede (diskusia, porovnávanie výsledkov, tvorba príkladov a protipríkladov, pokusy o formulovanie hypotéz a tvrdení, argumentácia, hľadanie dôkazov, ...).
7. *Reprezentácia a štruktúrovanie* – pre konštruktivistický prístup k vyučovaniu je charakteristické tvorenie rôznych druhov reprezentácií a štrukturálne budovanie matematického sveta. Čiastočné skúsenosti a poznatky sú rôzne orientované, triedené, hierarchizované, vznikajú všeobecnejšie a abstraktnejšie pojmy.
8. *Komunikácia* – pre konštruktivistické vyučovanie má značný význam komunikácia v triede a používanie rôznych jazykov matematiky. Jedným z nich je neverbálne vyjadrovanie, iným matematická symbolika.
9. *Vzdelávací proces* – vzdelávací proces v matematike je potrebné hodnotiť minimálne z troch hľadísk. Prvým je porozumenie matematike, druhým je zvládnutie matematického remesla, tretím sú aplikácie matematiky. Pre porozumenie matematike má zásadný význam vytváranie predstáv, pojmov, postupov, uvedomovanie si súvislostí. Rozvíjanie matematického remesla

vyžaduje tréning a prípadne i pamäťové zvládnutie určitých pravidiel, algoritmov, definícií. Aplikácie matematiky nemusia byť len vyvrcholením vzdelávacieho procesu, môžu hrať aj úlohu motivačnú. Matematiku sa učíme jej používaním.

10. *Formálne poznanie* – vyučovanie, ktoré má charakter predávania informácií (transmisívne) alebo vyučovanie, ktoré dáva iba návody, ako postupovať (inštruktívne) vedie predovšetkým k ukladaniu informácií do pamäte. To umožňuje v lepšom prípade ich reprodukciu, obvykle však dochádza k ich rýchlemu zabúdaniu a málokedy k ich netriviálnemu použitiu. Takéto poznanie je pseudopoznaním, je poznaním formálnym (Molnár a kol., 2008).

Učenie sa vhľadom

Prvýkrát bola táto teória popísaná predstaviteľom tvarovej psychológie (Gestalt psychology) Wolfgangom Kohlerom (1881-1967), pri jeho experimentoch so šimpanzom. Podľa tejto teórie riešenie problému a proces poznávania (učenie), sa uskutočňuje tak, že učiaci sa zahrňuje súčasne do svojho poľa vnímania všetky časti, prvky danej problémovej situácie, chápe ich ako funkciu v novej štruktúre (tvare), v nových vzťahoch. Uskutočňuje sa tu proces premeny štruktúry, dochádza k presunu v dominancii a subdominancii elementov v podobe tzv. precentrovania. Pri riešení problému dochádza väčšinou k doplňovaniu chýbajúcich elementov alebo vzťahov, čo vedie k vzniku nového tvaru, novej štruktúry. Kern et al. (1999) uvádza nasledujúci model učenia sa vhľadom, ktorý má štyri fázy:

1. Fáza uvedomenia si problému, v ktorej dochádza k zisteniu, že doterajšie spôsoby riešenia situácie sú nepostačujúce alebo nefunkčné. Toto zistenie spôsobuje nepokoj, že nemôžeme postupovať obvyklým spôsobom.
2. Fáza hľadania, v rámci ktorej na základe zistenia v predošlej fáze, je potrebné nechať situáciu dozrieť a skúšať nové postupy. Dochádza k mobilizácii nevedomých kreatívnych schopností, ktoré sú za bežných okolností potlačované sústredeným premýšľaním.
3. Fáza prelomu, v ktorej dochádza k náhlemu „prebudeniu“, vyjasneniu situácie, keď dokážeme vidieť problém v iných, nových súvislostiach a vzťahoch.
4. Fáza zisťovania výsledkov, keď dochádza k upevneniu, zakotveniu a rozšíreniu poznatku, ku ktorému došlo vhľadom do situácie.

Z pohľadu didaktiky matematiky je dôležité, že túto metódu je možné trénovať a rozvíjať. Žiaci tak môžu byť povzbudzovaní k tomu, aby nemali zábrany riešiť pre nich nové, zatiaľ neznáme úlohy a situácie experimentovaním (Jančařík, 2013).

2 Proces štrukturalizácie matematických poznatkov

Hejný (2004) popisuje dva spôsoby nazerania na štruktúru matematiky: **kumulatívny** a **genetický**. Kumulatívny model nadobúdania poznatkov predpokladá, že sa jednotlivé poznatky ukladajú do nášho vedomia ako izolované fakty, ktoré sa neskôr, keď ich už je dostatok, spoja do nového celku predstavujúceho vyšší stupeň poznania. Po určitom čase sa niekoľko týchto celkov spojí do ešte väčšieho celku atď. Tento model zodpovedá transmisívne orientovanému vyučovaniu.

Genetický spôsob nárastu kognitívnej štruktúry predpokladá, že jednotlivé poznatky sa tvoria postupne a v priebehu svojho formovania sa navzájom prepájajú väzbami funkčnosti, časovej následnosti, logickej závislosti, dôležitosti, a tak vytvárajú štruktúru. Tá sa neustále variuje, dotvára a upravuje. Neúspešné cesty za poznaním sú rovnako dôležité ako tie úspešné, pretože bez poznania, ktoré prináša analýza chýb, nemôže dôjsť k poznaniu pravdy. Veľmi dôležité sú situácie, keď v dôsledku zásadne nového pohľadu na určitú oblasť poznatkov dochádza k **reštrukturalizácii**.

Žiaci nadobúdajú vedomosti rôznymi spôsobmi. V procese formovania matematických poznatkov ide najmä o **procedurálne** alebo **konceptuálne** nadobúdanie vedomostí (Dubinsky, 1991; Gray, Tall, 1994; Sfard, 1991). Matematické vedomosti sú definované ako tendencia jedinca v danom spoločenskom kontexte reagovať a vnímať problémové situácie a vo svojej mysli konštruovať, rekonštruovať a organizovať matematické procesy a objekty, pomocou ktorých možno danú situáciu vyriešiť (Cottrill et.al, 1996, in Pantziara, Phillipou, 2012).

Procedurálne porozumenie je zamerané na procesy – vyžaduje znalosť algoritmov, techník a metód, ktorými sa dopracujeme k výsledku. Procedurálne porozumenie preferujú žiaci, ktorí preferujú memorovanie matematiky pred jej skutočným porozumením (Shirvani, 2016). Hiebert, Lefevre (1986, in Vondrová, 2019) rozlišujú dva typy procedurálnych vedomostí. Jedným je oboznámenie sa s jednotlivými symbolmi systému a syntaktickými konvenciami, ktorými vznikajú prijateľné konfigurácie symbolov. Ďalším typom procedurálnych vedomostí sú pravidlá alebo postupy pre riešenie matematických úloh. Mnoho postupov, ktoré žiaci ovládajú, pozostáva zrejme z reťazenia návodov ako manipulovať so symbolmi.

Konceptuálne porozumenie vyjadruje vzájomné vzťahy medzi základnými prvkami vnútri väčšej štruktúry, ktoré im umožňujú fungovať spoločne. Hiebert, Lefevre (1986) charakterizujú konceptuálne vedomosti ako vedomosti bohaté na vzťahy, ktoré si môžeme predstaviť ako prepojenú pavučinu, sieť, v ktorej sú vzťahy rovnako dôležité ako oddelené informácie. Vzťahy zasahujú do jednotlivých faktov a tvrdení, takže sú všetky informácie v jednej sieti. Sfard (1991) opisuje konceptuálne vedomosti ako štrukturálne predstavy, ktoré zaobchádzajú s matematickými pojmami ako s abstraktnými objektmi, t. j. ako so statickou štruktúrou. Shirvani (2016) uvádza, že konceptuálne porozumenie napomáha používať nadobudnuté vedomosti aj v neštandardných situáciách. Podľa Sfard (1991) je ľubovoľný matematický pojem zvyčajne definovaný konceptuálne aj procedurálne (napr. pri definovaní racionálnych čísel procedurálne, hovoríme o racionálnom čísle ako o výsledku delenia dvoch celých čísel; pri konceptuálnej definícii pojmu racionálneho čísla máme na mysli dvojicu celých čísel, ktorá je členom špeciálne definovanej množiny dvojíc).

Tieto dva rozdielne typy vedomostí ovplyvňujú matematické výkony žiakov. Konceptuálne definovanie matematických pojmov sa zdá byť abstraktnejšie. Na základe toho ho môžeme považovať za pokročilejšie štádium v procese rozvíjania pojmu. Inými slovami môžeme tvrdiť, že v poznávacom procese procedurálne predstavy budú predchádzať konceptuálnym predstavám. Mnohí výskumníci zastávajú názor, že žiaci, ktorí preferujú konceptuálne poznatky, môžu mať výhodu nad tými, ktorí rozvíjajú iba procedurálne poznatky. Toto tvrdenie odôvodňujú tým, že žiaci, ktorí využívajú prevažne konceptuálne vedomosti, rozvíjajú sofistikované matematické myslenie, zatiaľ čo tí, ktorí sa spoliehajú na procedurálne vedomosti majú problémy so zvládaním komplikovaných konceptuálnych štruktúr (Pantziara, Phillipou, 2012).

Napriek tomu je procedurálne nadobúdanie vedomostí vo vyučovacom procese nepostrádateľné, no je uchovávané iba v „neštruktúrovaných, sekvenčných kognitívnych schémach", ktoré sa nedajú ľahko spracovať, a preto môžu viesť k nedostatočnému porozumeniu a neúplnému dokončeniu matematických úloh založených na bežných postupoch. Naopak, konceptuálne porozumenie zahŕňa „statické objekty ako reprezentácie", ktoré zhusťujú procedurálne informácie do celku a rozvíjajú kognitívne schémy do vhodnejších štruktúr (Sfard, 1991). Tieto zhustené abstraktné entity zahŕňajú matematické myšlienky procedurálne aj konceptuálne a poskytujú značné vedomosti žiakom, ktorých myslenie je na vyššej úrovni (Gray, Tall, 1994, in Pantziara, Phillipou, 2012).

Hallet et al. (2010, in Sfard, 1991) tvrdí, že žiaci môžu mať rôzne zmiešané konceptuálne aj procedurálne poznatky, teda existujú individuálne rozdiely v spôsobe kombinovania týchto dvoch prístupov. Avšak výskumy ukazujú, že najlepšie výsledky v matematike dosahujú žiaci, ktorí si osvoja aj konceptuálne aj procedurálne porozumenie matematickým pojmom.

2.1 Sfardovej teória reifikácie

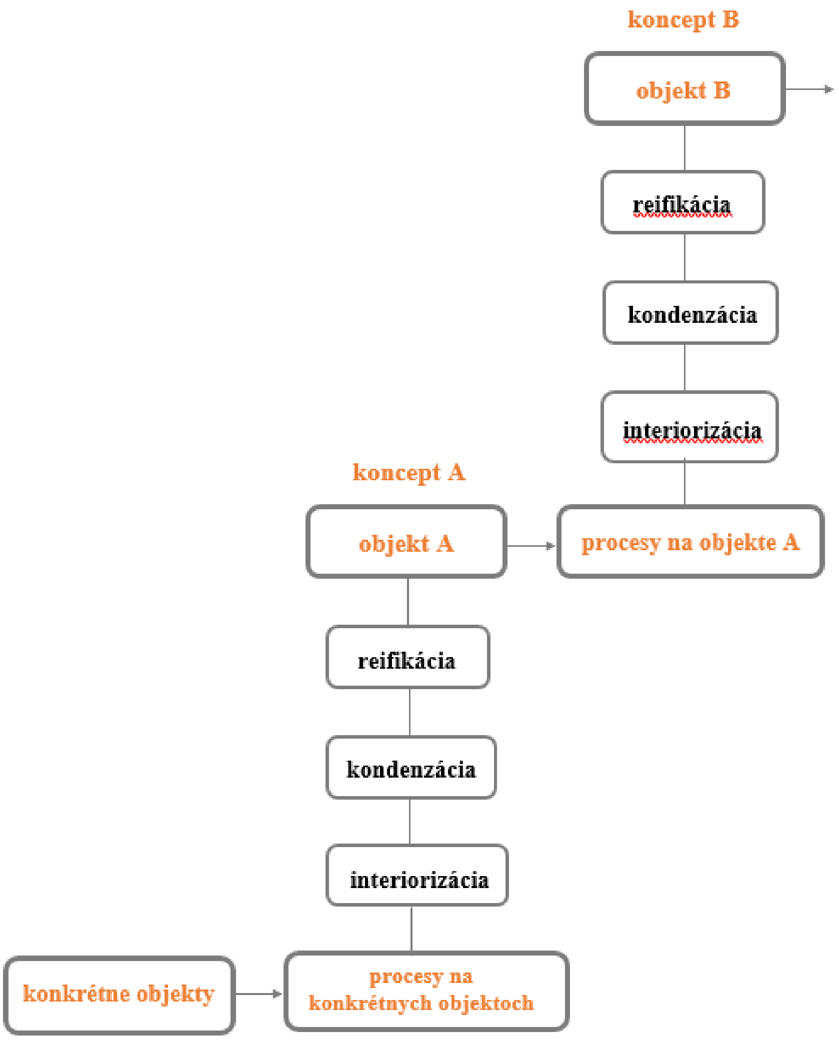
Anna Sfard (1991) navrhla model, v ktorom hovorí o troch významných krokoch v poznávacom procese, pričom zdôrazňuje doplnkový charakter vedomostí nadobudnutých konceptuálne a procedurálne. Sfardovej rámec sa od iných líši hlavne tým, že hoci uznáva ontologickú priepasť medzi procedurálnou a konceptuálnou tvorbou pojmov, tiež podčiarkuje doplnkový charakter oboch spôsobov učenia sa, podporovaním dvojakého charakteru matematických konštruktov. Navrhuje model, v ktorom hovorí o troch významných krokoch v poznávacom procese. Ide o tri štádiá štrukturalizácie poznatkov, ktoré sú pomenované na základe teoretickej analýzy vzťahov medzi procesmi a objektmi. Tieto tri štádiá na seba hierarchicky nadväzujú, a tak žiak nemôže dosiahnuť vedomosti na vyššej úrovni skôr, než zvládne nižšiu úroveň (Obr. 1).

Prvým štádiom je štádium **interiorizácie**. Tu sa žiak zoznámi s procesmi, ktoré časom budú viesť k novým poznatkom. Tieto procesy sú vykonávané na nižšej úrovni matematických predstáv o objektoch (slová, čísla, tvary). Postupne žiak nadobudne zručnosť pri využívaní týchto procesov, čo mu umožňuje predstaviť si daný proces aj bez aktuálneho pôsobenia.

Druhým štádiom je štádium **kondenzácie**. Je charakteristické „zhusťovaním" dlhých procesov pri operáciách do prehľadnejšieho celku. V tomto štádiu žiak začína rozmýšľať o daných procesoch ako o celku bez nutkania zachádzať do detailov. Žiak má vytvorené vlastné schémy a myšlienkové postupy, má určitú predstavu o pojme. Vďaka kondenzácii vieme ľahšie kombinovať procesy s inými procesmi, porovnávať a zovšeobecňovať. Pokrok v štádiu kondenzácie možno pozorovať prostredníctvom ľahšieho „prepínania" medzi rôznymi reprezentáciami pojmu. Toto štádium trvá tak dlho, kým nová entita nezostane úzko prepojená s konkrétnym procesom. Keď je žiak schopný prijať daný pojem ako plnohodnotný objekt, hovoríme, že poznatok bol reifikovaný.

Posledným štádiom je štádium **reifikácie**. Reifikácia je definovaná ako ontologický posun – schopnosť vidieť niečo známe v úplne inom svetle. Zatiaľ čo interiorizácia a kondenzácia sú postupné kvantitatívne zmeny, reifikácia znamená okamžitý skok: proces sa mení na objekt, statickú štruktúru. Novovzniknutý pojem sa oddelí od procesov, ktoré ho vyprodukovali a nadobúda samostatný význam. Stáva sa členom určitej kategórie. V určitej fáze sa táto kategória stáva konečnou fázou pre požiadavku existencie nového pojmu. Žiak je schopný skúmať všeobecné vlastnosti kategórií a rôzne vzťahy medzi jednotlivými reprezentantmi. Je schopný riešiť problémy, zahŕňajúce nájdenie všetkých možností spĺňajúcich podmienky v danej kategórii a vykonávať procesy, ktorých vstupom je novovzniknutý pojem.

Úroveň reifikácie je fáza, v ktorej začína interiorizácia poznatkov na vyššej úrovni. Čo znamená, že na novovzniknutom objekte môžeme budovať nové poznatky, teda ide o nekončiaci proces. Treba však podotknúť, že táto Sfardovej trojúrovňová schéma je vnímaná ako istá hierarchia, čo znamená, že žiak nemôže dosiahnuť vyššiu úroveň predtým, než zvládne nižšiu úroveň (Sfard, 1991).



Obr.1 Teória reifikácie podľa Sfard (Nabb, 2010)

2.2 Teória generických modelov

Teória generických modelov je konkrétnou aplikáciou konštruktivistických prístupov k vyučovaniu matematiky. Základ tejto teórie nachádzame v diele Víta Hejného (1904-1976) a jeho pokračovateľom je syn Milan Hejný. Prístup k vyučovaniu matematiky a učebnému procesu je založený na budovaní mentálnych schém (Jančařík, 2013).

Mechanizmus poznávacieho procesu je podľa Hejného rozložený do niekoľkých hladín a hladinových prechodov, zdvihov. Terminologicky došlo v priebehu rokov k zmene, keď bol termín „etapa“ nahradený termínom „hladina“ a pôvodný termín „univerzálny model“ nahradil termín „generický model“. Nasledujúci popis mechanizmu nadobúdania matematických poznatkov je z publikácie Hejný a kol. (2004):

1. **Hladina motivácie** predchádza vlastnému poznávaciemu procesu, je však veľmi dôležitá. Spravidla pramení z rozporu medzi „neviem“ a „chcel by som vedieť“.

2. **Hladina izolovaných** (separovaných) **modelov** je spojená s postupným nadobúdaním žiakových skúseností s konkrétnymi prípadmi (modelmi) budúceho poznatku. Tie však zatiaľ nie sú v mysli žiaka spojené a každý príklad je spracovaný samostatne. Čím viac takýchto rôznych konkrétnych modelov žiak spozná, tým pevnejšie bude jeho výsledné poznanie. Medzi týmito izolovanými modelmi hrajú dôležitú úlohu i modely prekvapivé, zdanlivé alebo nie-modely.
3. **Zovšeobecnenie** (prvý prechod medzi hladinami, alebo prvý abstrakčný zdvih) je posun v myslení žiaka, keď si uvedomí spoločné prvky a vlastnosti jednotlivých izolovaných modelov. Tie sa začnú vzájomne zoskupovať a organizovať, až dôjde k ich štrukturalizácii, k hlbšiemu a operatívnejšiemu vhľadu do poznania.
4. Na **hladine generických modelov** už žiak pracuje s generickým modelom, ktorý sa stáva akýmsi prototypom buď všetkých, alebo určitej skupiny izolovaných modelov. Pre poznávací proces, v rámci ktorého sa v určitej etape objaví viac generických modelov, je dôležité ich vzájomné usporiadanie.
5. **Abstrakčný zdvih** dáva zrod abstraktnému poznaniu. Súbor izolovaných a generických modelov je vo vedomí žiaka rekonštruovaný a nový vhľad má abstraktnejší charakter.
6. **Hladina abstraktného poznania** je zásadnou a pre žiakov náročnou zmenou. Abstraktné poznanie umožňuje robiť mentálne operácie s objektmi, je často sprevádzané zmenou jazyka, symbolickým zápisom, ktorý novú štruktúru reprezentuje.
7. **Kryštalizácia** (štrukturalizácia) znamená prepojenie nového poznatku na predchádzajúce vedomosti najskôr na úrovni modelov, potom na úrovni abstraktného poznania. Vo vývoji teórie generického modelu tvorila najskôr hladina kryštalizácie samostatnú etapu poznávacieho procesu, no v súčasnosti je chápaná ako dlhodobý proces, ktorý sprevádza celé poznanie. Kryštalizácia prebieha neustále a jej hlavným cieľom je vytvoriť dostatočne hustú sieť väzieb medzi jednotlivými poznatkami. Tento proces môže byť niekoľkoročný, keď sa žiaci stretávajú s novými poznatkami a prehodnocujú svoje doterajšie postoje a vedomosti.

Automatizácia nie je ďalšou fázou poznávacieho procesu, jedná sa však o nácvik už známeho, nadobudnutého poznatku. Postupnosť hladín do určitej miery zodpovedá časovému priebehu poznávacieho procesu, avšak väčšinou sa nová skúsenosť prenáša do niekoľkých hladín súčasne.

Neskôr, v publikáciách z roku 2013, v tomto mechanizme nájdeme uvádzané štyri hladiny ako samostatné etapy: hladina motivácie, hladina izolovaných modelov, hladina generických modelov, hladina abstraktného poznania a kryštalizácia je uvedená ako proces kryštalizácie, teda nie ako samostatná hladina. Poznatky získané na hladine izolovaných modelov by mali žiaka doviesť k zovšeobecneniu a prechodu na hladinu generických modelov, nastáva tu teda prvý hladinový prechod. Na hladine generických modelov dochádza k abstrakčnému zdvihu, a teda k druhému hladinovému prechodu, ktorým sa zrodí abstraktné poznanie. Schematicky je tento proces znázornený na obr. 2.

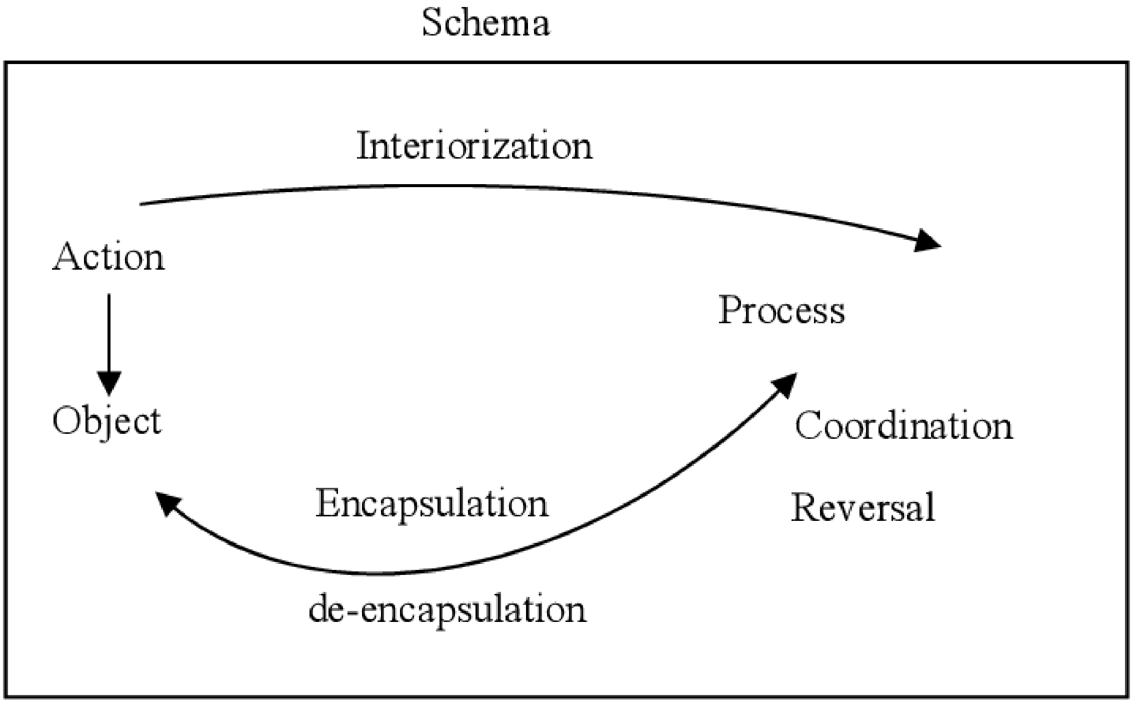
<table>
<tr><td rowspan="2">motivácia</td><td rowspan="2">→</td><td>izolované modely</td><td>1
→</td><td>generický model
procesuálny →konceptuálny</td><td>2
→</td><td>abstraktný poznatok</td></tr>
<tr><td colspan="5">kryštalizácia</td></tr>
</table>

Obr. 2 Proces poznávania (Hejný, 2013 in Jančařík, 2013, s.134)

2.3 Teória APOS

APOS (Action – Processes – Objects – Schemas).je teória, ktorej autorom je Dubinsky (1991). Začína hypotézou, že matematické vedomosti majú základ v tendencii jedinca vysporiadať sa s vnímanými matematickými problémovými situáciami konštrukciou mentálnych *akcií*, *procesov a objektov*, ich usporiadaním do *schém*, aby situáciám dali zmysel a vyriešili problémy.

Akcia je transformácia objektov vnímaných jedincom ako vonkajších a vyžadujúcich si buď explicitne alebo z pamäte podrobné inštrukcie na vykonanie potrebných matematických operácií. Je to súbor krokov, ktoré sú postupne vykonávané tak, že dochádza k transformácii fyzických alebo mentálnych objektov. Keď sa akcia opakuje a jedinec o nej uvažuje, môže vytvoriť vnútornú mentálnu štruktúru nazývanú **proces**, o ktorom si jedinec môže myslieť, že vykonáva rovnaký druh akcie, ale už nepotrebuje vonkajšie podnety. Jedinec môže uvažovať o vykonaní procesu bez toho, aby ho skutočne urobil, a preto môže uvažovať o jeho prepájaní, skladaní s inými procesmi. Keď si začne celý proces uvedomovať a pochopí, že transformácie môžu pôsobiť na proces, alebo dokonca takéto transformácie sám vytvorí, tak sa celý proces zhusťuje do kognitívneho objektu. **Objekt** je teda skonštruovaný z procesu, keď si jedinec uvedomí proces ako celok a uvedomí si, že naň môžu pôsobiť transformácie. Nakoniec, **schéma** pre určitý matematický koncept je súbor akcií, procesov, objektov a iných schém jedinca, ktoré sú prepojené niektorými všeobecnými princípmi, aby vytvorili štruktúru v mysli jedinca, ktorá sa môže prejaviť v problémovej situácii zahŕňajúcej tento koncept (Obr. 3). Táto štruktúra musí byť koherentná v tom zmysle, že poskytuje, explicitne alebo implicitne, prostriedky na určenie, ktoré javy spadajú do rozsahu schémy a ktoré nie. Štyri komponenty: akcia, proces, objekt a schéma sú tu uvedené v hierarchickom usporiadanom zozname. Toto je užitočný spôsob, ako hovoriť o týchto konštrukciách a v určitom zmysle musí byť každá koncepcia v zozname skonštruovaná predtým, ako je možný ďalší krok. Avšak, keď jedinec rozvíja svoje chápanie pojmu, konštrukcie sa v skutočnosti nevytvárajú takým lineárnym spôsobom. Pri koncepcii akcie sa napríklad pri pojme funkcia jedinec môže obmedziť na premýšľanie o vzorcoch obsahujúcich písmená, s ktorými možno manipulovať alebo ich nahradiť číslami a pomocou ktorých možno vykonávať výpočty. Myslíme si, že tomuto pojmu predchádza koncepcia procesu, v ktorej sa funkcia považuje za vstupno-výstupný stroj. V skutočnosti sa však stane, že jedinec začne tým, že sa obmedzí na určité špecifické druhy vzorcov, premýšľa o výpočtoch a začne premýšľať o procese, vráti sa k interpretácii akcie, možno so sofistikovanejšími vzorcami, ďalej rozvíja koncepciu procesu, a tak ďalej (Arnon et al., 2014).



Obr. 3 Mentálna štruktúra a mechanizmy v APOS teórii (Arnon et al., 2014)

3 Formalizmus v matematickom vzdelávaní

Tradičným problémom, a to nielen vo vyučovaní matematiky, je, že žiaci učivu, ktoré sa učia, často nerozumejú. Na otázku, prečo tomu tak je, odpovedajú Kuřina, Půlpán (2006): Naša škola je založená prevažne „transmisívne“: učiteľ predáva didakticky spracované učivo formou výkladu. Porozumenie učivu je však akt individuálny, ktorý naviac neprebieha automaticky, keď učiteľ vysvetľuje učivo. K porozumeniu môže dôjsť len vtedy, ak sa žiak začne o učivo zaujímať, ak zaujme aktívny postoj k učeniu, kladie si, aspoň vnútorne, vhodné otázky a hľadá na ne odpovede. Základom takto chápaného vyučovania je teda motivácia, ktorá môže aktivitu žiaka navodiť. Pasívny žiak bez záujmu ničomu netriviálnemu porozumieť nemôže. Informácie, ktoré od učiteľa dostáva, si v najlepšom prípade zapamätá, aby ich mohol uplatniť pri skúšaní, nie však v praxi. Riešenie úloh nie je bez porozumenia spravidla možné. Základnou otázkou pochopenia matematiky je porozumenie jej jazyku, a to ako jazyku vzorcov, tak i jazyku textu, úlohy alebo výkladu, ktorý nepoužíva matematické, ani logické symboly (Molnár, 2008).

Závažným problémom súčasnej didaktiky matematiky je porozumenie príčin choroby formalizmu, choroby, ktorá priam epidemicky zasahuje matematické znalosti našich žiakov všetkých vekových kategórií, od prvej triedy až po univerzitu. Charakteristickým znakom formálneho poznatku je jeho izolovanosť. Formálny poznatok je nedostatočne prepojený ako na životné skúsenosti žiaka, tak i na iné jeho príbuzné poznatky. Zdravý, formalizmom neinfikovaný poznatok, je organickou súčasťou celej poznatkovej štruktúry žiaka. Preto sa skúmanie fenoménu formalizmu zameriava aj na proces tvorby (matematických) štruktúr (Hejný, 2004). Formalizmus vníma ako chorobu kognitívnej štruktúry. V duchu teórie generických modelov formalizmus vzniká vtedy, keď sa poznanie dostáva do vedomia človeka priamo, nie cez izolované a generické modely. Slovo „priamo“ znamená, že „človek preberá hotové poznanie a ukladá si ho do pamäti“.

Janík (2013, in Vondrová, 2009) rozlišuje dva typické prejavy situácií, v ktorých žiaci zlyhávajú v nadobúdaní nových poznatkov a zaraďuje ich medzi tzv. didaktické formalizmy:

1. **Odcudzené poznanie**: učiteľ nahrádza poznávajúce aktivity žiakov vlastným výkladom a vlastným hodnotením činností. Komunikácia zo strany učiteľa je nadmerná na úkor komunikácie a činnosti žiaka. Príčinou zlyhania býva:
    - nepomer medzi zložitosťou úlohy (veľký objem a náročnosť učiva) a didakticky nedostatočne prepracovanými podmienkami ich riešenia (nedostatok času, slabé prispôsobenie možnostiam žiaka),
    - nepostačujúca pojmová analýza učiva – učiteľ didaktiky nerozumie dostatočne vzťahom medzi činnosťou žiakov a obsahom učiva, pojmami

pre prirodzenú skúsenosť žiaka a pojmami pre vyššiu úroveň analýzy a zovšeobecňovania.

2. **Utajené poznanie**: poznávacie procesy žiakov pri ich vlastnej aktivite nie sú prepojené na rozvíjanie znalosti základného pojmu, takže žiak nerozumie tomu, čo robí, neuvedomuje si dostatočne, čo sa učí a nemôže rozpoznať poznávací prínos vyučovania. Tento druh situácie je príznačný pre vyučovanie s použitím metód, ktoré by pri povrchnom pohľade mohli podporovať prepojenie medzi rozvojom kompetencií a osvojovaním si učiva, sú však použité len formálne, bez väzby metódy na obsah a ciele vyučovania.

V školskom vzdelávaní sa často stretávame s tým, že sa žiak učí slová, ale ich obsahu málo rozumie. Vtedy hovoríme o pamäťovom učení sa, o memorovaní, žiaci o bifľovaní, básničku sa musíme naučiť naspamäť. V matematike je taký spôsob učenia sa chybný, lebo neprináša vedomosť, ale iba akoby protézu znalosti. Takú „znalosť" v úvodzovkách nazveme formálna. Obvykle sa tak žiaci „učia" vzorce, návody, pravidlá, vety a definície. Lenže učiť sa (bez úvodzoviek) matematiku znamená budovať porozumenie pre myšlienky, pojmy, postupy, súvislosti, vzťahy, argumenty a pod., ba viac: tieto samostatne odhaľovať (Hejný a kol., 2004).

Formalizmus v značnej miere spomaľuje alebo zastaví rozvoj dôležitých intelektuálnych schopností, akými sú: analyzovanie problémovej situácie, argumentovanie, hierarchizovanie poznatkov, triedenie poznatkov.

Učiteľ, ktorý sa snaží o to, aby jeho žiaci nadobudli predovšetkým neformálne matematické vedomosti, hľadá spôsoby a prostriedky ako prípadný formálny poznatok identifikovať a ako ho reedukovať. Hejný a kol. (2004) uvádzajú desať možností diagnostiky formálneho poznatku, keď žiak nedokáže:

- objasniť paradox,
- rekonštruovať zabudnutý vzorec,
- objasniť zlyhanie štandardného postupu,
- obhájiť štandardný postup voči námietke,
- nájsť chybu v úvahe,
- aplikovať poznatok v praxi,
- rozhodnúť o platnosti hypotézy,
- nájsť objekt požadovaných vlastností,
- riešiť neštandardnú úlohu,
- objasniť niektoré pojmy, súvislosti, symboliku a podobne.

Hejný, Kuřina (2001) hovoria až o chorobe formalizmu, ktorá má tieto štádiá:

1. Žiak si uvedomuje neplnohodnotnosť niektorých svojich poznatkov, pociťuje túto skutočnosť ako nežiadúcu.

2. Formalizmom je zasiahnutá veľká časť kognitívnej štruktúry, nastáva kritické obdobie. Žiak sa rozhoduje, či sa bude aj naďalej usilovať o porozumenie matematike alebo sa zmieri s tým, že matematike nerozumie a všetko sa bude učiť naspamäť.
3. Žiak nadobudne presvedčenie, že on matematike nemôže nikdy porozumieť a memorovanie vníma ako jediný možný spôsob učenia sa matematike. Odmieta prípadnú pomoc učiteľa vysvetliť mu podstatu poznatku. Žiak žiada poučky, vzorce, ktoré sa naučí naspamäť a algoritmy, ktoré sa nacvičí.

Podľa Hejného, Kuřinu (2001) formalizmus je možné účinne odstrániť jedine systematickou školskou praxou. Nádejná cesta vedie cez zdôraznenie prvkov konštruktivistického prístupu učiteľov matematiky k vyučovaniu. To si vyžaduje znalosť poznávacieho procesu a schopnosť realizovať konštruktivistický prístup k vyučovaniu v praxi.

Reedukácia formalizmu z pohľadu poznávacieho procesu a začleňovania poznatkov do kognitívnej štruktúry žiaka spočíva v návrate do fázy prechodu od konkrétneho k abstraktnému poznatku. A keďže schopnosť prijímať a porozumieť novým informáciám a poznatkom zo strany žiaka je podmienená jeho vnútorným nastavením, veľký dôraz kladieme na motiváciu. Svoju úlohu tu hrá i vnímanie a práca s chybou. Pokiaľ je chyba vnímaná zo strany učiteľa ako nežiadúci jav, ovplyvní to celkovú pracovnú atmosféru v triede, čo sa prejaví i u samotného žiaka, ktorý sa bude chcieť chybám vyhýbať i za cenu nadobúdania formálnych vedomostí. Ak však učiteľ vníma chybu ako príležitosť na učenie a odhaľovanie možných miskoncepcií žiakov, otvára sa tu priestor pre prevenciu voči formalizmu.

Booth et al. (2017, in Vondrová 2019) začleňujú **princíp reflektovania chyby** medzi princípy vyučovania, o ktorých kognitívna veda už ukázala, že vedú k dobrým výsledkom. Výučbové intervencie zahŕňajú nielen reflektovanie vlastnej chyby, ale aj reflexiu chýb, ktoré sú žiakom zámerne predkladané, a tiež zdôrazňujú účinnosť porovnávania správnych a nesprávnych riešení. Efektívne využitie chyby vo vyučovaní je ovplyvnené viacerými faktormi. Štúdia Rushton (2018) ukázala, že analýza nesprávnych riešení umožnila žiakom dosiahnuť lepšie dlhodobejšie zapamätanie si učiva. Žiaci v tejto štúdii ocenili, že im analýza riešení pomohla odhaliť a odstrániť chyby v ich vlastnej práci. Otázkou, ako je ovplyvňovaná žiakova individuálna reakcia na chybu (následne aj jeho učenie sa) jeho motiváciou, výkonom, tým ako vníma atmosféru pri práci s chybou v triede, sa zaoberala štúdia autorov Steuer et al. (2013). Okrem významných psychologických zistení bola potvrdená významná variabilita v tom, ako žiaci využívajú chybu pre svoje učenie sa a bolo potvrdené, že reakcia žiakov na chybu bola najviac ovplyvnená atmosférou v triede pri práci s chybou (Vondrová, 2019).

4 Teória kognitívneho vývinu

Vzdelávanie a psychológia kognitívneho vývinu sa spájajú v množstve kľúčových predpokladov. Psychológia kognitívneho vývinu definuje kognitívne kompetencie človeka v postupných vývinových štádiách. Teda špecifikuje, ktoré aspekty sveta môžu byť pochopené v rôznom veku, ktoré druhy pojmov môžu byť konštruované a aké typy problémov môžu byť vyriešené v jednotlivých štádiách kognitívneho vývinu. Ďalším aspektom je, že psychológia kognitívneho vývinu zahŕňa porozumenie kognitívnym zmenám a poznanie faktorov a procesov, ktoré umožňujú rozvoj kognitívnych kompetencií. Vzdelávanie taktiež ovplyvňuje kognitívne zmeny. Prenos informácií a budovanie poznatkov si vyžaduje efektívne vyučovacie metódy, ktoré musia umožňovať študentom prechod z nižšej do vyššej úrovne porozumenia alebo opustiť menej efektívne metódy kvôli efektívnejším. Preto poznanie mechanizmov zmeny úrovní vývinu môže byť základom pre tvorbu a výber vhodných vyučovacích metód adekvátne k vyučovaciemu predmetu ako aj k veku žiaka (Case, 1985). Skúmanie kognitívneho vývinu jedinca je neustálym objektom záujmu psychológov, ktorí sa snažia pochopiť zmeny v myslení človeka v priebehu životného cyklu. Je to proces, v ktorom sa budujú a menia mentálne schopnosti s narastajúcou fyziologickou zrelosťou a so získavaním skúseností (učením sa). Psychológia študujúci kognitívny vývin skúmajú rozdiely a podobnosti medzi ľuďmi rôzneho veku a snažia sa objaviť, prečo a ako ľudia premýšľajú a správajú sa v rôznych obdobiach svojho života. Vychádzajúc z kognitívneho vývinu jedinca môžeme analyzovať a skúmať aj vývin matematických predstáv už od útleho veku. Viacerí psychológovia vypracovali rôzne teórie kognitívneho vývinu (Robbie Case, Kurt W. Fisher, Jean Pascual Leon, Z. Freud, E. Erikson), no najviac prepracovanou je teória švajčiarskeho psychológa a epistemológa Jeana Piageta. Hneď na druhé miesto odborníci radia ruského teoretika kognitívneho vývinu Leva Vygotského a týmto dvom psychológom sa venujeme aj v tejto kapitole.

4.1 Piagetova teória kognitívneho vývinu

Piagetova teória kognitívneho vývinu tvorí druhý – psychologický pilier jeho teórie. Prvý pilier je filozofický, konkrétne je to epistemiológia – náuka zaoberajúca sa procesom poznania a jeho mechanizmami, vzťahom poznania a skutočnosti. Tretí pilier je pedagogický a tvoria ho jeho pedagogické názory. Práve jeho teória kognitívneho vývinu je všeobecne považovaná za najobsiahlejšiu a najvplyvnejšiu aj napriek mnohým kritikám. Piaget urobil revolúciu vo výskume inteligencie a tvorby pojmov u detí predovšetkým tvrdením, že k pochopeniu detskej inteligencie je potrebné študovať nie len správne odpovede na testované otázky, ale aj chyby, ktorých sa deti dopúšťajú. Dieťa uskutočňuje určité pokusy s vecami a s ľuďmi okolo seba i samo so sebou: skúša, „čo sa stane, keď..“. Vytára si svoje „pracovné teórie“ o tom ako svet asi funguje. Pri každej novej udalosti, pri stretnutí s novým objektom, dieťa najprv skúša použi doterajšiu „ teóriu „. Až vtedy keď jeho „teória“ nefunguje, vymení ju alebo vypracuje novú. V Piagetovej terminológii sa miesto výrazu „pracovná teória“ dieťaťa používa odborný termín **schéma**. Každú novú udalosť, nový objekt, sa dieťa najprv snaží začleniť do hotovej schémy. Tento proces označuje J. Piaget **asimilácia – zahrňovanie do schémy,** ktorá sa dovtedy osvedčila. Keď však nová udalosť alebo nový objekt nezapadajú do osvedčenej schémy, potom dieťa pôvodnú schému modifikuje, prispôsobuje novej situácii. J. Piaget nazval tento proces **akomodácia**. Myslenie detí a ich chápanie sveta vzniká tak na základe krehkej rovnováhy medzi oboma procesmi – asimiláciou a akomodáciou. J. Piaget používal metódu, ktorá bola do tej doby bežná predovšetkým v klinických lekárskych oboroch, predovšetkým v psychiatrii – **klinický rozhovor**. Vybral si situácie okolo predmetov, činností s nimi a pritom sa s deťmi rozprával. Svoje otázky a úlohy menil podľa meniacej sa situácie, podľa činností dieťaťa, jeho postojov a slovnej zásoby. Tak sa mu podarilo preskúmať spontánne i premyslene navodené chovanie a prežívanie detí rôzneho veku (Čáp, Mareš, 2001). Dospel k záveru, že vývoj dieťaťa prechádza určitými relatívne samostatnými štádiami, ktoré sa dosahujú cez **ekvilibráciu** (vyvažovanie), pri ktorej deti hľadajú rovnováhu medzi tým, s čím sa na jednej strane stretávajú vo svojom prostredí a tým, čo ich poznávacie štruktúry do tohto stretnutia prinesú a zároveň medzi samotnými kognitívnymi schopnosťami. Podľa Piageta sa u rôznych detí objavujú jednotlivé štádiá v približne rovnakom veku a každé ďalšie štádium vychádza z toho predchádzajúceho. Jednotlivé štádiá sa vyskytujú v pevnom poradí a sú nezvratné: vo chvíli keď dieťa vstúpi do nového štádia, premýšľa spôsobom charakteristickým pre toto štádium bez ohľadu na oblasť, z ktorej zadaná úloha je, na jej špecifiká a dokonca aj bez ohľadu na kontext, v ktorom je úloha zadaná. Už nikdy nepremýšľa spôsobom typickým pre predchádzajúce štádium kognitívneho vývinu (Case, 1985). S týmto názorom by iní teoretici, vrátane neopiagetovcov, nesúhlasili, keďže predpokladajú existenciu väčšej flexibility kognitívno-vývojového postupu v závislosti na úlohe a oblasti, z ktorej úloha pochádza. Piaget rozdelil kognitívny vývoj do štyroch hlavných štádií:

- senzomotorické štádium – od narodenia do 2 rokov,
- predoperačné štádium – od 2 rokov do približne 6-7 rokov,
- štádium konkrétnych operácií – približne od 7-8 rokov do 11-12 rokov ,
- štádium formálnych operácií – od 11-12 rokov.

1. Senzomotorické štádium

Obdobie, ktoré predchádza vzniku reči, ale predstavuje základ a začiatok vývinu myslenia môžeme nazvať senzomotorickým obdobím. Dieťa ešte nie je schopné sprítomniť si podnety za ich neprítomnosti, ale už na tejto úrovni si vypracúvava súbor poznávacích podštruktúr, ktoré sa stanú východiskom neskorších vnemových a intelektuálnych konštrukcií (ktoré vychádzajú výlučne z vnemov a pohybov). Senzomotorická úroveň má niekoľko štádií:

- Prvé štádium môžeme nazvať štádiom *reflexov*. Dieťa si postupne upevňuje reflexy funkčným správaním, tzv. reflexným cvičením.
- Druhé štádium je už štádium prvých *zvykov*. Základný zvyk pozostáva z celkovej senzomotorickej schémy, vnútri ktorej sa z pohľadu jedinca nerozlišujú prostriedky a ciele.
- Po štádiu reflexov a prvých zvykov predstavuje tretie štádium obdobie *prechodu*, a to až do chvíle (okolo 4 a 1/2 mesiaca) keď sa objavuje koordinácia medzi videním a uchopovaním. Tiež začína rozlišovať cieľ od prostriedku.
- Vo štvrtom štádiu pozorujeme dokonalejšiu činnosť *praktickej inteligencie*. Dieťa si najprv vyberá cieľ a to nezávisle na prostriedkoch, ktoré použije.
- Počas piateho štádia (ktoré začína okolo 11-12 mesiaca) sa pripája k predchádzajúcemu správaniu podstatná reakcia: hľadanie nových prostriedkov na základe diferenciácie známych schém.
- Šieste štádium ukončuje senzomotorickú úroveň a znamená prechod k ďalšiemu obdobiu. Toto štádium sa vyznačuje a tzv. "vhľadom"- náhlym porozumením.

Senzomotorická inteligencia umožňuje dieťaťu štruktúrovať svoj svet, aj keď tento zostáva obmedzený na úrovni praktickej činnosti. Vytvára si hlavné kategórie činnosti – schému trvalého predmetu, schému priestoru, času a príčinnosti. Svet dieťaťa je na začiatku charakterizovaný nevedomým egocentrizmom (dieťa si ešte nie je vedomé vlastného JA, ale jeho svet je plne sústredený na vlastné telo, pocity a činnosť). Až v priebehu prvých osemnástich mesiacov života dochádza k úplnej decentrácii, kým dieťa nezačne umiestňovať seba ako objekt medzi iné objekty.

2. Predopračné štádium

Na konci senzomotorického obdobia sa zjavuje nová funkcia – schopnosť označovať veci pomocou niečoho iného, čo slúži tejto predstave. Nazývame ju semiotická alebo symbolická funkcia a patrí sem: reč, symbolická hra alebo gesto a obrazná predstava. Počas druhého roku života dieťaťa sa začína objavovať správanie, ktorým si sprítomňuje neprítomné predmety (Piaget, Inhelderová, 2007).

Piaget toto štádium rozdeľuje na nasledujúce dve subštádia:

a) predpojmové štádium – V kognitívnom vývine dieťaťa medzi druhým a štvrtým rokom sa postupne viac presadzujú symbolické činnosti (Fontana, 2003). Na základe tohto *symbolického myslenia*- „symbolov“ si dieťa vie predstaviť danú činnosť bez toho aby ju aj v skutočnosti vykonávalo. Je to možné sledovať napríklad pri detskej hre, kde bábiky stvárňujú ľudí, autíčka zastupujú skutočné vozidlá a pod. Spoločne s vývinom reči si deti osvojujú to, čo Piaget nazval *„znaky“.* Môžu to byť rôzne zvuky, ktoré nemusia mať žiadny vzťah k predmetom, ale aj napriek tomu ich deti využívajú na zastúpenie danej veci. Iným druhom znakov môžu byť aj matematické zápisy. Piaget kladie dôraz na rozlíšenie znakov a symbolov. Dieťa používa symboly skôr ako znaky. Avšak využívanie symbolickej činnosti neznamená, že dieťa je schopné vytvárať pojmy. Napríklad dieťa nevie tvoriť správne *generické pojmy,* teda triediť objekty (napríklad: všetkým mužom hovorí „tata“) a nedokáže ani tvoriť *tranzitívne úsudky,* (napríklad: keďže sme išli autobusom za oteckom, tak každý autobus ide len za oteckom do mesta). Takéto usudzovanie je síce nesprávne, ale je dôkazom, že sa dieťa snaží porozumieť svetu.

b) intuitívne štádium – V tejto druhej fáze, medzi štvrtým a šiestym rokom, sa dieťa z predpojmového myslenia dostáva na úroveň *názorného myslenia*. Začína uvažovať v pojmoch, ktoré vznikli na základe vystihnutia podstatných znakov (Jakabčic, 2002). V daných pojmoch však nevie odlíšiť podstatné od nepodstatných znakov jednotlivých predmetov. Hlavné kognitívne štruktúry, ktoré dieťa uplatňuje, Piaget nazýva *egocentrizmus, centrácia, inverzibilita.*

Egocentrizmus je charakteristický neschopnosťou pozerať sa na svet inak ako zo subjektívneho hľadiska. Dieťa je preto neschopné byť vo svojom myslení kritické, logické aj realistické. Nie je to znakom sebectva, dieťa si len ešte neuvedomuje, že existuje aj iné hľadisko ako jeho vlastné.

Centrácia je sústredenie svojej pozornosti iba na jeden znak, akokoľvek sú ostatné dôležité. Dá sa to vysvetliť na príklade dvoch rovnako naplnených pohárov s vodou. Jeden z pohárov vymeníme za úzky, vysoký pohár. Tým sa hladina vody zdvihne a dieťa tvrdí, že v tomto pohári je viac vody. Ak tekutinu prelejeme do širokého pohára, dieťa opäť určí, že v tomto je menej vody, aj napriek tomu, že je v ňom rovnaké množstvo tekutiny.

Inverzibilita znamená neschopnosť postupovať spiatočne k svojmu začiatočnému bodu. Ak dieťa vykonáva istú činnosť v troch krokoch, je pre neho veľmi zložité vrátiť sa späť ku kroku dva alebo jedna. Tak isto ako dokáže spočítať dva plus tri s výsledkom päť, často nie je schopné odčítať od päť dva s výsledkom tri. (Fontana, 2003)

3. Štádium konkrétnych operácií

V tomto štádiu deti nadobudnú schopnosť mentálne manipulovať s vnútornými reprezentantmi, ktoré si vytvorili v predoperačnom štádiu. Všetky myšlienky a spomienky ako aj mentálne operácie s nimi sú však stále viazané na konkrétne predmety. Dieťa dokáže manipulovať s vnútornými obrazmi konkrétnych predmetov a látok, mentálne zachováva predstavu množstva a dedukuje, že bez ohľadu na odlišný vzhľad (tvar) sú množstvá rovnaké. Známy je experiment so **zachovaním množstva** tekutiny v rôznych nádobách. Teda dieťa je v tomto štádiu schopné decentralizácie od jediného rozmeru – výšky tekutiny v nádobe – a vezme do úvahy aj ďalší rozmer – jej priemer. Navyše je myslenie na tejto úrovni *reverzibilné*, dieťa chápe, že množstvo tekutiny je rovnaké, pretože chápe, že je možné tekutinu preliať späť do pôvodnej nádoby. (Sternberg, 2002)

Podľa Piageta najzreteľnejším dôkazom o existencii predoperačného obdobia je fakt, že dieťaťu až do 7-8 rokov chýba pojem zachovania (príklad pokusu s kvapalinou, ktorú prelievali z vysokej úzkej nádoby do nízkej a širokej). Na tom sú pozoruhodné dve veci: zdá sa, že deti v tomto období uvažujú len o stavoch alebo rozmiestnení, nie ešte o transformáciách. Transformáciu o ktorej vedia, nechápu ako vratný prechod z jedného stavu do druhého. Až na stupni konkrétnych operácií (7-8 rokov) dieťa asimiluje transformáciu do vlastnej činnosti. Pochopí návratnosť inverzií (vodu možno preliať späť z A do B – bude jej stále rovnako) a kompenzáciu (vyšší a užší = nižší a širší). Teda, stavy sú už podriadené transformáciám, sú decentrované od vlastnej činnosti, a tak sa stávajú vratnými a vyjadrujú tak premeny s ich kompenzovanými variáciami, tak súčasne i invariantu, obsiahnutú návratnosti. Konkrétne operácie tvoria prechod medzi činnosťou a všeobecnejšími logickými štruktúrami, ktoré zahŕňajú kombinatoriku a "skupinovú" štruktúru, koordinujúcu obidve možné formy návratnosti. Teda od konkrétnych fyzických predmetov prechádzajú k slovne vyjadreným hypotézam (výrokové operácie). Tieto operácie sa postupne koordinujú v celostnejšie štruktúry, ktorých špecifickou vlastnosťou je tzv. "zoskupovanie" – vytváranie väzieb obsahujúcich zjednocovanie priamych operácií. Tieto sa budú neustále deduktívne zjednocovať a vytvárať tak uzatvorený a rozsiahly systém. *Usporiadanie* spočíva v usporadúvaní prvkov podľa veľkosti (klesajúcej alebo stúpajúcej). K vlastnému operačnému usporiadaniu dospeje dieťa až okolo 7 rokov, z neho sa neskôr vyvíjajú ďalej spojenia usporiadania (k rôzne veľkým postavám priradiť batohy zodpovedajúcej veľkosti) a usporiadanie podľa dvoch rozmerov (usporiadať listy podľa veľkosti a zároveň podľa farebného odtieňa). *Triedenie* je jedným zo základných druhov zoskupovania. Vo vývine triedenia môžeme pozorovať tieto tri etapy:

1. Najmladšie deti (3-5 rokov) vytvárajú “figurálne súbory” – predmety nielen triedia podľa ich podobnosti alebo rozdielnosti, ale vytvárajú z nich aj figurálne obrazce, ktoré im názorne vyjadrujú “rozsah” jednotlivej triedy.
2. Triedenie detí v druhej etape (5 a 1/2 – 6 rokov) sa zdá byť racionálnejšie. Pre túto etapu sú príznačné “nefigurálne súbory”. Jednotlivé množiny môžu byť rozčlenené do podmnožín, ktoré je síce dieťa schopné rozlišovať, ale ešte nie porovnávať.
3. V tretej etape sú už deti schopné zahrňovať súčasne dve triedy do nadradenej množiny. Toto je už charakteristické pre operačné triedenie a táto etapa sa objavuje okolo 8 rokov.

Dieťa veľmi dlho viaže číslo na priestorové usporiadanie (podobne ako pri figurálnom usporadúvaní súborov). Až keď je dieťa schopné zachovať si číselné množiny nezávisle na ich priestorovom usporiadaní, môžeme hovoriť o operačnom čísle. Keď v predoperačnom období spravíme z rovnakého počtu prvkov dva rady a jeden potom následne roztiahneme, dieťa tvrdí, že dlhší rad obsahuje viacej prvkov. Číslo je syntézou usporiadania a prieniku. Vývoj predoperačných názorných predstáv a neskôr priestorových operácií u dieťaťa vychádza z topológie, ktorá tvorí všeobecný základ, z ktorého sa dá súbežne vyvodzovať projektívny priestor a všeobecná metrika, z ktorej vychádza euklidovská geometria. Pojem **času** vo svojej konečnej forme spočíva na troch druhoch operácií:

- usporiadanie udalostí, čo je základom usporiadanej časovej následnosti,

- spájanie intervalov medzi bodovými udalosťami, čo je zdroj trvania,

- meranie času, ktoré je izomorfné s meraním priestoru.

Dieťa na predoperačnej úrovni ešte nechápe meranie času hodinami, lebo si predstavuje, že ručička hodín sa pohybuje rozdielnou rýchlosťou, podľa toho, čo meria.

Toto obdobie prechodu ku konkrétnym operáciám je charakteristické najmä svojou funkčnou jednotou, ktorá spája poznávacie, hrové, citové, sociálne a mravné reakcie v jeden celok a ďalej je to postupná decentrácia vo všetkých týchto oblastiach. Tento proces na úrovni myslenia opakuje to, čo sa už odohralo na senzomotorickej úrovni.(Piaget, Inhelderová, 2007)

4. Štádium formálnych operácií

Toto štádium zahŕňa aj mentálne operácie s abstraktnými pojmami a symbolmi, ktoré nemusia mať fyzickú, konkrétnu podobu. Deti začínajú chápať niektoré veci, ktoré si priamo nevyskúšali, začínajú byť schopné brať do úvahy aj hľadisko iných ľudí, ak môžu s týmto alternatívnym hľadiskom manipulovať. Napríklad dokážu odhadnúť, ako by danú situáciu (napr. popis modelu) videlo iné dieťa, ak by sedelo na opačnej strene stola, na ktorom je model postavený. Okrem toho sa jedinci v tomto štádiu cielene snažia hádať a vytvoriť systematickú mentálnu reprezentáciu situácií, do ktorých sa dostanú. (Sternberg, 2001)

Piaget charakterizuje toto obdobie ako obdobie hypoteticko – deduktívneho alebo formálneho myslenia. Tým, že sa myslenie oslobodilo od predmetov, oslobodzuje sa forma od obsahu a subjekt je schopný konštruovať z rôznych prvkov ľubovoľné vzťahy a triedy. Toto zovšeobecnenie vyúsťuje v tzv. kombinatoriku. Dovoľuje kombinovať rôzne aspekty rôznych predmetov a výrokov a rozširuje a zvyšuje účinnosť myslenia. Na úrovni konkrétnych operácií postupuje subjekt "krok za krokom", takže kombinácie zostávajú neúplné. Až na úrovni výrokových operácií dokáže svoju metódu zovšeobecniť a odhaľuje sústavu, ktorá mu umožní prihliadať na všetky možnosti. Len čo sa dieťa stáva schopné kombinovať predmety vyčerpávajúcou metódou, dokáže kombinovať aj myšlienky alebo hypotézy, tzn. tvrdiť ich alebo popierať a používať preň neznáme výrokové operácie, ako implikácie (ak..., tak), disjunkcie (buď ten, alebo ten, alebo oboje), alternatívy (buď..., alebo) alebo vylučujúce alternatívy (buď..., alebo..., alebo ani jeden, ani druhý), vzájomná implikácia atď. V tomto novom období, keď sa oslobodili formálne mechanizmy myslenia od svojho obsahu, sa nevytvára len kombinatorika, ale aj základná štruktúra, ktorá v sebe zahŕňa nielen skoršie štruktúry zoskupovania, ale aj začiatok nových štruktúr. Zoskupovanie konkrétnych operácií má dva druhy – dve základné formy návratnosti: inverzia a reciprocita. (Piaget, Inhelderová, 2007)

Prehľad jednotlivých štádií podľa Piagetovej teórie kognitívneho vývinu uvádza Čáp, Mareš (2001, s.393) v takejto prehľadnej tabuľke.

Vývinové štádium	Vek	Typické znaky
1. Senzomotorické	0-2 roky	Dôležitými procesmi sú : - motorická aktivita, - vnímanie, - experimentovanie. Dieťa začína odlišovať seba od okolitých objektov. Buduje sa pojem stálosti objektov, čo svedčí o mentálnej reprezentácii neprítomného objektu.

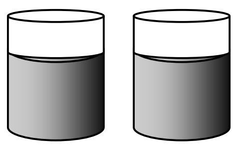
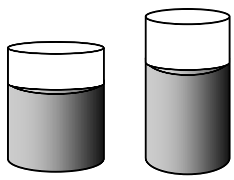
2. Predoperačné	2 až 7-8 rokov	Dôležitými procesmi sú: -reč, - tvorba predstáv, -jednoduché myslenie. Dieťa sa učí používať reč; mentálne reprezentácie objektov sa tvoria pomocou predstáv a slov. Myslenie dieťaťa je zatiaľ egocentrické (v kognitívnom, nie v mravnom zmysle slova): všetko vidí len zo svojho pohľadu, nedokáže sa pozrieť na problém z pozície druhého človeka. Dieťa ešte plne nechápe určité pravidlá činnosti, určité operácie, hlavne vratné a reverzibilné operácie. Dokáže triediť objekty, ale hlavne podľa jedného znaku. Viac chápe niektoré vzťahy a problémy, ale rieši ich v silnej závislosti na tom, čo práve vníma (názorné myslenie).
3. Štádium konkrétnych operácií	7-8 až 11-12 rokov	Dôležitými procesmi sú: - logické myslenie, - narábanie s abstraktnými pojmami, i keď zatiaľ len vo vzťahu ku konkrétnym objektom, ktoré môže priamo vnímať svojimi zmyslami. Dieťa je schopné pochopiť identitu, overuje si návratnosť mentálnych operácií. Chápe zachovanie počtu objektov (okolo 6 rokov), zachovanie hmotnosti objektov (okolo 9 rokov). Dokáže triediť objekty podľa niekoľkých znakov. Experimentuje s objektmi, nie však systematicky.
4. Štádium formálnych operácií	11-12 a viac rokov	Dôležitými procesmi sú abstraktné a formálne logické operácie. Dieťa sa už nemusí opierať o realitu vnímanú svojimi zmyslami, je schopné hypoteticko-deduktívneho úsudku typu „ak.., tak...!. Pri experimentovaní

		systematicky obmieňa premenné, hľadá pravidlá. Dokáže sa vyrovnať so situáciami, s ktorými sa doposiaľ nestretlo. Operácie sa spájajú do zložitejšej štruktúry a dieťa s nimi vie pracovať oboma smermi (priamo aj spätne).

Tab.1 Štádia kognitívneho vývinu podľa Piageta (zdroj: Čáp, Mareš, 2001, s.393)

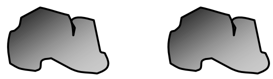
Jedným z dôležitých medzníkov v procese kognitívneho vývinu, predovšetkým pri určovaní prechodu medzi jednotlivými štádiami, je uvedomenie si *zachovania množstva* rôznych druhov. V štádiu konkrétnych operácií si dieťa začne uvedomovať reverzibilnosť operácií. Ako náhle si vnútorne uvedomí možnosť vrátiť proces a zvládne mentálne prevedenie tejto operácie, dokáže si logicky vyvodiť, že množstvo sa nezmenilo. Sternberg (2002, s.476) uvádza nasledujúci prehľad experimentov skúmajúcich uvedomenie si zachovania množstva u detí v predoperačnom štádiu a v štádiu konkrétnych predstáv.

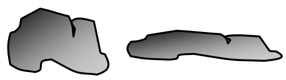
ZACHOVANIE OBJEMU

Druh		Tekutina	
Čo ukážeme dieťaťu		Dve rovnaké nádoby (rovnako široké a vysoké) a necháme dieťa presvedčiť sa, že obsahujú rovnaké množstvo vody.	
Čo urobí experimentátor		Preleje vodu z jednej nádoby do inej – užšej a vyššej nádoby a opýta sa, či obsahujú obe nádoby rovnaké množstvo vody alebo jedna z nich obsahuje viac.	
Odpoveď dieťaťa	*Predoperačné štádium*	Vyššia nádoba obsahuje viac vody.	
	Štádium konkrétnych operácií	Obe nádoby obsahujú rovnaké množstvo vody.	

ZACHOVANIE HMOTY

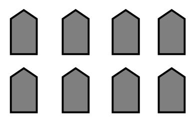
Druh		Hmota
Čo ukážeme dieťaťu		Dve rovnaké hrudy plastelíny a necháme dieťa presvedčiť sa, že sú rovnako veľké.
Čo urobí experimentátor		Vymodeluje z jednej hrudy plastelíny hada a opýta sa, či sú obidva predmety z rovnakého množstva plastelíny, alebo či jeden obsahuje viac plastelíny.
Odpoveď dieťaťa	*Predoperačné štádium*	Ten dlhší má viac plastelíny.
	Štádium konkrétnych operácií	Obidva obsahujú rovnaké množstvo plastelíny.

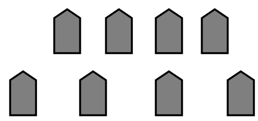




ZACHOVANIE POČTU

Druh		Počet
Čo ukážeme dieťaťu		Dva rady figúrok usporiadané štýlom „jedna k jednej“ a necháme dieťa presvedčiť sa, že je v každom rade rovnaký počet figúrok.
Čo urobí experimentátor		Jeden rad figúrok roztiahneme a opýta sa, či je v každom rade rovnaký počet figúrok alebo je v niektorom viac.
Odpoveď dieťaťa	*Predoperačné štádium*	V dlhšom rade je viac figúrok.
	Štádium konkrétnych operácií	Počet figúrok v obidvoch radoch je rovnaký.

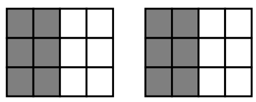
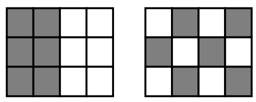


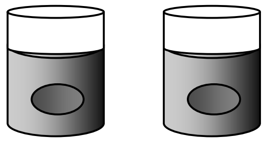
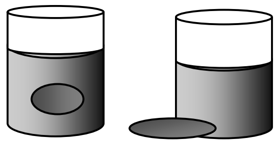


ZACHOVANIE DĹŽKY

Druh		Dĺžka	
Čo ukážeme dieťaťu		Dve rovnaké paličky uložené rovnako pod sebou a necháme dieťa presvedčiť, že sú rovnako dlhé.	
Čo urobí experimentátor		Posunie jednu paličku a opýta sa, či sú paličky stále rovnako dlhé.	
Odpoveď dieťaťa	*Predoperačné štádium*	Spodná palička je dlhšia.	
	Štádium konkrétnych operácií	Obe paličky sú rovnako dlhé.	

ZACHOVANIE PLOCHY

Druh		Plocha	
Čo ukážeme dieťaťu		Dve dosky a na každú z nich položíme rovnaký počet kociek tak, aby pokryli práve polovicu dosky a necháme dieťa presvedčiť sa, že kocky zaberajú rovnakú plochu.	
Čo urobí experimentátor		Rozptýli kocky na jednej z dosiek a opýta sa, či je na jednej z dosiek viac voľného miesta alebo ho je na oboch doskách rovnako.	
Odpoveď dieťaťa	*Predoperačné štádium*	Kocky na druhej doske zaberajú viac miesta.	
	Štádium konkrétnych operácií	Kocky na oboch doskách zaberajú rovnaké miesto.	

ZACHOVANIE OBJEMU			
Druh		Objem	
Čo ukážeme dieťaťu		Dve rovnako veľké hrudy plastelíny ponorené do dvoch rovnako naplnených nádob s vodou a necháme dieťa presvedčiť sa, že výška hladiny vody je v oboch nádobách rovnaká.	
Čo urobí experimentátor		Jednu hrudu plastelíny vyberie a sploští. Opýta sa, či bude hladina vody v oboch nádobách znova rovnaká.	
Odpoveď dieťaťa	*Predoperačné štádium*	Voda v pohári so sploštenou plastelínou nebude tak vysoko ako v druhom pohári.	
	Štádium konkrétnych operácií	Nič sa nezmení, v oboch pohároch bude hladina vody rovnaká.	

Tab. 2 Zachovanie množstva (zdroj: Sternberg, 2002, s.476)

4.2 Piaget a vyučovanie matematiky

Piaget je považovaný za jedného z hlavných odborníkov v otázke, ako sa deti učia matematiku. Jeho teória nám ponúka veľa dôležitých vysvetlení a pohľadov v porozumení matematickým predstavám u malých detí. No napriek jeho nepochybnému vplyvu, Piaget v skutočnosti venoval len veľmi málo svojich prác otázke, ako sa deti učia matematiku a taktiež ako im môžeme pomôcť v škole. Hughes (1984) vyzdvihuje v jeho práci dve dôležité črty. Prvou je jeho prvotný záujem o epistemológiu viac ako psychológiu, tak ako Piaget sám počas svojho života prehlasoval. Predovšetkým chcel porozumieť otázke, ako sú u ľudí vo všeobecnosti nadobúdané a rozvíjané vedomosti, viac ako otázke, ako sú konkrétne čiastkové vedomosti nadobúdané konkrétnymi jednotlivcami. Druhou dôležitou črtou Pigetovej práce je skutočnosť, že rovnako ako jeho záujem o psychológiu vývinu dieťaťa bol v mnohých prípadoch sekundárnym prvkom jeho epistemologického záujmu, tak jeho záujem o porozumenie matematike u detí bol sekundárnym prvkom jeho záujmu o všeobecnejší psychologický vývin detí. Na podporu svojej teórie kognitívneho vývinu jedinca v jednotlivých štádiách predložil dôkazy, ktoré pozostávali z veľkého množstva dômyselných experimentov navrhnutých jeho spolupracovníkmi a ním samotným. Hlavnou črtou realizácie týchto experimentov je, že dospelá osoba predkladá dieťaťu úlohy alebo problémy a diagnostikuje vývojové štádium dieťaťa podľa jeho poznámok a úvah, teda používa metódu klinického rozhovoru. Dve z týchto otázok, ktoré Piaget používal na štúdium prechodu z predoperačného štádia do štádia konkrétnych operácií sa explicitne týkajú čísel. Tieto dva problémy – **zoskupovanie** (začleňovanie do skupín) a **zachovanie počtu** – majú hlavný význam v Piagetom pohľade na matematické vzdelávanie v rannom veku, no zároveň sa stali aj cieľom kritiky jeho teórie. Tejto problematike sa budeme viac venovať v kapitole 2.1.

Piagetova teória kognitívneho vývinu dáva špecifický pohľad na spôsob vyučovania matematiky a zároveň na spôsob, ako by mala byť učená. Napriek tomu, že veľa Piagetových článkov je písaných ťažkou, jeho vlastnou terminológiou, náročnou na pochopenie, v časopise Scientific American sa v roku 1953 objavil článok, v ktorom sú s neobvyklou jasnosťou prezentované jeho názory na matematické vzdelávanie. Za povšimnutie v plnom znení stoja prvé dve tvrdenia:

> *...Je veľkým omylom predpokladať, že dieťa nadobúda predstavy o číslach a ďalšie matematické predstavy iba počas vyučovania. Naopak, pozoruhodnú úroveň dosiahne samostatne, nezávisle a spontánne. Ak sa pokúsime zaviesť nejaké matematické pojmy dieťaťu predčasne, jeho učenie je iba formálne, skutočné porozumenie pojmom prichádza iba s jeho mentálnym rastom.*
>
> *Môžeme to prezentovať na jednoduchom experimente. Dieťa sa vo veku 5 -6 rokov môže ľahko od rodičov naučiť názvy čísel od 1 do 10. Ak uložíme 10 kamienkov do radu vedľa seba, dieťa ich vie správne spočítať. Ak však preložíme kamene do zložitejšieho vzoru alebo ich poukladáme na seba, už ich viac nedokáže presne spočítať. Aj keď dieťa pozná názvy čísel, ešte nepochopilo ich skutočnú podstatu: teda, že počet objektov v skupine zostáva rovnaký, je „zachovaný“, bez ohľadu na ich zamiešanie alebo usporiadanie.“*

Tieto dve tvrdenia obsahujú niekoľko charakteristických Piagetových myšlienok. Môžeme tu vidieť previazanosť názorov, že vzdelávanie dieťaťa skôr ako je koncepčne pripravené, môže vyprodukovať len povrchné učenie sa a matematické pojmy nemôžu byť u dieťaťa skutočne pochopené a že skutočné učenie sa prichádza len s mentálnym rastom dieťaťa. Ďalším názorom je, že učenie sa matematike nie je pre dieťa vo svojej podstate ťažké, pretože je to činnosť, ktorú robí zväčša spontánne a nezávisle. Veľký význam je tu daný myšlienke zachovania – konzervácie: Piaget zastáva názor, že ak dieťa nie je schopné zachovávať počet, ešte nie je pripravené začať so školskou aritmetikou. Aj neskôr Piaget viackrát zdôrazňoval svoj názor, že vyučovanie matematiky by nemalo prebiehať priamym prenosom vedomostí z učiteľa na učiaceho sa, ale malo by byť prirodzeným výsledkom všeobecnejšieho vývinu logických schopností dieťaťa. Zdôrazňoval, že táto prirodzená metóda učenia sa prebieha cez detské aktivity a cez objavovanie. Nikdy však detailne neupresnil, ako by mali byť tieto jeho myšlienky praktizované v triede v škole. Piagetov pohľad na vzdelávanie obsahuje obdivuhodný všeobecný princíp o potrebe dieťaťa porozumieť tomu čo sa učí jeho vlastnými slovami. Avšak jeho teória bola vážnejšie kritizovaná. Podľa jeho kritikov, Piaget podceňoval schopnosti malých detí tým, že nebral na vedomie prostredie v ktorom myslenie prebieha (najmä vzťah medzi kontextom a štýlom jazyka pri realizovaní jeho úloh), a že jeho pohľad na vzdelávanie, aj keď je atraktívny, nie je vhodný pre porozumenie problémom, ktoré dieťa prekonáva pri matematickom vzdelávaní v škole. (Hughes, 1984))

Pigatova teória kognitívneho vývinu mala veľký vplyv na vzdelávanie, predovšetkým v matematickej a prírodovednej oblasti. Napríklad v 60-tych, 70-tych rokoch vyučovanie matematiky vychádzalo z jednotlivých stupňov vývinu matematického porozumenia. Preto sa v predprimárnom a primárnom vzdelávaní vyučovanie matematiky zameriava na budovanie predstavy o číslach, keďže v tomto období ešte nie sú tieto predstavy stabilizované a ukotvené. Neskôr, na primárnom stupni nastupujú číselné operácie, ktoré musí dieťa pochopiť, pretože štádium konkrétnych operácií určuje mentálnu pripravenosť žiaka na ne. Obdobie dospievania je vhodné na výučbu vzťahov medzi číslami a algebrou, pretože v štádiu formálnych operácií sa vyvíjajú predstavy a manipulácie s abstraktnými a viacrozmernými pojmami. Vo vyučovaní prírodovedných predmetov sa dieťa na primárnom stupni oboznámi so svetom prírody, neskôr na sekundárnom stupni by malo vzdelávanie viesť dieťa k objaveniu a pochopeniu základných pojmov ako sú priestor, plocha, čas, hmotnosť, objem a pod. a v období dospievania k testovaniu hypotéz, riadenému experimentovaniu a poznaniu abstraktných pojmov, ako sú energia, zotrvačnosť a pod.(Furth, Wachs, 1975)

4.3 Vygotskij a jeho teória kognitívneho vývinu

Hneď na druhé miesto po Piagetovi je v zmysle dôležitosti teórie kognitívneho vývinu zaraďovaný ruský psychológ Lev Vygotskij. V Piagetovej teórii prebieha kognitívny vývoj predovšetkým „zvnútra von“ prostredníctvom zrenia myšlienkových procesov. Piaget zdôrazňoval biologickú stránku vývinu a naopak Vygotskij vo svojej teórii vyzdvihuje v detskom intelektuálnom vývine úlohu prostredia. Tvrdí, že kognitívny vývoj postupuje predovšetkým „zvonku dovnútra“ prostredníctvom **internalizácie** (zvnútorňovania) – vstrebávanie vedomostí z kontextu. Preto sú v jeho teórii kľúčové hlavne sociálne vplyvy, viac než biologické. Podľa Vygotského väčšina detského učenia prebieha prostredníctvom interakcie s prostredím, ktorá vo veľkej miere predurčuje, čo si dieťa zvnútorní. Táto interaktívna forma učenia sa vzťahuje na budovanie **zóny najbližšieho vývinu** (ZNV). ZNV je rozpätie potenciálu medzi pozorovateľnou úrovňou realizovaných schopností (výkon – performácia) a základnou latentnou kapacitou (možnosti – kompetencie), ktorá nie je priamo jasne viditeľná (obr. 4). Pri pozorovaní detí spravidla sledujeme ich schopnosti, ktoré sa rozvinuli prostredníctvom interakcie dedičných dispozícií a prostredia. Vygotskij prvý ukázal, ako môžeme túto latentnú kapacitu merať. Odporúčal, aby sme prešli od statického hodnotiaceho prostredia (experimentátor kladie testové otázky alebo úlohy a čaká na odpoveď dieťaťa, pričom nezávisle od správnosti jeho odpovede pokračuje v ďalších otázkach) k **dynamickému hodnotiacemu prostrediu**, v ktorom interakcie medzi dieťaťom a experimentátorom nekončia odpoveďou dieťaťa. Pri nesprávnej odpovedi mu dá experimentátor odstupňovaný sled návodných rád, aby mu uľahčil riešenie daného problému. Schopnosť využívať poskytnuté rady je základom pre meranie ZNV, pretože táto schopnosť ukazuje rozsah, ako sa môže dieťa počas testovania rozvinúť nad rámec svojich pozorovateľných schopností. Ide vlastne a kombináciu testovania a výučby, ktorá priťahuje množstvo pedagógov, psychológov a iných bádateľov, pretože takto môžu pomôcť dieťaťu rozšíriť a uľahčiť vývoj jeho kognitívnych schopností. Napríklad, dve deti môžu odpovedať nesprávne, no dieťa, ktoré si z rád vezme ponaučenie, môže potenciálne dospieť ďalej ako dieťa, ktoré z rád nič nevyťaží. (Sternberg, 2002)

Obr.4 Zóna najbližšieho vývinu (zdroj: Sternberg, 2002, s.482)

Ako uvádza Saxe (1983), hlavnou myšlienkou Vygotského prístupu k vývinu jedinca je, že v používaní už nadobudnutých vedomostí pri riešení problémov u dieťaťa nastávajú kvalitatívne zmeny a tieto zmeny sú hlavnou črtou samotného procesu získania nových vedomostí. Na vysvetlenie tohto procesu z pohľadu Vygotského je dôležité rozlišovať medzi dvoma typmi vzdelávacích skúsenost: tými ktoré sa objavujú v procese poznávania „zdola nahor“, a Vygotskij ich nazval *spontánne predstavy* a tými, ktoré sa objavujú „zhora nadol“ a Vygotskij ich nazval *vedecké predstavy*. Učenie sa „zdola nahor“ vyplýva z detského spontánneho pokusu porozumieť aspektom sociálnej a fyzickej reality bez priamej pomoci dospelého. Tento typ skúseností vedie dieťa k nadobudnutiu praktických predstáv, čo znamená, že dieťa dosiahlo čiastkové riešenie určitého problému. Napríklad na určenie počtu objektov v určitej množine, môže dieťa vytvoriť ekvivalentnú množinu iných objektov na základe priraďovania „jeden k jednému“. Na rozdiel od učenia sa „zhora nadol“, ktoré vyplýva z interakcie s dospelým alebo schopnejším rovesníkom. Pri učení sa „zhora nadol“, s ktorým sa stretávame v škole, umožňujeme dieťaťu vytvárať si všeobecné predstavy, ktoré môžu byť prispôsobené rôznym typom problémov, ale nemusia vychádzať z jeho bezprostrednej skúsenosti. Podľa Vygotského, rôzne spôsoby učenia sa by mali byť vo vzájomnej interakcii a komunikácii, pričom sa môžu navzájom ovplyvňovať a vytvárať dôležité mechanizmy vo vývinových zmenách jedinca.

Vo vývine číselných predstáv podľa uvedenej schémy (obr. 4), na začiatku vývinového procesu, dospelí zapoja deti do takých aktivít zameraných na čísla, ktoré deti ešte nie sú úplne schopné urobiť samostatne ale sú v dosahu ich porozumenia; aktivity ktoré sú v rámci *zóny najbližšieho vývinu.* Pri riešení numerickej úlohy pod vedením dospelého predstavíme dieťaťu číselné symboly a všeobecné číselné stratégie, ktoré sú špecifické pre ich kultúrne spoločenstvo. Aj keď prvé stratégie a symboly sú regulované dospelým, v priebehu vývinu je dieťa schopné integrovať a prepojiť tieto predstavy so svojimi spontánnymi predstavami vychádzajúcimi z vlastných skúseností (zdola nahor) a tak dosiahnuť postupné porozumenie typom a funkcii týchto symbolov a stratégií. S narastajúcimi skúsenosťami vo forme interakcie s dospelým a ostatnými, prichádzajú vedecké predstavy (zhora nadol) pre riadenie a organizovanie učenia sa „zdola nahor“ čoho výsledkom je, že sa priebeh riešenia problémov stáva stále viac nezávislým od ostatných a ešte viac odzrkadľuje kognitívne funkcie členov kultúrneho spoločenstva dieťaťa. (Saxe, Posner, 1983))

Obaja psychológovia, Piaget aj Vygotskij, nabádali, aby sme sa neuspokojili iba so zaznamenávaním správnosti odpovede dieťaťa. Ich záujmom bolo, aby sa dostali pod povrch a pokúsili sa pochopiť, prečo sa deti chovajú tak, ako sa chovajú a prečo odpovedajú tak, ako odpovedajú. (Sternberg, 2002)

5 Rozvoj číselných predstáv

Podľa Hejného a Stehlíkovej (1999), pri skúmaní prejavov procesov myslenia detí o číslach rozlišujeme dva procesy:

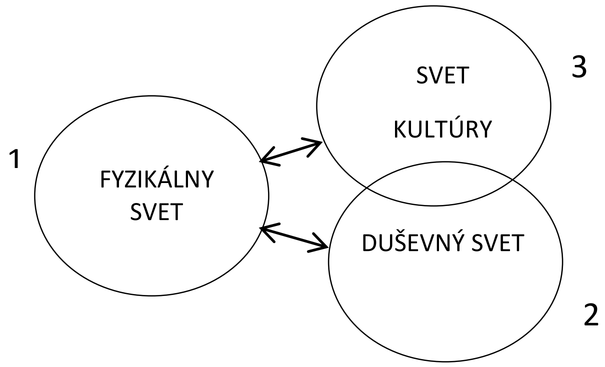
- proces, v ktorom k rôznym číselným predstavám priraďujeme číselné informácie,
- proces, v ktorom k číselným informáciám priraďujeme číselné predstavy.

Pod *číselnou informáciou* rozumieme akúkoľvek informáciu (slovo, pohyb, gesto...), ktorá obsahuje aspoň jedno číslo. Pri zavádzaní sveta čísel vychádzajú z Popperovej idey troch svetov. Svet čísel je zaradený ako časť druhého a tretieho sveta. Hejný chápe svet čísel ako štruktúru, ktorej základom je sémantická predstava jedinca o jednom čísle. Predstava sa skladá z troch komponentov: číslo, jeho ukotvenie na svet vecí a vedomie jedinca, v ktorom sa číslo a jeho ukotvenie nachádza. Svet vecí (prvý svet podľa Poppera) chápe Hejný ako súbor všetkých predstáv človeka o veciach, udalostiach, situáciách a vzťahoch vnímaného sveta. V priebehu intelektuálneho vývinu detí vzniká vnútri sveta vecí aj svet čísel.

Bolzanove- Popperove svety (Hejný, Kuřina, 2001):

- Svet 1 je svet „vecí“ (televízorov, áut, detí, kníh, písmen, zvierat a pod.). Je to svet fyzikálnej hmoty, svet fyzického prostredia, svet prírody, ale i svet techniky, atómov, molekúl, neurónov a ich vzťahov. Je to teda svet vytváraný prírodou a technikou a popisovaný a skúmaný fyzikou, chémiou a biológiou.
- Svet 2 je svetom vedomých aj nevedomých skúseností a predstáv človeka, svetom ľudského vedomia, myšlienkových pochodov a zážitkov človeka, svetom jeho nádejí, obáv, otázok. Je to teda svet duševných stavov a procesov, je tvorený žitím človeka a je popisovaný a skúmaný psychológiou.
- Svet 3 je svetom výtvorov ľudského ducha, jeho jadrom je ľudská reč, veda a kultúra. Je to svet pojmov, problémov a teórií, ideológií, svet príbehov a mýtov, svet dôkazov, argumentov a omylov, svet umeleckých diel. Je to svet objektívnych myšlienkových obsahov, vonkajších informácií.

Roger Penrose (1994) nazýva Svet 1 fyzikálnym svetom, Svet 2 duševným svetom a Svet 3 svetom kultúry.

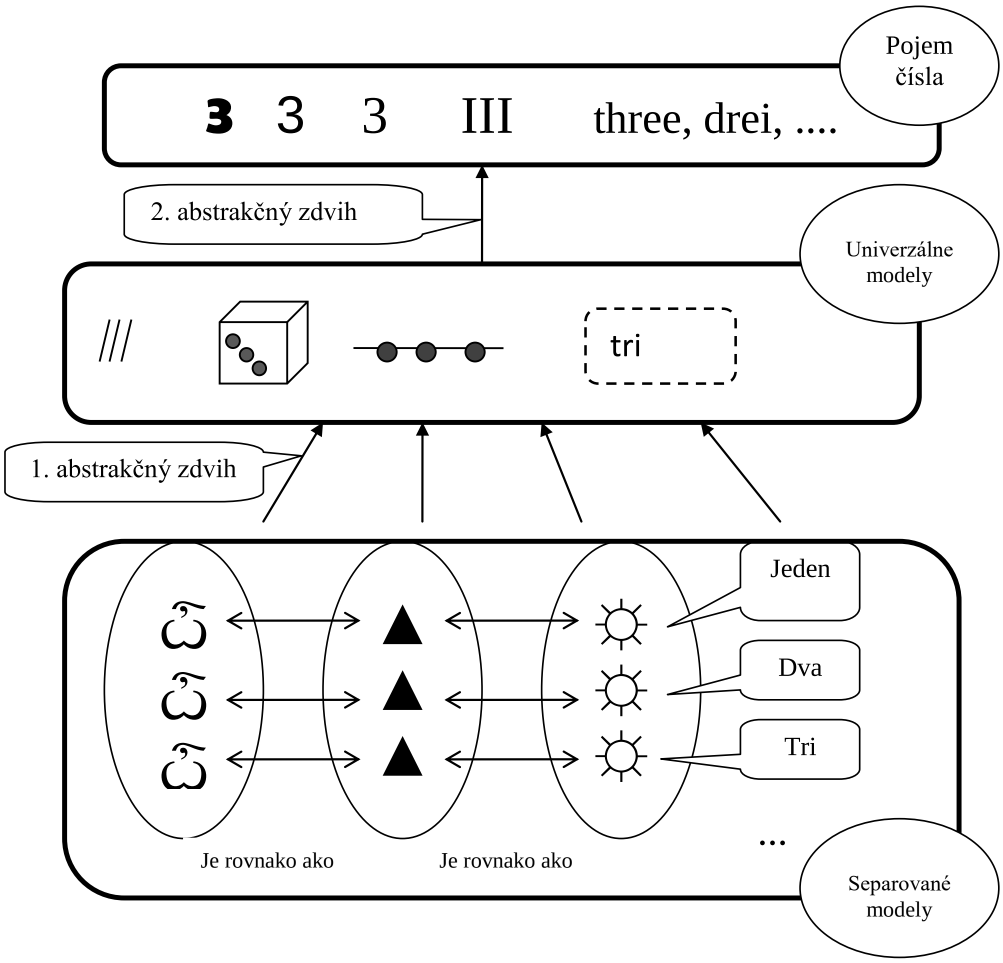


Obr.5 Prepojenie troch svetov (zdroj: Hejný, Kuřina, 2001, s.77)

V procese vynárania sveta čísel zo sveta vecí rozoznávame dve zložky:
Verbálnu: vynáranie sa týka slov – čísloviek. Dieťa si ich osvojuje ako zvuky, ktorých význam chápe zatiaľ len hmlisto. Slová *tri, štyri, päť* intuitívne začleňuje k sebe ako napríklad i slová *biela, modrá, zelená*.
Sémantickú: vynáranie sa týka významu čísloviek. Táto zložka je rozhodujúca pre budovanie sveta čísel. Proces budovania je rozdelený do štyroch vývinových štádií:

1. Štádium *otvorenia sveta čísel* – dieťa začína rozlišovať medzi jednotným a množným číslom, t.j. medzi jeden a mnoho.
2. Štádium *separovaných predstáv* – dieťa má predstavu o tom, čo sú tri lopty, tri autá, no vníma ich izolovane. Zatiaľ nevie, že tieto predstavy vyjadrujú rovnaký počet vecí.
3. Štádium *univerzálnych predstáv* – dieťa vie, že sa jednotlivé číselné predstavy môžu zastupovať. Prsty alebo guľôčky počítadla sa stávajú pre dieťa univerzálnymi modelmi. Dosiahnutie tohto štádia chápeme ako budovanie sveta čísel, ktorý je prepojený na svet vecí.
4. Štádium *abstraktných predstáv* – dieťa je schopné zmysluplne manipulovať s predstavou „tri, štyri“. Nepotrebuje ukotviť predstavu vo svete vecí. Svet čísel nadobudol samostatnosť.(Hejný, Stehlíková, 1999)

Proces utvárania pojmu prirodzené číslo je založený na určitej postupnosti. Dieťa sa najskôr oboznamuje s kvantitatívnou stránkou čísla, a to na základe kontaktov s okolitým svetom. Pomocou predmetov fyzikálneho sveta (jablká, slnká, trojuholníky,...) a zvukov (jeden, dva, tri,...) si dieťa uvedomuje, že jablĺk je rovnako ako sĺnk, trojuholníkov a pod.. Postupne nadobúda predstavu, že nezáleží na tom, o aké predmety ide. Od separovaných modelov sa dostane k univerzálnym modelom pomocou celej rady jednoduchých priradení. Tieto priradenia tvoria tzv. prvý abstrakčný zdvih (obr. 6).



Obr. 6 Proces uchopovania čísla 3 (zdroj: Hejný, Stehlíková, 1999, s.86)

Druhý abstrakčný zdvih predstavuje prechod od univerzálnych modelov k pojmu prirodzené číslo. Tieto procesy neprebiehajú izolovane, ale všetky sú v mysli dieťaťa rôznymi spôsobmi prepojené. Symboly týchto čísel pre žiaka zo začiatku hrajú iba rolu akýchsi signálov. Významnými zložkami matematiky sa stávajú pre žiaka až algoritmoch písomných výpočtov. (Hejný, Stehlíková, 1999)

Vo chvíli keď dieťa začína rozprávať a dokáže vymenovať čísla v číselnom rade napr. do desať, začína sa ďalšia fáza rozvoja číselných predstáv - určovanie počtu a počítanie objektov. Hopkins et al.(2004) uvádza takýto rozvoj počítacích schopností:

- *Sled slov*: počítanie začína súborom slov. Ďalšie dôležité prepojenie je v priradení slova (alebo symbolu) k objektom, ktoré sú počítané. Odpoveď na otázku „Koľko?“ predstavuje zvuk slova v poradí, ktoré je vyslovené po ukončení prednesu číselného radu od jedna po desať. Dieťa vie, že „sedem“ je viac ako „päť“, pretože zvuk „sedem“ prišiel po vyslovení slova „päť“.

- *Porovnávanie súboru objektov*: porovnávanie počtu objektov medzi dvoma a viacerými súbormi môžeme urobiť dvoma spôsobmi:

  - *Priame* porovnávanie - prikladaním jedného objektu z jedného súboru k jednému objektu z druhého súboru tak, že si vzájomne zodpovedajú. Podobne ako rozdeľovanie balíčka cukríkov medzi ľudí, teda na úrovni separovaných modelov. Ak po priraďovaní spôsobom „jeden k jednému“ nezostane nepriradený žiaden objekt, tak je v oboch súboroch rovnaký počet objektov, teda sú vzhľadom k počtu rovnaké. Ak nejaký objekt (alebo viac objektov) v niektorom zo súborov zostane, tak súbory nie sú rovnaké, majú rôzny počet objektov. Podľa toho, v ktorom súbore nám zostanú nepriradené objekty usúdime, ktorý súbor je väčší (menší).

    Ďalšie štádium je na úrovni univerzálnych modelov, teda keď rozdeľované objekty reprezentuje nejaký model (počítadlo, prsty, a pod.). Porovnanie dvoch súborov môžeme urobiť medzi týmito reprezentantmi objektov.

    Uvedené činnosti sa týkajú určenia veľkosti súboru na základe počtu objektov, ktoré obsahuje. Ďalší krok je vo vytvorení písomného symbolického systému znakov pre objekty alebo pre skupinu objektov.

  - *Nepriame* porovnávanie – po zavedení číselných znakov – číslic, sa porovnávanie súborov objektov urobí pomocou zápisu čísel po ukončení počítania objektov v každom súbore.

- *Nekonečný proces*: po zavedení pomenovania pre číselné znaky a spôsobu ich vymenovávania v určitom nemeniacom sa poradí za sebou v rámci číselného radu, ktorý vytvára číselnú sústavu, sa môžeme posunúť vo vývine ďalej. Ak si vezmeme akékoľvek číslo, stále môžeme pridať jedno navyše. To môže teoreticky urobiť proces počítania nekonečným. (Táto vlastnosť bola neskôr v roku 1889 nazvaná podľa Guiseppa Peana. Tvrdenie “každé číslo má svojho „nasledovníka“ je základným princípom počítania.)

5.1.1 Detské počítanie

Podľa štúdií poľskej psychologičky a pedagogičky Edyty Gruzscyk – Kolczynskej (2009), ktorá sa dlhé roky venuje detskému matematickému mysleniu, diagnostike problémov a chýb v detskom počítaní a analýze myslenia detí pri sčítaní a odčítaní, rozlišujeme v procese formovania schopnosti počítania tieto štádiá:

- Dieťa odlišuje objekty o ktoré sa zaujíma a chce ich lepšie poznať gestom, pohybom hlavy, pohľadom a pod. Ak sú objekty postavené v rade, ukazuje ich zaradom používajúc gestá na princípe jeden objekt- jedno gesto slovami: ten, tá, ďalší a pod..
- Dieťa začína používať názvy čísel, vníma ich však ako náhradné pomenovanie predmetov, nie ako slová na počítanie. Dotýka sa a ukazuje na predmety a vymenúva známe číslice v ľubovoľnom poradí.
- Vo veku okolo troch rokov má dieťa ešte problémy s koordináciou ukazovacích gest a vypovedaných čísel. Ukazované predmety spája so slovami na počítanie: jeden, dva, jeden, dva... S rytmom počítania sa spája rytmus dýchania a bitia srdca, preto sa dotýka jedného predmetu dva krát.
- Vo veku okolo štyroch rokov už dieťa vie používať pravidlo jeden k jednému: jeden ukazovaný predmet - jedno vypovedané číslo. Na základe skúsenosti s rytmickým ukazovaním predmetov a označovaním ich slovami na počítanie, speje dieťa k presnosti.
- S rozvojom reči a skúsenosťou pri počítaní, rastie aj rozsah ovládaných slov – čísel, ktoré dieťa vníma ako slová na počítanie, pričom ich vyslovuje v ľubovoľnom poradí a opakovaní, napr. jeden, dva, päť, osem jeden, dva päť...
- Po mnohých skúsenostiach s počítaním, vo veku okolo päť rokov, si dieťa osvojí pravidlo ustáleného poradia, teda že čísla vymenúvame za radom a žiadne nevynecháme.
- Dieťa začína byť presvedčené, že číslo vypovedané ako posledné má dva významy: týka sa posledného počítaného predmetu a zároveň určuje, koľko je všetkých predmetov spolu. Túto skutočnosť si uvedomujú niektoré päťročné deti, veľa šesťročných a takmer všetky sedemročné.

- Dieťa rozumie, že je možné premety uložené v rade počítať od začiatku do konca aj naopak a taktiež z ľubovoľného miesta v poradí, dôležité je, aby spočítalo všetky predmety a žiadne nevynechalo (podľa zásady jeden k jednému).
- V šiestom a siedmom roku života je väčšina detí schopná správne spočítať predmety v rôznych situáciách, aj keď sú rôzne.

K uvedenej teórii viedla aj nasledujúca diagnostická úloha, v ktorej dieťa pozoruje chyby pri počítaní bábky, ktoré vyplývajú z nedodržiavania pravidiel počítania. Bábka je pre dieťa „osobou" s nižšou spoločenskou pozíciou a horšími intelektuálnymi možnosťami, preto ju smelo kritizuje ale aj poučuje. Pri tejto diagnostickej úlohe E. G. Kolczynska využila výskumné skúsenosti Z. I. Kałmykowej, ktorá skúmala správanie sa detí v ďalších verziách tejto metódy. Podľa tejto metódy môžeme na základe gest dieťaťa a vykonávaných činností ako aj spôsobu ako učí bábku zistiť, na akej úrovni formovania schopnosti počítania sa dieťa nachádza, aké pravidlá pri počítaní zachováva a ako počas počítania rozmýšľa. Po kontakte s bábkou dieťa postupne odpovedá na otázky o správnom počítaní gaštanov a hľadá chyby v týchto úlohách:

1. Gaštany sú uložené v rade vedľa seba a bábka počíta postupným ukazovaním po jednom gaštane, pričom niektoré čísla nahradí prídavnými menami, napríklad: jeden, dva, tri, štyri, päť, hnedý, šesť, veľký, sedem, osem, malý, pekný, desať.
2. Bábka spočíta správne päť gaštanov, potom niektoré gaštany vynechá a pokračuje v ukazovaní na ďalšie gaštany a vymenúvaní čísloviek, pričom priebežne niektoré gaštany vynecháva.
3. Bábka počíta gaštany postupne po jednom, potom niektoré gaštany prikrýva rukou- zoskupí ich a počíta ako jeden gaštan, takto pokračuje a pribežne zgrupuje gaštany.
4. Bábka spočíta správne päť gaštanov, dotýka sa ich labkou a vymenúva čísla, potom spočíta niektoré gaštany dva krát a pokračuje v počítaní do konca.
5. Bábka začína počítať od polovice radu smerom na začiatok, ráta do konca, otočí sa a pokračuje v počítaní od začiatku do konca radu.
6. Bábka správne spočíta všetky gaštany, dotýka sa ich a vymenúva zaradom číslice. Keď skončí, zdôrazní poslednú číslicu a opýta sa dieťaťa, koľko gaštanov je v rade.

Na základe analýzy činnosti detí a ich odpovedí a emocionálnych reakcií, je možné poznať ako deti rozmýšľajú v situáciách, ktoré vyžadujú prácu s číslami.

6 Rozvoj geometrických predstáv

Zatiaľ čo číselné predstavy môžeme definovať ako intuitívne vnímanie čísel a vzťahov medzi nimi, geometrické predstavy môžeme definovať ako intuíciu o tvaroch a vzťahoch medzi tvarmi. O dôležitosti štúdia geometrie pojednáva aj Van de Walle (2001), podľa ktorého:

- Geometria môže poskytnúť hodnotnejší pohľad na svet. Môžeme ju nájsť v štruktúrach solárneho systému, v geologických útvaroch, v kameňoch a kryštáloch, v rastlinách a kvetoch, dokonca aj v zvieratách. Geometria je zároveň hlavnou zložkou nášho umelého sveta: umenia, architektúry, strojov a prakticky všetko čo človek vytvorí, má prvky geometrických tvarov.
- Geometrické skúmanie rozvíja schopnosti riešiť problémy. Priestorové myslenie je dôležité pre riešenie problémov a riešenie problémov je jedným z hlavných dôvodov pre štúdium geometrie.
- Geometria zohráva kľúčovú úlohu v štúdiu ďalších oblastí matematiky. Napríklad, predstava zlomku je spojená s určením časti z celku v geometrii. Pomer a percentá sa priamo vzťahujú ku geometrickej predstave o podobnosti. Miera a geometria spolu jasne súvisia.
- Geometriu používa denne množstvo ľudí. Vedci v rôznych oblastiach, architekti a umelci, inžinieri, geodeti, existuje množstvo profesií, ktoré pravidelne využívajú geometriu. V domácnosti geometria pomáha stavať oplotenia, plánovať záhrady, zariaďovať byty a pod..
- Geometria je príjemná. Ak geometria vo všeobecnosti zvyšuje obľúbenosť matematiky u študentov, tak to úsilie stojí za to.

V tejto kapitole sa budeme venovať rozvoju geometrického myslenia, pričom budeme vychádzať predovšetkým z práce holandského pedagóga Pierra van Hiele, ktorý so svojou manželkou Dinou van Hiele – Geldof pozoroval ťažkosti, ktoré majú ich žiaci pri štúdiu geometrie. Tieto pozorovania ho viedli k vývoju teórie obsahujúcej úrovne myslenia v geometrii, ktorými žiaci prešli pri postupnom prechode od rozpoznania tvarov až ku schopnosti napísať formálny geometrický dôkaz.

6.1 Úrovne geometrického myslenia podľa van Hieleho

Najdôležitejšou črtou van Hieleho modelu je päť hierarchicky usporiadaných úrovní v procese vývinu geometrického myslenia – **vizuálna, analytická, abstrakčná, dedukčná a axiomatická**. Clements a Batista (1992) navrhovali aj existenciu nultej úrovne, ktorú nazvali preduvedomenie (pre-recognition). Žiaci na tejto úrovni zaznamenávajú len časť vizuálnych znakov tvaru, čo vyplýva z ich neschopnosti rozlišovať medzi jednotlivými znakmi. Napríklad vedia rozlišovať medzi trojuholníkmi a štvoruholníkmi, ale nie sú schopní rozlišovať medzi kosoštvorcom a rovnobežníkom. V pôvodnej práci van Hieleho boli úrovne označené od 0 do 4, no neskôr začali americký pedagógovia používať číslovanie od 1 do 5 a súčasné práce van Hieleho preferujú tri úrovne myslenia. Prechod medzi jednotlivými úrovňami závisí viac od skúseností žiaka, ktoré nadobudne v procese vzdelávania sa, než od jeho veku alebo kognitívneho vývinu. Niektoré skúsenosti môžu uľahčiť alebo naopak sťažiť postup medzi jednotlivými úrovňami alebo prechod do vyššej úrovne (Mason, 2009). Mc Anelly (2011) uvádza vekové kategórie priradené k jednotlivým úrovniam, ktoré vychádzajú z ideálneho prípadu, že by žiaci boli schopní myslieť a uvažovať o geometrii podobným spôsobom už od predškolského až po stredoškolské vzdelávanie. Túto vekovú škálu sme začlenili do nasledujúceho popisu jednotlivých úrovní geometrického myslenia, ktorú uvádza Van de Walle (2001).

Pri postupnom prechode žiaka z jednej úrovne do ďalšej, sa objekt jeho geometrického myslenia mení.

1.úroveň **Vizualizácia** (5 – 7 rokov; predškoláci – 2. ročník ZŠ): objektom myslenia sú tvary a ich vzhľad, ktoré sú identifikované len na základe ich individuálneho vnímania ako celku.

Žiaci poznajú názvy útvarov na základe ich komplexného vizuálneho vnímania ako celku. Žiaci sú na tejto úrovni schopní odmerať útvary, dokonca hovoriť o ich vlastnostiach, pričom pojmom „štvorec“ charakterizujú všetky objekty štvorcového tvaru (obraz, rám a pod.). Vzhľad útvaru je na tejto úrovni dominantný, a tak prevažuje nad jeho vlastnosťami. Napríklad, ak otočíme štvorec o 45° , žiakovi na tejto úrovni sa už nemusí javiť ako štvorec.

Výsledkom myslenia na tejto úrovni sú skupiny alebo zoskupovanie geometrických útvarov, ktoré vyzerajú „rovnako“.

2.úroveň **Analýza** (7 – 10 rokov; 2.– 5. ročník ZŠ): objektom myslenia sú viac skupiny útvarov než jednotlivé útvary.

Žiaci sú na analytickej úrovni schopní uvažovať viac nad všetkými tvarmi v rámci jednej skupiny než len nad jedným útvarom. Namiesto rozprávania o „tomto“ obdĺžniku, hovoria o „všetkých obdĺžnikoch“. Zameraním sa na skupinu útvarov sa žiak začína zamýšľať nad tým, čo robí obdĺžnik obdĺžnikom (štyri strany, protiľahlé strany sú rovnobežné a majú rovnakú dĺžku, štyri pravé uhly, zhodné uhlopriečky...), pričom nepodstatné črty (veľkosť a otočenie) ustupujú do pozadia. Na tejto úrovni si žiaci začínajú uvedomovať, že útvary patria do jednej skupiny kvôli ich spoločným vlastnostiam. Predstava o jednom útvare môže byť zovšeobecnená na všetky útvary v jednej skupine. Ak útvar patrí do skupiny kociek, tak má zodpovedajúce vlastnosti objektov tejto skupiny: „Všetky kocky majú šesť zhodných stien a každá z týchto stien je štvorec“. Žiaci sú na tejto úrovni schopní vymenovať všetky vlastnosti štvorca, obdĺžnika a rovnobežníkov ale neuvedomujú si, že sú podmnožinou jeden druhému, že všetky štvorce majú vlastnosti obdĺžnikov a všetky obdĺžniky majú vlastnosti rovnobežníkov. Pri definovaní útvaru na analytickej úrovni žiaci vymenujú toľko vlastností geometrických útvarov, koľko vedia.

Výsledkom myslenia na tejto úrovni sú vlastnosti geometrických tvarov.

3.úroveň **Abstrakcia** (10 – 13 rokov; 5.– 8. ročník ZŠ): objektom myslenia sú vlastnosti geometrických útvarov .

Postupne ako žiaci začínajú rozmýšľať o vlastnostiach geometrických útvarov bez obmedzenia sa na konkrétne útvary, sú schopní uvedomovať si vzťahy medzi týmito vlastnosťami a aj vzťahy v rámci týchto vlastností: „Ak sú všetky štyri uhly pravé, tak útvar môže byť obdĺžnik. Ak je tento útvar štvorec, tak všetky jeho uhly sú pravé.“ S narastajúcou schopnosťou využívať implikáciu vo svojom myslení (uvažovať spôsobom „ak..- tak..“), dokážu jednotlivé útvary zatrieďovať na základe minimálneho počtu ich vlastností. Napríklad štyri zhodné strany a aspoň jeden pravý uhol, môžu byť postačujúce vlastnosti na definovanie štvorca; obdĺžnik je rovnobežník s pravým uhlom; a pod.. Pozorovanie sa v rámci samotných vlastností začína zameriavať na logické argumenty o vlastnostiach útvarov. Žiaci na tejto úrovni začínajú byť schopní riadiť sa a zvažovať abstraktné tvrdenia o útvaroch a ich vlastnostiach. „Dôkazy“ môžu byť viac intuitívne než prísne deduktívne. Uvedomenie si axiomatickej štruktúry abstraktného systému však ešte zostáva pod povrchom.

Výsledkom myslenia na tejto úrovni sú vzťahy medzi vlastnosťami geometrických útvarov.

4.úroveň **Dedukcia** (14 – 18 rokov; 9.ročník ZŠ - 4. ročník SŠ): objektom myslenia sú vzťahy medzi vlastnosťami geometrických útvarov.

Žiaci na tejto úrovni dokážu skúmať viac než len vlastnosti geometrických útvarov. Počas ich myslenia v predchádzajúcich úrovniach, postupne vznikali hypotézy týkajúce sa vzťahov medzi vlastnosťami. Sú tieto hypotézy správne? Sú pravdivé? Počas priebehu analýz týchto neformálnych tvrdení, sa začína vyvíjať štruktúra geometrického systému dopĺňaná o axiómy, definície, vety, dôsledky a postuláty, ktorú si žiaci uvedomia ako nutný prostriedok pre stanovenie pravdivých tvrdení v geometrii. Na tejto úrovni si žiaci začínajú uvedomovať potrebu existencie logického systému, ktorý spočíva v minimálnej množine predpokladov a z ktorého môžu byť odvodené ďalšie pravdivé tvrdenia. Žiaci sú na tejto úrovni schopní pracovať s abstraktnými tvrdeniami o geometrických vlastnostiach a robiť závery, ktorých základom je viac logika než intuícia. Napríklad študent operujúci na úrovni dedukcie je schopný zreteľne vidieť, že uhlopriečky v obdĺžniku sa navzájom rozpoľujú, zatiaľ čo na nižšej úrovni myslenia sa o tom mohol len domnievať. Na rozdiel od abstrakčnej úrovne, keď sa žiaci síce riadili tvrdeniami ale chýbalo im uvedomenie si potreby dokázať ich, na deduktívnej úrovni je už uvedomenie si potreby dôkazu, a to na základe súboru deduktívnych tvrdení.

Výsledkom myslenia na tejto úrovni sú deduktívne axiomatické systémy v geometrii.

5.úroveň **Axiomatizácia** (18 rokov a viac; VŠ): objektom myslenia sú deduktívne axiomatické systémy v geometrii.

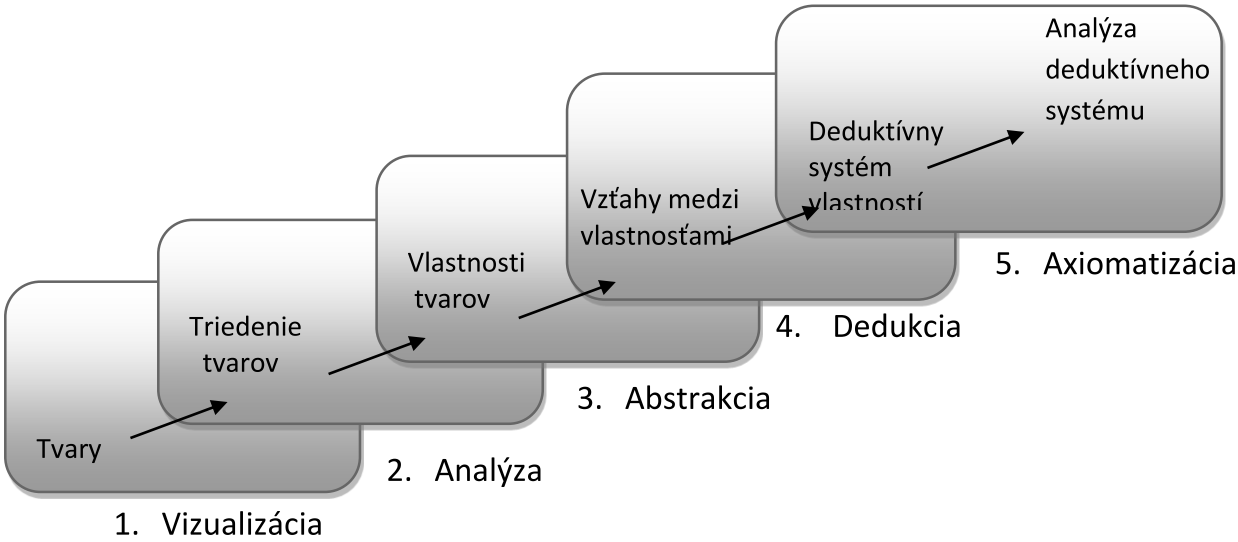
Na najvyššej úrovni van Hieleho hierarchie je objektom pozornosti sám axiomatický systém, nie len dedukcie vo vnútri systému. Je tu uvedomenie si rozdielov a vzťahov medzi rôznymi axiomatickými systémami. Je to vo všeobecnosti úroveň vysokoškolských študentov matematiky zaoberajúcich sa geometriou ako vednou oblasťou matematiky.

Výsledkom myslenia na tejto úrovni je porovnanie a rozdiely medzi rôznymi axiomatickými systémami v geometrii.

Vo svojich štúdiách Clements et al. (2004) skúmali, ktoré geometrické tvary identifikujú deti vo veku 4 – 6 rokov (na úrovni vizualizácie podľa van Hieleho) v súbore objektov znázornených na papieri. Priemerne 96% (ak urobíme priemer výkonu štvor- ,päť- a šesť- ročných detí) detí správne rozpoznalo oblé a hranaté tvary, priemerne 86% detí identifikovalo štvorec, 59% určilo trojuholník a priemerne 54% detí určilo správne obdĺžnik. Deti mali tendenciu prijať trojuholníkový tvar so zakrivenými stranami a zamietnuť trojuholníky, ktoré boli príliš „dlhé!“, „zohnuté“ a „bod nie je na vrchole“. Taktiež mali tendenciu prijať „dlhý“ rovnobežník alebo lichobežník za obdĺžnik. Môžeme tu pozorovať, aký posun v myslení musí u detí nastať, aby dokázali presne rozoznať konkrétny útvar, napríklad trojuholník od tvarov, ktoré mu ho pripomínajú (ako je napríklad aj kúsok pizze).

6.2 Charakteristika van Hieleho úrovní geometrického myslenia

Geometrické predstavy vzniknuté na každej z úrovní geometrického myslenia sa stávajú ohniskom alebo objektom myslenia na ďalšej úrovni.



Obr.7 Prepojenie úrovní geometrického myslenia podľa van Hieleho (zdroj: Van de Walle,2001, s.311)

Vzťahy medzi objektmi, ktoré sú výsledkom rozvoja geometrických predstáv na jednej úrovni sa stávajú základom pre rozvoj na nasledujúcej úrovni, ako je to znázornené na obrázku 7.

Vychádzajúc zo základných myšlienok tejto teórie, môžeme vytvoriť štyri navzájom súvisiace charakteristiky, ktoré si zaslúžia pozornosť a ktoré analyzujú vo svojej práci aj Geddes a Fortunato (1993):

1. Jednotlivé úrovne sú vzostupné; aby sa žiak dostal sa na ktorúkoľvek vyššiu úroveň, musí prejsť všetkými prechádzajúcimi úrovňami. Prejsť nejakou úrovňou znamená, že u jedinca došlo k nadobudnutiu geometrického myslenia príslušného k jednej úrovni a vytvoril si vlastné typy objektov alebo vzťahov, ktoré sú základom myslenia na ďalšej úrovni. Preskočenie niektorej úrovne sa vyskytne málokedy. U niektorých matematicky nadaných žiakov sa môže zdať, že preskočia nejakú úroveň, čo môže byť spôsobené aj tým, že sa u nich vyvinuli schopnosti logicky uvažovať inou cestou ako cez geometriu.

2. Jednotlivé úrovne nezávisia od veku žiaka v zmysle Piagetových vývinových štádií. Žiak tretieho ročníka základnej školy ako aj stredoškolák sa môžu nachádzať napríklad na prvej úrovni geometrického myslenia. V skutočnosti niektorí študenti aj

dospelí zostanú navždy na prvej úrovni a značný počet dospelých nikdy nedosiahne tretiu úroveň. No vek určite súvisí s množstvom a druhom geometrických skúseností, ktoré môžeme nadobudnúť. Preto je primerané, ak sa napríklad všetky deti vo veku 5-7 rokov nachádzajú na 1. úrovni, ako aj väčšina žiakov tretieho a štvrtého ročníka ZŠ.

3. Vlastná geometrická skúsenosť je najvyšším a jedinečným faktorom, ktorý ovplyvňuje prechod cez jednotlivé úrovne. Aktivity, ktoré umožňujú žiakom objavovať, rozprávať a vzájomne pôsobiť s poznatkami nasledujúcej úrovne v procese narastania ich skúseností na aktuálnej úrovni na ktorej sa nachádzajú, dávajú týmto žiakom najlepšiu príležitosť postúpiť do ďalšej úrovne.

4. Ak sú vyučovacie metódy alebo jazyk na vyššej úrovni, než na ktorej sa žiak nachádza, môže to viesť k vzniku formálnych vedomostí. Žiak tak musí zápasiť s neznámymi objektmi svojho myslenia, ktoré ešte uňho neboli vytvorené na predošlej úrovni. Tak učením sa naspamäť bez hlbšieho porozumenia, dosiahne len dočasný alebo povrchný výsledok. Napríklad, žiak dokáže memorovať tvrdenie, že všetky štvorce majú vlastnosti obdĺžnikov aj bez pochopenia potrebných vzťahov. Alebo si zapamätá geometrické dôkazy, no zlyhá pri tvorbe jednotlivých krokov alebo potrebných odôvodnení.

6.2.1 Van Hiele a vyučovanie geometrie

Podľa van Hieleho (Mason, 2009), napredovanie žiaka cez jednotlivé úrovne geometrického myslenia v procese nadobúdania geometrických skúseností v rámci školského vzdelávania je výsledkom vyučovacích metód, ktoré sú usporiadané do týchto piatich fáz:

1. *Orientácia:* diskusiou učiteľ zistí, čo už žiaci o preberanej téme vedia a žiaci sa začnú orientovať na novú tému.
2. *Riadené skúmanie*: žiaci preskúmajú geometrické objekty zadávané v inštrukciách pomocou starostlivo zostavených úloh zameraných na skladanie, meranie alebo konštruovanie. Učiteľ zabezpečí, aby žiaci preskúmali všetky potrebné špecifické pojmy.
3. *Explicitácia*: žiaci svojimi vlastnými slovami popíšu, čo sa naučili o danej téme. Učiteľ zavedie relevantné matematické pojmy.

4. *Aplikácia*: žiaci aplikujú naučené vzťahy a pojmy pri riešení problémov a riešia viac otvorených úloh.
5. *Integrácia*: žiaci sumarizujú a začleňujú nové poznatky, vyvíjajú nový systém objektov a vzťahov.

Žiak môže niekedy potrebovať pri konkrétnej téme prejsť cyklom niektorej z uvedených fáz aj viackrát. Učiteľ si musí uvedomovať, že aj pri rovnakom vyjadrovaní sa učiteľa a žiaka o nejakej preberanej téme, interpretácia používaných slov a pojmov môže byť celkom odlišná. Napríklad ak sa žiak nachádza na prvej úrovni geometrického myslenia, slovo „štvorec“ mu pripomína tvar, ktorý vyzerá ako štvorec (štvorcový tvar) ale nič iné. Žiak na druhej úrovni geometrického myslenia sa pozerá na štvorec z hľadiska jeho vlastností, no nemusí vedieť, ktoré z nich sú nevyhnutné alebo postačujúce na jednoznačné určenie štvorca. Môže mať pocit, že na nadobudnutie istoty, že to skutočne je štvorec, musia byť potvrdené alebo dokázané všetky jeho vlastnosti. Učiteľ, ktorý rozmýšľa na najvyššej úrovni geometrického myslenia, pozná nielen vlastnosti štvorca, ale zároveň vie vybrať tie z nich, ktoré dokazujú, že útvar je štvorec. Ak učiteľ pozná vzťahy medzi rôznymi geometrickými útvarmi a ich vlastnosťami, môže uvažovať nad viacerými rôznymi spôsobmi dôkazu, že daný útvar je štvorec. Učiteľ za účelom efektívnejšej komunikácie so žiakom musí vedieť zhodnotiť, ako žiak vysvetľuje danú tému. Ak sa učiteľ snaží učiť na vyššej úrovni myslenia než na akej sa žiak nachádza, žiak skutočne neporozumie obsahu toho, čo sa učí. Nadobudne tak len formálne vedomosti, ktoré rýchlo zabudne, i keď má chvíľu dojem, že učivo ovláda, keďže ho vie naspamäť.

Žiak sa nemusí nachádzať na rovnakej úrovni geometrického porozumenia ani v rámci jedného učebného celku. Napríklad, ak viac pracuje s trojuholníkom ako so štvoruholníkom, dokáže o trojuholníku rozmýšľať viac prepracovaným spôsobom ako by vedel o neznámom objekte, napríklad lichobežníku. Ak však už nadobudne určitú úroveň myslenia v jednej oblasti učiva, je preňho jednoduchšie rozmýšľať na požadovanej úrovni aj v ďalších oblastiach. Žiak už má skúsenosť a schopnosť vyhľadávať vzťahy medzi objektmi a medzi ich vlastnosťami. Dôležitú úlohu v štúdiu geometrie má matematický jazyk. Pre každú úroveň myslenia je charakteristický jej vlastný jazyk, ktorým žiaci vysvetľujú rovnaké geometrické pojmy. Diskusia a slovné pojmy sú dôležitými aspektmi pre fázy vzdelávania ako sú *orientácia, explicitácia a integrácia*. Žiak si vyjasňuje a uvedomuje svoje myšlienky aj prostredníctvom rozprávania o nich. Podľa van Hieleho, efektívne štúdium prebieha vtedy, keď žiaci aktívne prežívajú daný predmet štúdia v primeranom kontexte a keď sa zapájajú do diskusie a úvah. Podľa jeho teórie, a s tým môžeme len súhlasiť, prednostným používaním vyučovacích metód ako sú prednášanie a memorovanie nevedie k efektívnemu štúdiu. Učiteľ by mal poskytnúť svojim žiakom primerané skúsenosti a príležitosti diskutovať o nich.

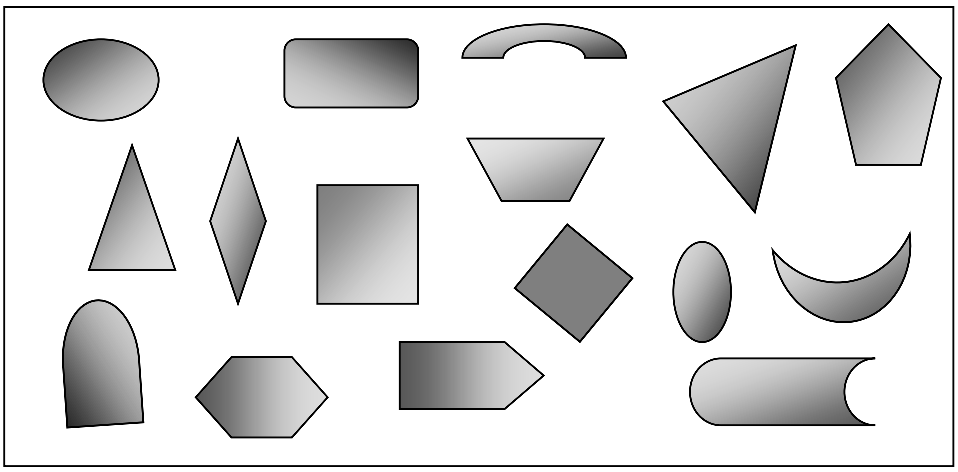
6.2.2 Vyučovanie geometrie na jednotlivých úrovniach geometrického myslenia

Výber vyučovacích metód vychádzajúci z vývinovej úrovne žiaka si vyžaduje, aby učiteľ žiaka počúval a diagnostikoval a až potom začal s vyučovaním na tej úrovni, na ktorej sa žiak nachádza. Teória van Hieleho zdôrazňuje nevyhnutnosť vzdelávania na úrovni žiaka. Takmer akákoľvek aktivita sa dá prispôsobiť tak, aby sa prelínala dvoma úrovňami myslenia, a to aj v rámci vyučovania v jednej triede. Učiteľ môže sledovať odpovede a postrehy žiakov, ktorí sú na nižšej úrovni myslenia a zároveň povzbudzovať a vyzývať žiakov k práci na vyššej úrovni myslenia. Uvádzame niekoľko návrhov na realizáciu aktivít na prvých troch úrovniach geometrického myslenia podľa (Clements, Batista, 1992; Mc Nelly, 2011) a ukážky aktivít, z ktorých sme niektoré upravili:

1. **Aktivity na úrovni vizualizácie**

- zahŕňajú triedenie, určovanie a popisovanie rôznych tvarov,
- používanie fyzických modelov, s ktorými môžu žiaci manipulovať (tangram, geodoska, geometrické skladačky),
- obsahujú veľa rôznych a rozmanitých ukážok útvarov, aby žiaci videli ten istý útvar v rôznych veľkostiach a polohách s cieľom odlíšiť charakteristické znaky útvaru od nepodstatných,
- poskytujú príležitosti pre stavanie, tvorenie, kreslenie, skladanie a rozkladanie útvarov.

Ukážka aktivity: *Z danej skupiny tvarov vyberte také, ktoré sa na seba podobajú*.
Z danej skupiny tvarov vyberte štvorce a trojuholníky.

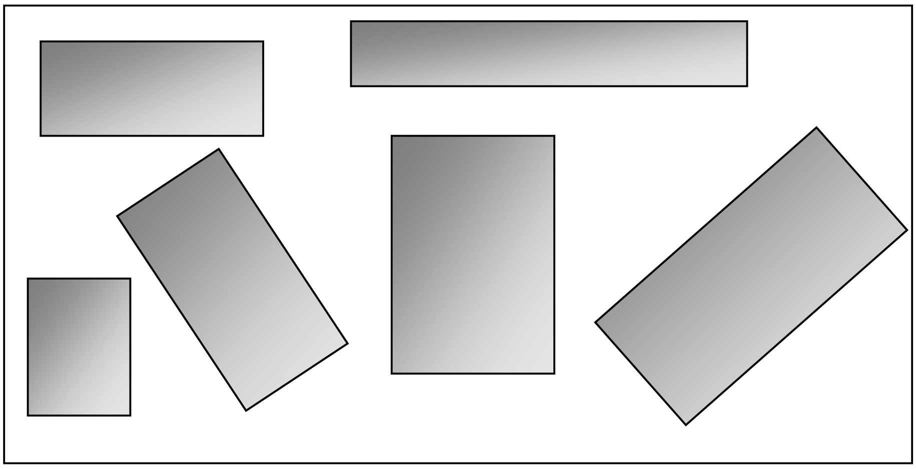


Obr.8 Vnímanie tvarov na vizuálnej úrovni

2. **Aktivity na úrovni analýzy**

- používajú sa v nich konkrétne alebo virtuálne modely na určenie, meranie, skúmanie a upravovanie vlastností útvaru s cieľom posunúť sa od jednoduchej identifikácie útvaru k jeho vlastnostiam,
- používanie modelov ako na prvej úrovni, zahŕňajú však modely, ktoré umožňujú skúmanie rôznych vlastností objektov,
- riešenie problémov obsahujúcich úlohy, v ktorých sú vlastnosti útvarov dôležitým prvkom,
- triedenie podľa vlastností útvarov ako aj ich názvov (napríklad: určenie vlastností trojuholníkov, na základe ktorých sú niektoré trojuholníky podobné a ďalšie rôzne).

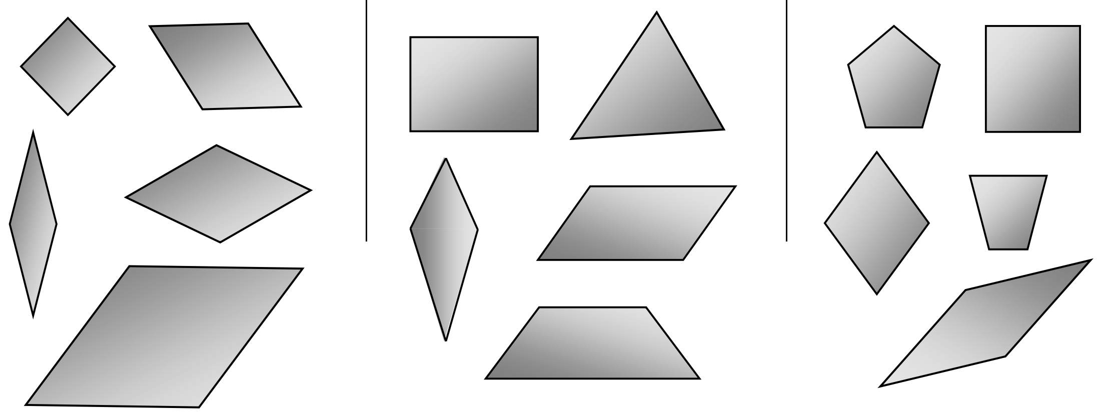
Ukážka aktivity: 1. *Vytvorte zoznam vlastností pre túto skupinu útvarov, ktorý bude obsahovať: uhly, strany, uhlopriečky, symetrie.*



Obr.9 Vnímanie tvarov na úrovni analýzy

2. *Nájdite vlastnosť geometrických útvarov spĺňujúcu uvedené podmienky:*

Každý z týchto tvarov má jednu spoločnú vlastnosť.	Žiadny z týchto tvarov tú vlastnosť nemá.	Ktoré z týchto tvarov majú hľadanú vlastnosť?



Obr.10 Vnímanie tvarov na úrovni analýzy

3. Aktivity na úrovni abstrakcie

- používanie modelov a technológií so zameraním na určenie vlastností útvarov, vytváranie zoznamov vlastností a analyzovanie, ktoré vlastnosti sú nevyhnutné a ktoré postačujúce pre jednoznačné určenie konkrétneho útvaru alebo pojmu,
- obsahujú neformálny jazyk dedukcie: *všetky, niektoré, žiadny, ak –tak, čo ak*, a podobne,
- skúmajú niektoré vzťahy medzi mnohouholníkmi za účelom zistenia, či opačné tvrdenie je tiež správne (napríklad: “Ak je štvoruholník obdĺžnikom, musí mať štyri pravé uhly“; opačne: „Ak má štvoruholník štyri pravé uhly, musí to byť zároveň obdĺžnik?),
- používanie modelov a kresieb (zahŕňajúc aj geometrický dynamický softvér) ako pomôcky na hľadanie zovšeobecnenia a kontra - príkladov,
- povzbudzujú k vytváraniu a testovaniu hypotéz,
- používajú sa v nich vlastnosti na definovanie útvaru alebo určenie, či konkrétny geometrický útvar patrí do danej množiny útvarov .

Ukážka aktivity: 1. *Z daných vlastností vyberte dvojice tak, aby jednoznačne určovali obdĺžnik. Vytvorte ďalší minimálny zoznam určujúcich vlastností pre obdĺžnik, ale aj iný geometrický útvar.*

štvoruholník	štyri pravé uhly	zhodné uhlopriečky
obsahuje pravé uhly	útvar ohraničený štyrmi stranami	rovnobežník

2.*Určte, ktoré z uvedených tvrdení je pravdivé a ktoré nepravdivé, svoju odpoveď podložte argumentmi. Vytvorte ďalšie jednoznačné tvrdenia.*

- Všetky štvorce majú vlastnosti obdĺžnikov.
- Všetky obdĺžniky majú vlastnosti štvorcov.
- Ak je daný útvar lichobežník, tak dve jeho strany sú zhodné.
- Niektoré rovnobežníky sú obdĺžniky.
- Všetky obdĺžniky sú rovnobežníky.

7 Rozvoj porozumenia miere v geometrii

Meranie v geometrii, teda určovanie dĺžky alebo obsahu geometrických útvarov, je úzko prepojené s detským chápaním vzťahu medzi časťou a celkom. Uvedieme niektoré štúdie, ktoré sa zaoberali úlohou chápania celku a prekrývania sa vo vývine porozumenia obsahu a dĺžke v predškolskom veku, ktoré spracovali Bart, et al. (2008). Ak by sme si predstavili situáciu, v ktorej by malo malé dieťa rozdeliť celú tabuľku čokolády rovnakým dielom medzi seba a kamaráta, mohli by sme vidieť dva spôsoby ako to urobí. Musí rozdeliť celok na dve rovnaké časti. Môže celú čokoládu hneď rozpoliť alebo rozdeliť na menšie rovnaké kúsky a tie potom rozdeliť medzi seba a kamaráta, štýlom „tebe jeden- mne jeden“. Dôležité je, aby boli obidve deti spokojné a mali pocit, že rozdelenie bolo spravodlivé, či už dostali jeden veľký celý kus čokolády alebo viac malých kúskov. Môžeme tu vidieť prepojenie číselných a geometrických predstáv vo vývine dieťaťa. Porozumenie vzťahu medzi časťou a celkom ako príprave na pochopenie zlomkov prichádza až neskôr v škole (uvedomenie si, že ak mám celok rozdelený na 12 častí a dostanem 6 častí z dvanástich, tak je to isté, ako keď dostanem jednu polovicu z celku). V predškolskom veku je dieťa schopné toto „spravodlivé rozdelenie čokolády“ pochopiť pri pokrývaní jednej tabuľky čokolády dvanástimi menšími kúskami. Ak dieťaťa po rozdelení čokolády na dve časti pokryje šiestimi kúskami celú jednu časť, tak rozdelenie bolo spravodlivé v oboch prípadoch.

Uvedený postup vychádza z funkcie jednotky miery v porozumení dĺžke a obsahu geometrických útvarov. Podľa Piageta et al. (1960) na zistenie dĺžky alebo obsahu, musíme porovnať jednotkové meradlo so všetkými častami meraného objektu postupným porovnávaním (prikladaním, prekrývaním) jednotkovej časti, ktorú nazval jednotka opakovania. Ukázalo sa, že takáto operácia je pre malé, a niekedy aj pre staršie, deti dosť náročná. Napríklad Lehrer et al. (1998) vo svojom dlhodobom výskume detského porozumenia miere v geometrii zistili, že 6-7 ročné deti môžu porozumieť niektorým vlastnostiam miery ako je napríklad nepriama závislosť medzi počtom a veľkosťou jednotiek merania (čím väčšia je jednotka merania tým menší jej počet potrebujem na odmeranie útvaru), ale zlyhávajú v uvedomení si funkcie rovnakých jednotiek alebo operácie opakovania jednotiek. Deti často používali pri zisťovaní dĺžky jedného objektu súčasne rôzne jednotkové meradlá, ako napríklad: palec, guma, ceruzka a pod. a spočítavali ich bez uvedomenia si ich rôznej dĺžky. Dokonca aj pri používaní vopred stanovených identických jednotiek (napr. pásikov papiera) niektoré deti neboli schopné prirodzene pokračovať v meraní potom, čo sa im tieto jednotkové meradlá minuli.

Ďalšie výskumy poukazujú na to, že malé deti len čiastočne chápu funkcii jednotke miery pri určovaní počtu jednotkových meradiel pri meraní objektov. Frydman a Bryant (1998) požiadali 4-6 ročné deti, aby rozdali dvom ľuďom čokoládu tak, aby dostal každý z nich rovnaké množstvo. Mali k dispozícii rovnaký počet dvoch druhov tabuliek čokolády v tvare obdĺžnika. Obidva druhy mali rovnakú šírku, no dĺžka jedného bola dvojnásobkom dĺžky druhého. Deťom bolo povedané, že jeden človek prijíma iba dvojité tabuľky a druhý iba jednoduché tabuľky. Ukázalo sa, že 4-ročné deti vnímali oba druhy tabuliek čokolády rovnako. Zakaždým, keď dali jednoduchú tabuľku, dali aj dvojitú. Obom ľuďom dali takto rovnaký počet tabuliek čokolády a tak mal nakoniec jeden z nich dvojnásobné množstvo čokolády ako druhý. Na druhej strane, 5- ročné deti splnili svoju úlohu správne. Keď dali jednu dvojitú tabuľku jednému človeku, tak druhému dali dva jednoduché tabuľky a takto pokračovali, kým nerozdali všetku čokoládu.

Shipley a Shepperson (1990) požiadali 4-5 ročné deti spočítať súbor predmetov (napr. vidličiek), pričom niektoré z nich boli zlomené na dve časti. Ukázalo sa, že 4-ročné deti nechceli počítať dve zodpovedajúce si časti predmetu ako jeden predmet, dokonca i keď boli jasne požiadané, aby spočítali napr. „vidličky“; 5-ročné deti už boli schopné to urobiť. Taktiež sa opýtali detí, koľko rôznych farieb alebo koľko rôznych druhov predmetov sa nachádza v skupine obsahujúcej niekoľko kusov z každej farby a druhu. Deti vo veku štyroch rokov mali tendenciu napr. počítať každú vec samostatne (izolovane), zatiaľ čo päťročné deti zaobchádzali so skupinou podobných vecí (napr. rovnakej farby) ako s jedným celkom s jednou vlastnosťou.

Tieto výsledky naznačujú, že okolo piateho roku života deti začínajú byť schopné pracovať so skupinou objektov ako s jedných celkom a určiť jeho čiastočné vlastnosti ako konečnú hodnotu. Táto schopnosť úzko súvisí s vývinom počiatočných predstáv detí o mnohosti alebo s princípom pre určenie ekvivalencie dvoch množín na základe priraďovania „jeden k jednému“. Navyše by táto schopnosť mala byť základom pre pochopenie obsahu a dĺžky. Ak deti dokážu flexibilne vytvoriť identické jednotky v rozmedzí celého objektu alebo jeho časti, tak dokážu aj presne určiť obsah alebo dĺžku objektu uvedomením si, koľko jednotiek sa nachádza na celej ploche objektu alebo jeho dĺžke. Neskôr sa deti budú musieť naučiť rozoznať, či sú dané jednotky dĺžky alebo obsahu identické (zhodné) alebo nie. Je známe, že predškoláci majú sklon odhadovať rozmery geometrických útvarov využitím len jedného rozmeru alebo kombináciou sčítania dĺžky a šírky, čo im zabraňuje v skutočnom porozumení obsahu a dĺžke. Na základe svojich výskumov Yuzawa a Bart (2002) uvádzajú, že deti začínajú spontánne používať spôsob ukladania objektov na seba (prekrývania objektov) ako pomôcku pri odhadovaní obsahov útvarov vo veku okolo 5- 6 rokov. Taktiež upozorňujú na to, že prekrývanie objektov má dôležitú úlohu aj pri správnom odhade dĺžky u malých detí. Z ich záverov vyplýva, že vývin porozumenia obsahu a dĺžke u malých detí prebieha vo vzťahu ku každodennému množstvu poznatkov s vedomosťami o číslach (predstava jednotiek merania) a spontánnym používaním kognitívnych nástrojov (proces pokrývania objektov) na porovnanie veľkosti veličín.

8 Vybrané metódy vyučovania

8.1 Problémové vyučovanie

Jednou z moderných koncepcií vyučovania je aj problémové vyučovanie. Na rozdiel od tradičného vyučovania, kde učiteľ odovzdáva žiakom hotové poznatky, pri problémovom vyučovaní učiteľ nesprostredkúva žiakom poznatky v hotovej podobe, ale stavia pred nich úlohy, ktoré obsahujú pre nich neznáme vedomosti a spôsoby činnosti, motivuje ich, usmerňuje hľadanie spôsobov a prostriedkov riešenia úlohy, pri hľadaní ktorých si žiaci sami osvojujú nové vedomosti a zručnosti a súčasne rozvíjajú svoje schopnosti. (Turek, 2008). V situácii, keď sa pri svojej činnosti stretneme s nejakou prekážkou, ťažkosťami, protirečením, v situácii, ktorá sa pre nás stáva problémovou, začíname prebúdzať a rozvíjať svoje myslenie. Takéto **problémové situácie** môžeme vo vyučovaní navádzať predkladaním rôznych problémov a problémových úloh. Podľa Tureka (2008) musí problémová situácia okrem protirečenia, t.j. neznámeho, obsahovať ešte tieto dve stránky:

- *motivačnú* – prebudenie záujmu o odstránenie uvedomeného protirečenia a pocítenie možnosti odstrániť ho pri súčasnom osvojení si nových vedomostí a zručností,
- *predmetovo-obsahovú* – isté základné vedomosti a zručnosti zodpovedajúce vecnému obsahu situácie a intelektuálne prostriedky na manipuláciu s týmto vecným obsahom.

Vyučovanie matematiky riešením problémov sa v školskej matematike stáva čoraz častejším javom. Existuje viacero dôvodov, prečo sú problémy zaraďované do učebných osnov. Kopka (1999) uvádza tieto: motivácia, vysvetľovanie nových myšlienok, precvičovanie, osvieženie a ospravedlnenie vyučovania matematiky na školách. Pomerne často pri vyučovaní matematiky používame problémy ako nástroj, aby sme žiakov, resp. študentov, zoznámili s novými myšlienkami, pojmami, či postupmi. Je všeobecne známe, že žiaci si skôr osvoja a zapamätajú myšlienku či postup riešenia, keď naňho prídu vlastným pričinením. Okrem toho si takýto poznatok zapamätajú dlhšie a nemajú problém s jeho využitím v iných príkladoch a situáciách. Problémy však do školskej matematiky zaraďujeme aj s cieľom precvičiť niečo, čo sme predtým zaviedli alebo ukázali, aby sme upevnili pojmy a vedomosti, ktoré žiaci získali.

Jednou z oblastí problémového vyučovania je i náročnosť problému. V súčasnosti panuje všeobecná zhoda, že náročnosť problému závisí hlavne na charakteristike toho, kto problém rieši. Závisí na jeho schopnostiach (priestorová predstavivosť, schopnosť vidieť štruktúru problému), predchádzajúcich skúsenostiach a ochote, resp. motivácii (prístup, názory). Teda „...úspešné riešenie problému závisí aj na chápaní kedy a ako využiť príslušnú vedomosť a na schopnosti sledovať a vyhodnocovať použitie danej vedomosti v priebehu i po implementácii...“ (Lester, 1985)

Problém charakterizuje súčasný americký didaktik matematiky Jeremy Kilpatrick ako situáciu, v ktorej máme dosiahnuť nejaký ciel, ale priama cesta k nemu je zablokovaná. Ak je tento problém matematický, pri jeho riešení používame matematické pojmy a princípy. Problém obsahuje tri hlavné zložky:

1. *Východisková situácia*, v ktorej popisujeme súvislosti a poskytujeme informácie alebo údaje.

2. *Cieľ*, ktorý chce riešiteľ dosiahnuť.

3. *Cesta* od východiskovej situácie k cieľu.“ (Kopka, 1999)

Podľa takéhoto vymedzenia problému môžeme matematické problémy rozdeliť do týchto základných kategórií:

Problémy s uzavretou cestou a s uzavretým cieľom, t.j. cvičenia alebo rutinné problémy:

- počiatočná situácia je presne popísaná,
- cesta k cieľu je známa (cesta je uzavretá),
- cieľ je presne zadaný (cieľ je uzavretý).

Príkladom rutinného problému môže byt situácia, keď žiakovi, ktorý dokáže riešiť kvadratické nerovnice, zadáme nejakú konkrétnu kvadratickú nerovnicu, aby ju vyriešil.

Problémy s otvorenou cestou a s uzavretým cieľom, t.j. úlohy alebo nerutinné problémy:

- počiatočná situácia je presne popísaná,
- cesta k cieľu nie je známa (cesta je otvorená),
- cieľ je presne zadaný (cieľ je uzavretý).

Typickým nerutinným problémom je dôkaz matematickej vety, pričom študent, ktorý má vetu dokázať, jej dôkaz nikdy predtým nevidel.

Problémy s otvorenou cestou a s otvoreným cieľom:

- počiatočná situácia je presne popísaná,
- cesta k cieľu nie je známa (cesta je otvorená),
- cieľ nie je presne daný alebo nie je daný vôbec (cieľ je otvorený).

Takýto problém nazývame **matematické skúmanie**. *Za matematické skúmanie považujeme napríklad situáciu, keď žiakom zadáme Pascalov trojuholník.*

Zaviesť skúmanie znamená pomocou problémovej situácie, základného problému a použitím rôznych stratégií vytvárať nové problémy, ktoré môžu dať vhľad do existujúcich vzťahov vo vnútri danej oblasti matematiky. Nezanedbateľnými predpokladmi skúmania vo vyučovaní matematiky sú aj zručnosti a schopnosti žiakov riešiť problémy. Na to, aby žiaci tieto zručnosti nadobudli, je potrebné oboznámiť ich so stratégiami riešenia problémov. (Čeretková S., Šedivý O.; 2005).

Stratégie riešenia problémov spojené so skúmaním (objavovaním) nazývame heuristické stratégie.

8.1.1 Heuristické stratégie

Peter Small charakterizuje heuristické stratégie ako „súbor pravidiel vyvinutých na stanovenie najpravdepodobnejšieho spôsobu, aby sme uspeli pri hľadaní cieľa.“ Sú to stratégie založené na umení **objavovania**, na hľadaní správnej cesty pri riešení jednoduchších či zložitejších problémov. Na rozdiel od jasných krokov pri riešení príkladov pomocou algoritmov, ktorých následky vieme predvídať, pravidlá heuristických stratégií sú založené na empirických výsledkoch, na skúsenostiach. Pri riešení problémov pomocou týchto stratégií nevieme predvídať, k akému záveru sa dopracujeme, dokonca nie je zaručené, že budeme úspešní. „Možno zistíte, že niekedy vaša prvá metóda na riešenie problému nefunguje. Keď sa to stane, nebojte sa zanechať postup a vyskúšať inú stratégiu.“ (Johnson, Herr, 2001) Preto čím viac stratégií vieme použiť na riešenie problému, tým je väčšia pravdepodobnosť, že problém naozaj vyriešime.

Diagramy

Riešenie problémov závisí od poskytnutej informácie a od toho ako je organizovaná. Niekedy si pri riešení problému neuvedomíme, že jeden obrázok môže byť osožnejší ako tisíc slov. „Diagram má oproti verbálnej komunikácii mnoho výhod. Môže napríklad oveľa lepšie a jasnejšie naznačiť polohové vzťahy ako slovný opis.“ (Johnson, Herr, 2001) Môže pomôcť objasniť myšlienky a vyriešiť problém, ktorému sme prepožičali vizuálnu reprezentáciu. To znamená, že pri riešení problému zapájame aj vizuálnu časť svojho mozgu. Jeden z typov diagramov, ktoré študenti matematiky veľmi často používajú na kategorizáciu vecí, sú **Vennove diagramy**, pretože z nich jasne vidieť vzťahy medzi rôznymi kategóriami. Pomáhajú hlavne pri správnej interpretácii problémov, v ktorých sa vyskytujú slová ako *všetky, niektoré, žiadny*, a to prostredníctvom prienikov množín a podmnožín.

Systematický zoznam

Určíte problémy je najlepšie riešiť tak, že si vytvoríme systematický zoznam. Systém použitý pri vytváraní zoznamu by mal byt zrozumiteľný a jasný, takže osoba, ktorá zoznam vytvára, by mala byť schopná rýchlo overiť presnosť tohto systému. Systém by tiež mal byt zrozumiteľný aj pre inú osobu, ktorá riešenie overuje. Zostavovanie systematických zoznamov je spôsob riešenia problémov pomocou usporiadania informácií. Mnoho systematických zoznamov má formu **tabuľky**, ktorej stĺpce sú označené informáciou poskytnutou v zadaní problému. Riadky v tabuľke naznačujú možné kombinácie.

Vylučovacia metóda

Podstatou vylučovacej metódy je, že si najprv usporiadame informácie zo zadania problému a potom eliminujeme niektoré z možností. Zvláštnou formou vylučovacej metódy je stratégia, ktorú pri riešení problémov často používame, a to **dôkaz sporom**. Pri hľadaní sporov si najprv vytvoríme o probléme predpoklad. Môžu nastať len dve alternatívy: buď predpoklad platí alebo nie. „Ak vieme dokázať, že jedna z alternatív vedie k sporu, potom sme dokázali druhú alternatívu.“ (Wickelgren, 1995).

Logická matica

Základnou myšlienkou riešenia logických problémov je spájanie vecí do rozličných kategórií. Čím je kategórií viac, tým je problém náročnejší. Väčšinu logických problémov riešime pomocou tabuľky, ktorú voláme **matica**. „Matica nám pomáha zorganizovať si informácie zadané v probléme užitočným spôsobom. Napomáha tiež pri vylučovaní možností, čo môže byť dôležitou stratégiou pri riešení problémov.“ (Johnson, Herr, 2001). Na zaznamenanie vzťahov medzi osobami či vecami do matice sa najčastejšie používa znak X, pri naznačovaní vylučovania možností používame znak O. Je dôležité písomne si poznamenať všetky vzťahy či vylúčené možnosti ku ktorým sme počas riešenia problému dospeli. Slúži to ako spätná kontrola, ktorá informácia už bola použitá a akým spôsobom.

Hľadanie schém

Schémy sa objavujú všade okolo nás. V každodennom živote môžeme nájsť tisícky schém a je veľmi dôležité, aby sme vedeli tieto schémy rozoznať a pochopiť. V matematike sa schémy môžu donekonečna opakovať a rozširovať. „Schémy ako stratégia riešenia problémov umožňujú zredukovať komplexný problém na **schému** a potom použiť túto schému na nájdenie riešenia.“ (Johnson, Herr, 2001). Často je kľúčom na objavenie schémy zorganizovanie informácií do nejakého diagramu alebo tabuľky. Keď ju nájdeme, môžeme vysloviť prognózu, a práve to je podstatou riešenia problémov pomocou schém.

Metóda pokus – omyl

Heuristická stratégia pokus – omyl je silným nástrojom na riešenie problémov. Jej hlavnou myšlienkou nie je len **hádanie** a následné overovanie, či bol pokus správnym riešením. Ide aj o racionálnu organizáciu informácií o probléme a pokusov uhádnuť správne riešenie. To umožňuje hodnotiť ďalšie odhady systematickým spôsobom, čo zlepšuje exaktnosť pokusov. Z toho vyplýva, že s každým ďalším odhadom sa dostávame bližšie k správnemu riešeniu. Medzi najväčšie výhody tejto metódy patrí, že napomáha pri pochopení podstaty problémov, čím urýchľuje ich riešenie. Hoci na jednej strane je táto stratégia nepresná, na druhej strane je vysoko štruktúrovaná. Podporuje schopnosť organizácie a vytrvalosť riešiteľa.

Riešenie „od konca"

Pri použití tejto stratégie síce začíname problém riešiť pomocou cieľa, ten však nie je považovaný za informáciu, ktorá bola na začiatku daná. „Nepokúšame sa z cieľa vyvodzovať závery, ktoré nemusia byt nutne dané, ale z ktorých cieľ vyplýva. Namiesto toho sa snažíme dopracovať k **výrokom**, z ktorých vyplynuli výroky vedúce k cieľu. Takto postupujeme smerom dozadu." (Wickelgren, 1995) Dúfame pritom, že sa dostaneme až k informácii z východiskovej situácie, z ktorej môžeme vyvodiť všetko, čo je medzi východiskovou situáciou a cieľom. Preto je smer dedukcie v podstate rovnaký ako pri riešení smerom dopredu.

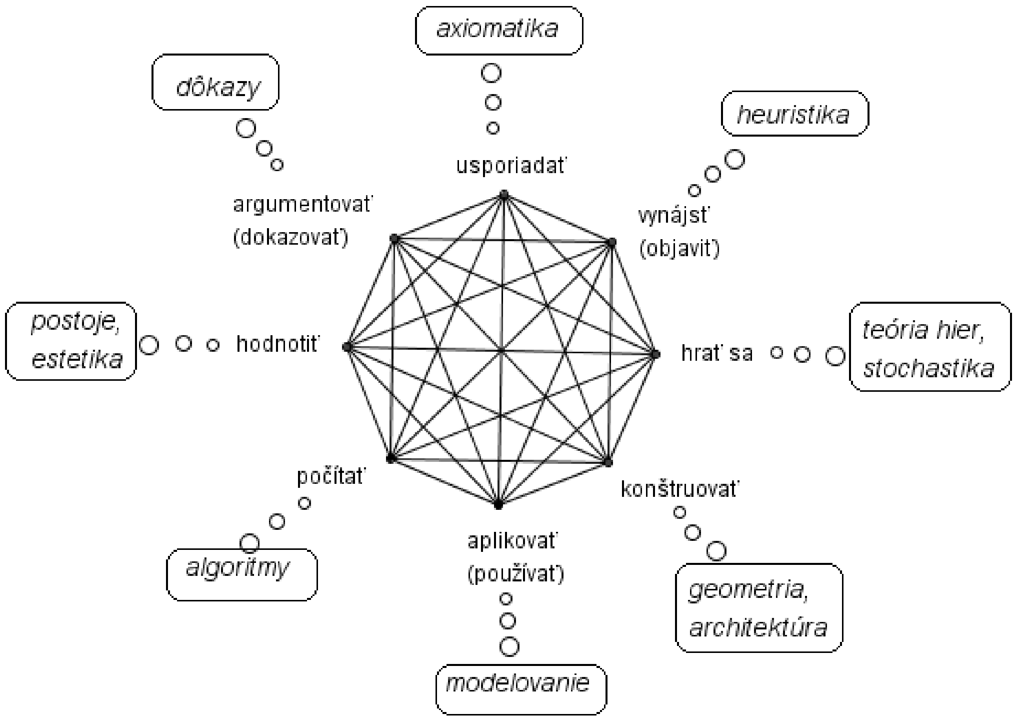
Algebra

Použitie algebry na riešenie problémov je jedna z najznámejších a pravdepodobne aj najobľúbenejších heuristických stratégií. Je to spôsobené tým, že s algebrou sa stretáva väčšina žiakov i študentov pri vyučovaní matematiky na základných a stredných školách. Navyše veľa matematických textov uvádza proces riešenia problémov v piatich krokoch, ktoré smerujú k algebre: prečítať si zadanie problému, vybrať si premennú, zapísať rovnicu, vyriešiť rovnicu a overiť riešenie. „Najdôležitejším krokom pri riešení problému pomocou algebry je prepísať si zadanie problému do algebrického jazyka" (Johnson, Herr, 2001), t.j. pomocou čísel a neznámych. Pri tomto kroku je potrebné zamyslieť sa nad tým, aké operácie bolo potrebné vykonať, aby sme dospeli k danému číslu. Ďalším krokom je zapísanie **rovnice**. Rovnicu tvoria dva výrazy spojené znakom rovnosti. Ak o dvoch výrazoch predpokladáme, že sa rovnajú, potom máme platnú rovnicu.

8.1.2 Problem solving

Riešenie problémov je všeobecne označované pojmom problem solving. „...Riešenie problému znamená nájsť spôsob, ako sa dostať z ťažkostí, cestu okolo prekážok, dosiahnutie cieľa, ktorý nie je bezprostredne dosiahnuteľný. Riešenie problémov je špecifickým úspechom inteligencie a inteligencia je zvláštnym nadaním ľudstva: riešenie problémov môže byť považované za najcharakteristickejšiu ľudskú aktivitu..." (Pólya, 1962).

Vzťahom medzi vývojom matematického myslenia a vývojom myslenia v histórii matematiky sa zaoberá Zimmerman (2009). Tento historický aspekt tvorí základ jeho štúdie histórie matematickej heuristiky, ktorá môže rozšíriť a zlepšiť teórie o problem solvingu a porozumenie procesu riešenia problémov študentmi ako aj vyučovacie metódy v praxi. Jeho štúdium histórie matematiky vedie k nasledujúcej sieti motívov a aktivít pre aplikáciu matematiky.



Obrázok 11 Problem solving

Počítanie je na začiatku takmer každej matematickej aktivity. Problémy, napr. z astronómie a poľnohospodárstva sú až dodnes veľmi dôležitými oblasťami pre rozvoj **aplikovanej** matematiky, respektíve nových matematických modelov. **Konštruovanie** je najdôležitejšou aktivitou nie len v geometrii ale aj v architektúre, ktorá bola po dlhý čas chápaná ako časť matematiky. Tieto tri aktivity sú na začiatku takmer všetkých matematických procesov.

Argumentovanie, resp. dokazovanie je základom modernej matematiky a patrí medzi najnáročnejšie matematické aktivity. Samozrejme, tieto aktivity sú tiež spojené s objavnými metódami, ktoré najskôr vedú k domnienkam a hypotézam. Bez objavovania nie sú žiadne dôkazy! Potenciál priniesť nové poznatky, súbor nových pravidiel alebo sadu vyriešených problémov v systematickom **usporiadaní,** môže vo vyšších ročníkoch viesť študentov k prvým priblíženiam sa k axiomatizácii. To môže pomôcť starším a viac zrelým študentom – cvičiť vo vhodných (primeraných) podmienkach a vo vhodnom čase – získať hlbšie porozumenie a väčší vhľad do teoretických vzájomných vzťahov.

Musíme vziať do úvahy, že snaha o dôkladné poznanie a s ním súvisiaci systém **hodnôt** vytvorili nové problémy a ich riešenia a takouto cestou taktiež vznikali nové matematické poznatky počas histórie matematiky. Okrem toho sú systémy hodnôt veľmi často spojené s estetikou, čo môže byť hnacou silou pre matematické „vynálezy“.

Rovnaký vplyv na postoj k matematike má **hranie sa** a rozvoj zábavnej (rekreačnej) matematiky. Takto mnohokrát vznikli nové odvetvia matematiky ako napríklad stochastika a teória hier.

Tieto rôzne aktivity (ktoré sú často dôležité nie len v matematike) sú vzájomne prepojené mnohými spôsobmi, ktoré sú vyjadrené na obrázku 11 pomocou „uhlopriečok“.

Keďže riešenie problémov v matematike smeruje tak k matematike ako aj k psychológii, pri definovaní problem solvingu sa odborníci na didaktiku matematiky opierajú aj o súčasné psychologické výskumy zaoberajúce sa vyššími kognitívnymi procesmi. V štúdii PISA je definované riešenie problémov, problem solving, ako „individuálna schopnosť použiť kognitívne procesy na riešenie reálnych medzipredmetových problémov, keď cesta k riešeniu nie je okamžite viditeľná a predmet a obsah oblasti poznatkov, ktoré je pri jej riešení potrebné aplikovať, nie sú na prvý pohľad zrejmé.“ Medzi základné kognitívne procesy potrebné pri riešení problémov patria:

- porozumenie zadaniu problému,
- formulácia problému,
- riešenie problému,
- reflexia a komunikácia problému.

Rozvíjanie týchto procesov je dôležité a nevyhnutné nielen pre vyučovanie matematiky, ale taktiež pre rozvíjanie logického myslenia a osobného i spoločenského života človeka.

8.1.3 Problem posing

Jednou z najdôležitejších pedagogických činností, ktoré učiteľ realizuje v triede a ktorá je zdôraznená v NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) Professional Standards (1991) je výber a tvorba hodnotných matematických otázok. Otázky kladené učiteľmi v triede si zasluhujú náležitú pozornosť, pretože otvárajú alebo zatvárajú študentom cestu k zmysluplnému štúdiu matematiky. Otázky vyjadrujú implicitné poslanie matematiky: čo to je, čo to znamená a čo je hodnotou poznania a štúdia matematiky. Matematické úlohy, podľa NCTM(1991), by nemali byť vyberané nepremyslene, napríklad len preto, že sú zábavné alebo odporúčané v učebniciach. Úlohy by mali byť vyberané na základe toho, že majú potenciál „angažovať intelekt študentov“, „môžu byť podané viac ako jednou zaujímavou cestou“, a „povzbudzujú študentov k vytváraniu vzťahov a vypracovaniu spoločného rámca pre matematické predstavy a pojmy“ (NTCM, 1991,s.25). NTCM považuje úlohu učiteľa vo výbere a implementácii matematických úloh za základnú a podstatnú.“ Analýzou a prispôsobením problému, predvídaním matematických postupov, ktoré môžu byť uvedené cez riešenie problému a predvídaním študentských otázok, môžu učitelia rozhodnúť, či im konkrétny problém pomôže dosiahnuť stanovené ciele pri vyučovaní matematiky v triede“ (NTCM,2000,s.53). Avšak výskumy ukazujú, že najviac otázok od učiteľov je uzavretých a vecných, a tak vo všeobecnosti matematické otázky učiteľov sú zamerané na memorovanie a dané postupy alebo na „otázky s nízkymi kognitívnymi požiadavkami“ (Henningsen a Stein, 1997). Navyše „otázky s vysokými kognitívnymi požiadavkami“ majú tendenciu byť počas rozprávania pokynov preformulované na menej náročné otázky.

Týmto sa dostávame k úlohe tvorenia otázok a problémov, ktorá nie je vôbec jednoduchá. **Problem - posing** (tvorba problémov) je považovaný za dôležitú zložku v charakteristike matematického myslenia (Kilpatrick, 1987). Problem – posing zahŕňa generovanie nových problémov a preformulovanie daných (známych) problémov. (Silver, 1994). V poslednom období je kladený dôraz na to, aby sme dali študentom príležitosť na tvorbu otázok v triede. Niektoré výskumy ukázali, že inštruktážne aktivity, v rámci ktorých študenti vytvárajú problémy, zlepšujú ich schopnosť riešiť problémy ako aj ich pozitívny postoj k matematike. Kvalita problémov, ktoré študenti vytvárajú závisí od položenej otázky. Z uvedeného vyplýva, že tvorba problémov je spojená aj s ich riešením. Brown, Walter (2005) vo svoje knihe Art of Problem Posing analyzovali vzťah medzi problem solvingom a problem posingom. Uvádzajú, že nie len výsledné riešenie problémov vedie k tvorbe problémov ale často podceňujeme význam čiastkových riešení bez vytvárania a analyzovania ďalších problémov a otázok. Riešenie problémov si často vyžaduje nejaké preformulovanie pôvodného problému, čo je v podstate činnosť tvorby problému. Riešenie problému nás niekedy nielenže dovedie k odpovedi na stanovený problém, ale nám taktiež môže pomôcť objaviť neočakávané črty a vlastnosti problému.

8.2 Projektové vyučovanie

Projektové vyučovanie je jednou z foriem výchovno – vzdelávacieho procesu. Myšlienky spojené s projektovým vyučovaním sú v dnešnej dobe z jedných najpreferovanejších. V každej škole sa vytvárajú projekty, ktoré sú nástrojom projektového vyučovania. Dôležité je ale to, aby projektové vyučovanie bolo vhodné začleniť do vyučovania a nie aby bolo ním nahradené celé vyučovanie. Jednostranne vedené vyučovanie by žiakov časom omrzelo a demotivovalo. Boli by znechutení a „prejedení" či už z klasického vyučovania alebo projektového vyučovania, alebo inej modernej formy výučby akou je napr. problémové vyučovanie, vyučovanie pomocou IKT, a iné. Preto je potrebné kombinovať rôzne druhy, metódy a spôsoby vyučovania. Predniesť žiakom niečo nové, no neprehåňať to s novinkami, aby sme ich prekvapili aj na ďalšej hodine. Obmieňať rôzne metódy, spôsoby výučby. Pre učiteľa je to veľmi náročné na čas, ale aj veľmi prínosné z hľadiska záujmu žiakov, ich motivácie, a radosti z učenia.

Projektové vyučovanie vzniklo, aby sa žiaci aktívne zapájali do výchovno - vzdelávacieho procesu. Slúži na potlačenie memorovania sa poučiek, má medzipredmetový charakter, ktorý napomáha k prelínaniu poznatkov z viacerých predmetov. Poskytuje možnosti pre experimentálnu a bádateľskú činnosť. Kognitívnym zámerom projektového vyučovania je podnietiť žiaka k tvorbe množstva nápadov, hľadať odpovede na otázky, riešiť problémy. Žiaci sú v projektovom vyučovaní svoji učitelia. Sú zvedaví, chcú vedieť čo najviac, vynárajú sa im otázky, na ktoré si sami hľadajú odpovede. Učia sa pomocou vlastného poznania, bádania a vlastnej práce. Ide o to, aby žiak aktívne spracúval podnety prírodného a sociálneho prostredia do svojho poznania. Na základe vlastnej aktivity odhaľoval vzťahy a pravidlá. Učiteľ je ako poradca, ktorý im radí a usmerňuje ich, akou cestou poznania sa majú vydať. Musí si byť vedomý, že predpoklady žiakov mladšieho školského veku sú iné ako u dospelých a nie vždy totožné so skutočnosťou, preto by mal počítať s prirodzeným detským myslením a akceptovať aj omyly, ktoré žiaci robia na ceste poznania. Žiak má teda právo objavovať nové s možnosťou omylu. Dôležité je to, aby žiak vedel, že za omyl tohto druhu nebude negatívne hodnotený. Bádateľská činnosť sa u žiakov mladšieho školského veku teší veľkej obľube, pretože im umožňuje pracovať samostatne, tvorivo a vlastným tempom.

V prírodovedných predmetoch a v matematike má projektové vyučovanie veľmi dobré uplatnenie a využitie. Žiaci sa učia súvislosti medzi javmi, zákonitosťami, vďaka ktorým lepšie pochopia prebranú látku, sú aktívni na hodinách a zapájajú sa. Samostatnou prácou a bádaním žiaci nadobúdajú skúsenosti, zručnosti a sebavzdelávanie seba, ale aj iných navôkol. Vďaka tomu, že na všetko prídu svojim uvažovaním, bádaním a pozorovaním, sa toho naučia omnoho viac akoby sedeli na hodine a dávali pozor. Pre žiakov sú dôležité skúsenosti, ktoré nadobudnú svojou prácou a v projektovom vyučovaní majú na to množstvo príležitostí.

Projektové vyučovanie, jeho myšlienky spojené s pedagogickými smermi, názormi, postupmi a metódami sa vytvárali niekoľko desaťročí. Táto forma vyučovania vznikla ako alternatíva k tradičnému vyučovaniu. Bol to výsledok dlhotrvajúcej nespokojnosti učiteľov a žiakov s tzv. **herbartovskou školou**. Išlo o spôsob výučby, ktorý sa považoval za základ učenia. Učitelia boli šťastní, keď žiaci ticho sedeli a dávali pozor. Naivne si mysleli, že keď sú žiaci ticho tak všetkému rozumejú, ale opak bol pravdou. Žiaci sa báli vysloviť čo i len nejakú otázku k danému učivu, čo ich zaujímalo, pretože vykríknutie z lavice sa mohlo chápať ako vyrušovanie. Žiak sa učil len tým, že ticho sedel, dával pozor a počúval výklad učiteľa. Základným nástrojom poznávania bolo slovo. Pričom sa nedbalo na to, ako žiak vykladanému učivu rozumie. Žiak a jeho aktivity boli zámerne potláčané, čo sa vysvetľovalo možnou stratou pozornosti žiaka. (Tomková a kol., 2009)

Projektové vyučovanie a jeho začiatky siahajú k predstaviteľom pragmatickej pedagogiky, ktorými sú *John Dewey* a *William Heard Kilpatrick.* Predstavitelia pragmatickej pedagogiky kritizovali tradičnú školu, tvrdili že učivo nie je spojené s realitou, že každý predmet je ako škatuľka, ktorá nemá žiaden súvis s iným predmetom (škatuľkou). *William Heard Kilpatrick*, bol prvým pedagógom, ktorý napísal ucelenú myšlienku o projektovom vyučovaní, v ktorej tvrdí, že: *„projektová metóda je cesta osvojenia si problému“.* (Petrášková, 2007)

Pri projektovom vyučovaní sa do popredia dostáva žiak a jeho záujmy - jeho aktívny záujem o získavanie čo najväčšieho počtu informácií k danému problému. ***„**Dewey tvrdí, že žiak tak isto ako dospelý jedinec môže na niečo nové prísť, niečo nové vytvoriť alebo niečomu porozumieť vtedy, pokiaľ má na to čas, chvíľku pre seba.“* (Kalhoust a kol., 2009)

Definovanie projektového vyučovania nie je jednotné. Niektorí autori pri zadefinovaní projektového vyučovania hovoria o projektovom vyučovaní ako o forme vzdelávania a poznania: *„Projektové vyučovanie ako jedna z foriem vzdelávania prináša oživenie školského vyučovania. Z hľadiska kognitívnych cieľov umožňuje prehlbovať a rozširovať poznanie, integrovať poznatky do uceleného systému poznania, rozvíjať tvorivé myslenie, uvedomovať si význam a zmysel poznávania. Edukačné a formatívne ciele spočívajú predovšetkým v rozvíjaní schopností a návykov.“* (Čipková, 2002)

Ďalší autori chápu projektové vyučovanie ako riešenie problémov. Napríklad Kalhoust (2009) tvrdí, že žiaci v projektovom vyučovaní spolupracujú medzi sebou, spoločne riešia rôzne problémy a taktiež rozvíjajú tvorivosť. Projektové vyučovanie vedie k zodpovednosti a k tolerancii samotných žiakov, ale aj žiaka a učiteľa. Z čoho vyplýva, že projektové vyučovanie má mravnú úroveň.

Iní autori, pri definovaní projektového vyučovaní vyzdvihujú rolu žiaka ako *„učiteľa“*. Do tejto kategórie môžeme zaradiť definície Tomkovej a Bajtoša ako aj Kubínovej: *„Projektové vyučovanie je úlohou žiaka, za ktorú preberá plnú zodpovednosť, priamo, logicky a systematicky smeruje od motivácie, mapovania, triedenia cez riešenie ku konkrétnemu produktu. Produkt určuje celkový proces a záverečný výsledok. Projektové vyučovanie môže vychádzať z jedného predmetu, ale obvykle integruje poznatky z rôznych predmetov.“* (Tomková a kol., 2009)

Projektové vyučovanie presnými slovami Zelinu (2009): *„je blízke životu, je vysoko motivujúce, učí žiakov hľadať informácie, selektovať ich a zvažovať ich význam pre riešenie problému, učí ich to navrhovať riešenia (často metódou braistormingu), čo trénuje aj fantáziu, imagináciu a predstavivosť žiakov, učí ich to komunikácii, vzájomnému rešpektu a napokon ich táto práca vedie aj k zodpovednosti*, *lebo obhajujú a dokazujú správnosť svojich návrhov*. *Celá práca je natoľko interiorizovaná, že je tu predpoklad zodpovednosti k nej, spolužiakom aj učiteľom.“* Čo znamená, že projektové vyučovanie je jedna z metód, ktorej výhody spočívajú najmä vo formovaní žiaka, jeho porozumení, zodpovednosti a samostatnosti

Z definícií projektového vyučovania vyplýva, že hlavnou zložkou projektového vyučovania sú žiaci. Žiaci sú zodpovední za svoje vzdelávanie, vďaka čomu sa učia pomocou nových poznatkov, na ktoré musia prísť vlastnou prácou a usilovnosťou. Sami musia skúmať problematiku z rôznych hľadísk. Pri skúmaní využívajú medzipredmetové vzťahy.

8.2.1 Charakteristika projektového vyučovania

Primárnou charakteristikou projektového vyučovania je aktívne zapájanie žiakov do vyučovacieho procesu. Projektové vyučovanie je sústredené na rolu žiaka. Žiak sa aktívne zapája do sebavzdelávacieho procesu s už vopred stanoveným cieľom. Cieľ v projektovom vyučovaní musí byť presne stanovený. Žiak by sa mal pridŕžať stanoveného cieľa, nemal by sa pri svojom sebavzdelávaní odkloniť od neho.

Snahou projektového vyučovania je prekonávanie nedostatkov bežného vyučovania, jeho izolovanosť, roztriešťenosť vedenia, odtrhnutie od životnej praxe, zmechanizovanie a strnulosť školskej práce, odcudzenie od záujmu detí, pamätné a jednostranné kognitívne učenie a nízka motivácia (Skalková, 2007).

Samotnú podstatu, zmysel projektového vyučovania a ciele projektového vyučovania vyjadrujú jeho základné princípy (Kasíková, 1993):

- ***prihliadať na potreby a záujmy žiakov*** (nové skúsenosti, potreby vlastnej realizácie, sebavzdelávanie sa žiakov) – dôležité je zabezpečiť, aby mali žiaci možnosť rozhodovať o konkrétnej podobe témy a samozrejme mali možnosť výberu témy,

- ***zreteľ na aktuálnu tému*** (otvorenie sa školy širokému okoliu, spoločenstvu, osobnej situácii žiaka a riešeniu jeho problémov) – umožniť spojenie školského a mimoškolského života žiaka,
- ***interdisciplinarita*** (celistvé poznanie problematiky) – prepojenie viacerých vyučovacích predmetov a vytváraní komplexného obrazu,
- ***sebaregulácia pri učení*** (žiak plánuje, realizuje a hodnotí projekt, čím sa učí ako sa má správne učiť) – vyvolať v žiakovi vnútorný záujem o nepoznané,
- ***orientácia na produkt*** (práca žiakov v projektovom vyučovaní prináša produkt, čím vyzdvihuje zmysel učenia)
- ***skupinová realizácia*** (učí spoluprácí medzi žiakmi) – prerozdelenie úlohy, navzájom medzi sebou komunikovať a učia sa počúvať jeden druhého.
- ***spoločenská relevantnosť***(spája školu so životom okolia)

Ciele projektového vyučovania môžeme definovať nasledovným spôsobom:

1. priblíženie školy k životu,
2. zmena systému osvojenia si nových poznatkov - pre žiaka neexistujú len zdroje poznatkov, akými sú učebnica a učiteľ, sú aj iné zdroje ako napr. knihy, internet,
3. zmena organizačných foriem vyučovania - z hľadiska miest a samostatnosti práce žiakov - limitovaný je len termín ukončenia projektu
4. identifikácia žiakov s učebnými cieľmi - prostredníctvom orientácie vyučovania na ich potreby a život. (Petrášková , 2007)

Kratochvílová (2006) triedi projekty podľa nasledujúcich hľadísk:

a) podľa navrhovateľa - pôvodcu projektu: spontánne žiacke - umelo pripravené učiteľom – kombinované,
b) podľa účelu projektu: problémové - konštruktívne - hodnotiace - smerujúce k estetickej skúsenosti - smerujúce k získaniu zručností (i sociálnych),

c) podľa dĺžky projektu: krátkodobé (maximálne jeden deň) - strednodobé (maximálne jeden týždeň) - dlhodobé (viac než jeden týždeň, menej než mesiac) - mimoriadne dlhodobé (viac než mesiac),
d) podľa miesta realizácie projektu: školný - domáci – kombinované,
e) podľa počtu zúčastnených žiakov: individuálne - spoločné (skupinové, triedne, ročníkové - medzitriedne, medzi ročníkové, celoškolské),
f) podľa informačných zdrojov projektu: voľné (informačný materiál si žiak zaobstaráva sám) - viazané (informačný materiál je žiakovi poskytnutý) - kombinované ,
g) podľa spôsobu organizácie: jednopredmetové - viacpredmetové v rámci jednej vzdelávacej oblasti - viacpredmetové v rámci viacerých vzdelávacích oblastí - nad predmetové rešpektujúce prierezové témy Rámcového vzdelávacieho programu pre základné vzdelávanie.

Projektové vyučovanie je rozdelené do krokov (etáp, fáz) na základe, ktorých postupujeme. Každá etapa projektového vyučovania je zameraná na rôznu problematiku, ktorá sa týka projektového vyučovania a jeho prevedenia. W.H. Kilpatricka rozdelil projektové vyučovanie do štyroch fáz (Kalhoust a kol., 2009):

1. ***fáza - zámer projektu -*** v tejto fáze sa rozpracováva zámer projektu (konkrétne predstavy o zmysle a prevedení projektu) a stanovujú sa ***ciele projektu***. Pri voľbe témy projektu musíme brať do úvahy, že musí súvisieť s učebnou látkou, pričom zasahuje do predmetu hlbšie. Je dôležité si stanoviť zámer projektu (ako sme už zdôraznili), ktorý by nám mal presne určiť, o čo v projekte pôjde.
2. ***fáza - spracovanie plánov -*** v tejto fáze si *zámer**y*** z prvej fázy *konkretizujeme do jednotlivých krokov*. *Spracovanie plánov* je potrebné pre *určenie času, ich prevedenia, miesta, účasti žiakov, potrebu rôznych pomôcok* a pod. Pri príprave projektového vyučovania sa musí prejaviť v dostatočnej miere kreativita učiteľa a žiakov. Učitelia sledujú plánovanie a môžu do určitej miery do toho zasahovať tým, že žiakov usmernia. Musia sledovať prácu žiakov, aby projekt bol realizovateľný a aby sa splnili stanovené ciele projektu.

3. ***fáza - prevedenie projektu -*** postup projektu je vopred naplánovaný. Nie je naplánovaný podrobne, aby bolo možné urobiť zmeny počas priebehu projektu. Učiteľ by nemal zasahovať do činností žiakov, mal by im pomáhať len v prípade nutnosti. Kontrolovať, konzultovať a usmerňovať žiakov.
4. ***fáza - vyhodnotenie projektu -*** na tejto fáza sa podieľajú žiaci, ale aj učiteľ spoločne. Táto fáza je taktiež akýmsi východiskom plánovania ďalších projektov.

Brestenská a kol. (in Sudzinová, J., 2016) upozorňujú, že aby bol školský projekt skutočne projektom, musí mať nasledovné znaky:

- samoorganizovanosť: žiaci si sami v skupine prácu plánujú a organizujú,
- zodpovednosť: žiaci sú zodpovední za svoj projekt, teda aj za svoje vzdelávanie, čím si posilňujú sebavedomie,
- orientácia na cieľ: zameranie sa na výsledok, orientácia na produkt (konkrétny, hmatateľný výsledok ľudskej činnosti, ktorý sa na záver hodnotí),
- medzipredmetovosť: prepojenie na realitu, viaceré predmety, vyžaduje si skúsenosti z rôznych oblastí,
- dôraz na praktickú činnosť: učenie sa vlastnou aktivitou,
- orientácia na záujmy zúčastnených: motivácia je základom – žiaci musia prijať projekt za svoj,
- situačný aspekt: projekt často vyplýva z určitých okolností a realizuje sa vzhľadom na okolnosti,
- sociálne učenie sa: veľa sociálnych interakcií medzi žiakmi a učiteľom, medzi žiakmi navzájom počas priebehu celého projektu.

Pri projektoch a ich realizácií v rámci vyučovania na školách je základnom úspechu dlhodobé plánovanie. Dôležité je stanovenie si cieľov projektu. Správne stanovenie cieľov projektu je predpokladom pre úspešnú realizáciu celého projektu. Pri nesprávnom určení cieľov alebo ich neúplnom stanovení, môže dôjsť k situácii, kedy žiaci riešia jednotlivé úlohy projektu bez toho, aby medzi nimi videli akúkoľvek spojitosť.

Projektové vyučovanie je veľmi ťažko realizovateľné bez podpory školy, komunikácie medzi učiteľmi a angažovanosti žiakov. Projekty zlepšujú celkovú atmosféru na škole. Umožňujú komunikáciu medzi žiakmi rôznych ročníkov a učiteľmi. Veľmi užitočné, ba priam potrebné je prepojenie školy so širokým okolím školy. (Valovičová, Jakabová a kol., 2012)

8.3 Objavné vyučovanie

Objavné vyučovanie (Inquiry Based Learning = IBL) je spôsob vyučovania orientovaný na žiaka. Je zameraný na obsah vzdelávania, stratégie a samostatné učenie sa. Počas vyučovacích hodín, do ktorých je objavné vyučovanie implementované, žiaci rozvíjajú vlastné výskumné otázky, skúmajú problémy samostatne alebo v skupinách, formulujú hypotézy, zbierajú údaje, interpretujú výsledky a diskutujú o nich. Vyučovanie matematiky prostredníctvom objavného vyučovania môžeme charakterizovať aj ako zapojenie žiakov do zámerného procesu diagnostikovania problémov, posudzovania experimentov, rozlišovania alternatív, plánovania skúmania, skúmania predpokladov, získavania informácií od odborníkov a formovania jasných argumentov.

Cieľom objavného vyučovania je podnietiť žiakov, aby si osvojili kritické myslenie, prístupy a metódy špeciálne zamerané na riešenie problémov a aby získali priame skúsenosti s vedeckým výskumom. Týmto chce objavné vyučovanie napomáhať pri prekonávaní problémov s vnútornou motiváciou žiakov.

Pri objavnom vyučovaní sú žiaci vyzývaní k tomu, aby pracovali ako matematici alebo vedci. Keď sú teda žiaci zapájaní do vyučovacej hodiny, na ktorej je realizované objavné vyučovanie, musia zapojiť nielen svoje predchádzajúce vedomosti, ale aj celú škálu procesov, ako je zjednodušovanie a štruktúrovanie komplexnejších problémov, systematické pozorovanie, meranie, triedenie, tvorba definícií, určovanie množstva, tvorba úsudkov, tvorba predpokladov, tvorba hypotéz, kontrola premenných, experimentovanie, vizualizácia, objavovanie vzťahov a prepojení a komunikácia. Objavné vyučovanie sa zameriava na vzdelávanie aj ako na sociálny proces. Žiaci pracujú v skupinách, rozhodujú o procesoch a navzájom si pomáhajú. Prostredníctvom diskusie sa učia aktívne sa navzájom počúvať, deliť sa o svoje názory, stavať na myšlienkach niekoho iného, zvažovať rôzne názory a perspektívy, a primerane skúmať rozpory medzi nimi. Dôraz je kladený na efektívne kladenie otázok učiteľom, na dostatočný čas na premyslenie si odpovede pre žiakov a na kladenie prevažne deduktívnych otázok (začínajúcich slovami: ako, ktoré, prečo) žiakmi, a nie len pozorovacích (začínajúcich slovami: kto, čo, kedy, kde).

Obr. 12 Procesy objavného vyučovania (*PRIMAS 2011c)*

Jaworski (2006) spája pojem objavovania s perspektívou vo vzdelávaní v matematike, ktorá sa zaoberá poznávaním z hľadiska aktívneho budovania poznatkov z matematiky. Objavovanie je v súlade s konštruktivistickým pohľadom na vedomosti a učenie sa: vyžaduje si aktivitu, ponúka výzvy na stimuláciu matematického myslenia a vytvára možnosti na kritické úvahy o matematickom chápaní. Prostredníctvom objavovania môžu žiaci presiahnuť použitie a aplikáciu algoritmov a pravidiel, rozvíjať chápanie všeobecných vzťahov v matematike a zaoberať sa problematickými aspektmi abstrakcie a formalizmu, čo je pre matematiku najdôležitejšie.

Wells (2001) charakterizuje objavovanie ako prístup, pri ktorom je podporované pýtanie sa, a to kedykoľvek počas vyučovacej hodiny a kýmkoľvek (žiakom, učiteľom). Rovnako dôležité sú odpovede na položené otázky, ktoré sa berú vážne a skúmajú sa tak starostlivo, ako to len okolnosti dovolia. Coffman (2009) považuje objavovanie za dôležité, pretože sa žiaci nielen naučia požadovanú informáciu a zapamätajú si ju, ale učia sa tiež tieto informácie aplikovať, aby mohli tvoriť zmysluplné otázky a tiež budovať svoje vlastné poznatky.

Najvýznamnejším dôvodom, prečo podporovať implementáciu objavného vyučovania do každodennej školskej praxe, je nesporný prínos tohto prístupu pre žiakov a ich učenie sa. Objavné vyučovanie matematiky má nasledujúce výhody:

- zlepšuje výsledky žiakov z matematiky, pričom kladie silný dôraz na žiakov s menšou sebadôverou a žiakov pochádzajúcich zo znevýhodneného prostredia;
- má pozitívny vplyv na prístup a motiváciu žiakov, matematiku považujú za zaujímavejšiu;
- žiaci si rýchlejšie a ľahšie zapamätajú a pochopia poznatky z matematiky;
- zvyšuje schopnosť žiakov využívať poznatky v nových situáciách a kontextoch (prenos poznatkov);
- poskytuje žiakom ďalšie príležitosti na rozvoj zručností, ako je napríklad práca v skupinách, skúsenosti s riešením otvorených problémov a iné schopnosti týkajúce sa medzipredmetových vzťahov;
- podporuje vyššiu úroveň rozumových zručností a rozvoj kľúčových kompetencií;
- umožňuje žiakom vyrovnanejšie a realistickejšie vnímať matematiku, jej podstatu a spôsob, akým je vytváraná a rozvíjaná;
- robí matematiku prístupnejšou pre všetkých.

Existuje však niekoľko rôznych faktorov, ktoré učitelia považujú za problematické pri implementácii objavného vyučovania do školskej praxe. Ku všetkým faktorom treba pristupovať s vážnosťou, aj keď v niektorých prípadoch sú to len „povšimnuté“ problémy. Rôzni autori rozlišujú tri skupiny problémov, ktoré vidia učitelia s realizáciou objavného vyučovania: (1) politické problémy (chýba podpora inovatívnych prístupov k vzdelávaniu od štátu, existuje medzera medzi vzdelávacím programom a realitou v školskej praxi, učitelia nemajú dostatočný prístup ku kurzom ďalšieho vzdelávania týkajúcim sa objavného vyučovania); (2) technické problémy (učitelia necítia podporu od školského prostredia, nemajú dostatok potrebných materiálov, majú obmedzený prístup k počítačom a do laboratórií); (3) kultúrne problémy (učitelia sa obávajú možných problémov s disciplínou, veľkých nárokov na ich prípravu na vyučovanie, vysokých požiadaviek, nedostatku vedomostí z konkrétnej témy, spôsobu hodnotenia). (Janečková, 2014).

Klasifikácia vyučovacích hodín

Rôzni autori vytvorili rozličné klasifikácie vyučovacích hodín, počas ktorých sa objavné vyučovanie realizuje. Líšia sa v závislosti od stupňa otvorenosti vyučovacej hodiny, ako aj od rozdelenia zodpovednosti medzi učiteľa a žiakov. Podľa práce Walkera (2007) spomenieme len dve rôzne klasifikácie, ktoré zostavili Tafoya a kol. (1980).

Vyučovacia hodina s prvkami objavného vyučovania			
Otvorená	**Riadená**	**Štruktúrovaná**	**Overovacie úlohy**
Žiaci rozhodnú o probléme, ktorý budú skúmať a aj o metóde, ktorú použijú na získanie odpovede.	Učiteľ stanoví problém, ale žiaci rozhodnú o metóde, ktorou problém vyriešia.	Učiteľ stanoví problém aj metódu, nie však výsledok.	Učiteľ prezradí žiakom riešenie problému, a potom im dá inštrukcie, ako majú vykonať experiment alebo praktickú prácu, aby odpoveď potvrdili.

Tab. 3 Klasifikácia vyučovacích hodín s prvkami objavného vyučovania (Tafoya a kol., 1980)

Poslednú kategóriu vyučovacích hodín nazvanú „overovacie úlohy" by sme mohli považovať za zdeformovaný prípad objavného vyučovania, ktorý vlastne nespĺňa základné charakteristiky objavného vyučovania.

Druhá klasifikácia je komplexnejšia, ale je zároveň aj prehľadnejšia a užitočnejšia. Jej autori vytvorili tabuľku, v ktorej je prehľad hlavných znakov situácií v objavnom vyučovaní. V závislosti od toho, kto – učiteľ alebo žiaci – nesie zodpovednosť za čo, predkladajú šesť úrovní objavovania. V nasledujúcej tabuľke (tab. 2), upravenej podľa Walkera (2007) je táto klasifikácia zhrnutá:

Úroveň objavovania	**Kladenie otázok**	**Plánovanie**	**Realizácia**	**Zhrnutie**		**Vedenie záznamu**	**Využitie**
			Uskutočnenie plánu	Analýza údajov	Tvorba záverov		
0	Učiteľ	Učiteľ	Učiteľ	Učiteľ	Učiteľ	Učiteľ	Učiteľ
1	Učiteľ	Učiteľ	Žiaci/ Učiteľ	Učiteľ	Učiteľ	Žiaci	Učiteľ
2	Učiteľ	Učiteľ	Žiaci	Žiaci/ Učiteľ	Žiaci/ Učiteľ	Žiaci	Učiteľ
3	Učiteľ	Žiaci/ Učiteľ	Žiaci	Žiaci	Žiaci	Žiaci	Žiaci
4	Žiaci/ Učiteľ	Žiaci	Žiaci	Žiaci	Žiaci	Žiaci	Žiaci

5	Žiaci	Žiaci	Žiaci	Žiaci	Žiaci	Žiaci	Žiaci

Tab. 4 Úroveň objavovania počas vyučovacích hodín s prvkami objavného vyučovania (Fradd a kol., 2001)

Úloha učiteľa

Pri realizácii objavného vyučovania je kľúčovým elementom v triede učiteľ, ktorý by mal podporovať účasť svojich žiakov v procese objavovania a zapájať ich do budovania vlastných poznatkov. Podľa Stipeka a kol. (2001) je objavné vyučovanie na hodinách matematiky pre učiteľa pomerne náročné, pretože vyžaduje značnú mieru vedomostí z matematiky. Učiteľ musí diagnostikovať koncepty, ktoré sú základom reakcií žiakov alebo stratégií na riešenie problémov a reagovať na ne príslušnou učebnou oporou. Objavné vyučovanie tiež vyžaduje u učiteľa vysokú úroveň sebadôvery, pretože učitelia sa nemôžu spoliehať na učebnice.

Žiaci preberajú istú časť kontroly nad vyučovacím procesom, učiteľ sa stavia do roly poradcu a facilitátora. Jeho úlohou je vybrať vhodné situácie a problémy pre žiakov, objasniť zámer aktivít prebiehajúcich na vyučovacej hodine, vyzývať žiakov efektívnym kladením otázok, efektívne viesť diskusie v menších skupinách a v rámci celej triedy. Musí neustále podporovať žiakov pri skúmaní a výmene myšlienok vo voľnej a reflexívnej atmosfére, pomáhať im spracovať informácie a nájsť prepojenia medzi ich myšlienkami, podporovať diskusiu o alternatívnych metódach a chápaní. Usilujú sa odstrániť strach zo zlyhania tým, že považujú chyby za príležitosti na učenie sa, a nie za problémy, ktorým sa treba vyhýbať. (Janečková, 2014)

Zoznam použitej literatúry

ARNON, I. et al., 2014. *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer. 265 p. ISBN 978-1461479659

BART, W.M, YUZAWA, Ma., YUZAWA, Mi., 2008. Development of mathematical reasoning among young children. In SACHARO, O. N., SPODEK, B. *Contemporary perspectives on mathematics in early Childhood Education*. Charlotte: Information Age Publishing Inc., 2008, p. 157-185. ISBN 978-1-59311-637-8.

BROWN, S.I., Walter, M.I., 2005. *The Art of Problem Posing*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers, New Jersey 2005.

CASE, R., 1985. *Intellectul development: Birth and adulthood*. New York: Academic Press. 1985. 460 p. ISBN 978-0121628802.

CLEMENTS, D., BATTISTA, M., 1992. Geometry and spatial reasoning. In GROUWS, D., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan Publishing Co., 1992.

CLEMENTS, D., SARAMA J., Di BIASE, A.M., 2004. *Engaging young children in mathematic: Standards for early childhood education*. 1st ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc,. 2004. 474 p. ISBN 0-8058-4534-8.

COFFMAN, T. 2009. *Engaging Students through Inquiry-oriented Learning and Technology*. Lanham : Rowman & Littlefield Education, 2009. 160 s. ISBN 978-1-60709-069-4.

CRESPO S., 2003. Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teacher´s practices, in *Educational Studies in Mathematic*s, 52, Kluwer Academic Publishers, Netherland.

ČÁP, J., MAREŠ, J., 2001. *Psychologie pro učitele*. 2.vyd.Praha, Portál, 2001. 656 s. ISBN 978-80-7367-273-7.

ČERETKOVÁ, S., ŠEDIVÝ, O., 2005. *Aktuálne problémy teórie vyučovania matematiky*. FPV v Nitre, 2005.

ČIPKOVÁ, E., MELIŠOVÁ, K., KAROLČÍK, Š. 2002. *Projektové vyučovanie*. Bratislava: Prírodovedecká fakulta UK, 2002. [cit.2013-25-06]. Dostupné na internete: www.infovek.sk/predmety/biologia/clanky/projektove_vyucovanie.pdf

DEWEY, J., 1932. *Demokracie a výchova*. Praha : Laichter.

DUBINSKY, E., McDONALD, M. A., 2001. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., Hillel, J., Niss, M., Schoenfeld, A. (eds) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. New ICMI Study Series, vol 7. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

FONTANA, D., 2003. *Psychologie ve školní praxi*. 2.vyd. Praha: Portál, 2003. 384 s. ISBN 80-7178-626-8.

FURTH, H. G., WACHS, H., 1975. *Thinking goes to schol: Piaget´s theory in practice*. Oxford: Oxford University Press, 1975.

FRADD, S.H., LEE, O., SUTMAN, F.X., SAXTON, M.K., 2001. Promoting science literacy with English language learners through instructional material development: A case study. In *Billingual Research Journal*, 2001, 25(4), s. 417-439.

FRYDMAN,O., BRYANT, P., 1988. Sharing and the understanding of number equivalence by young children. In Cognitive development, 1988, vol.3, p. 323-339.

GEDDES, D., FORTUNATO, I., 1993. Geometry: Research and Classroom Activities. In D. T. OWENS, ed. *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*. New York: Macmillan PublishingCo, 1993, p.199-222.

GRAY, E., TALL, D., 1994. Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26(2), s. 115-141.

HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N., 1999. *Číselné představy dětí*. Praha: PFUK, 1999. ISBN 80-86039-98-6.

HEJNÝ,M., KUŘINA, F., 2001. *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál. 192 s. ISBN 80-7178-581-4.

HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N., 2004. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: PedF UK. 455 s. ISBN 80-7290-189-3.

HERR, T., JOHNSON, K.,2001. Problem solving strategies: Crossing the river with dogs and other mathematical adventures. Key Curriculum Press, 2001.

HOPKINS,CH., POPE, S., PEPPERELL, S., 2004. *Understanding Primary Mathematics*. London: David Fulton Publisher, 256 p. ISBN 1-84312-012-7.

HUGHES, M., 1984. *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Blackwell Publishing, 195 p. ISBN 0-631-13581-2.

JAKABČIC, I., 2002. *Základy vývinovej psychológie*. 1. vyd. Bratislava: Iris, 2002. 83 s. ISBN 80-89018-34-3.

JANČAŘÍK, A., 2013. *Vybrané teórie učení a jejich projekce do využívaní ITC ve výuce matematiky*. Praha: PedF UK. 186s. ISBN 978-80-7290-766-3.

JANEČKOVÁ, M., 2014. *Objavné vyučovanie matematiky*, dizertačná práca. UKF, Nitra.

JAWORSKI, B. 2006. Theory and Practice in Mathematics Teaching Development: Critical Inquiry as a Mode of Learning in Teaching. In *Journal of Mathematics Teacher Education*, Apríl 2006, 9(2), s. 187-211.

KALHOUST, Z.,OBST, O. a kol., 2002. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002, 448s.. ISBN 978-80-7367- 571-4.

KASÍKOVA, H., 1993. Nastal v naší škole čas projektu? In: P*ohledy. Projektová metoda ve škole i za školou*, 1993, 1. vyd, s. 8-9. Praha: IPOS ARTAMA. ISBN 80-7068-066-0.

KERN, H. et al., 1999. *Přehled psychologie*. Praha: Portál. 286s. ISBN 80-7367-121-2.

KILPATRICK, J., 1987. Problem formulating: Where do good problems come from? *Cognitive science and mathematics education*, 1987, 123-147.

KOLCZYNSKA, E. G., 2009. Detské matematické myslenie: teória- diagnóza-interpretácia. In SWOBODA, E., GUNČAGA, J. *Dieťa a matematika*. Ružomberok: Pedagogická fakulta KU, 2009, s. 82-103. ISBN 978-80-8084-455-4.

KOPKA, J., 1999. Hrozny problémů ve školské matematice. Univerzita JE Purkyně, 1999.

KRATOCHVÍLOVÁ, J., 2006. Teorie a praxe projektové výuky. Brno: Masarikova Univerzita Brno, 2006. 160 s. ISBN 80-210-4142-0.

LESTER, F. K., 1985. Methodological considerations in research on mathematical problem solving instruction. In Silver, E.A. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum. 1985.

LEHRER, R. , JENKINS, M., OSANA, H., 1998. Longitudinal study of children´s reasoning about space and geometry. In LEHRER, R., CHAZAN, D. ed. *Designing learning enviroment for developing understanding of geometry and space*. Hillsdale: Erlabaum, 1998, p.137-167. ISBN 0-8058-1949-5.

MASON, M., 2009. The van Hiele levels of geometric understanding. [online] In Professional Handbook for Teachers, Geometry: explorations and applications, Colección Digital Eudoxus, 2009, p.4-9.[cit.2023-04-30]. Dostupné na internete:

<http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/96/91>.

MOLNÁR, J., SCHUBERTOVÁ, S., VANĚK, V., 2008. *Konstruktivizmus ve vyučování matematice.* Olomouc: PrF UP. 80s. ISBN 978-80-244-1883-4.

Mc ANELLY, N., 2011. Beyond the geometry: discovering how geometric thinking develops. [online]. NTCM, Indianapolis, In april1 4, 2011.[cit.2023-04-30]. Dostupné na internete: <http://www.cain.lsu.edu/sites/all/pdf/vanHieleLevelsOfGeometricThought_McAnelly.pdf>.

NABB, K. A. , 2010. Question 1, Dostupné online https://static1.squarespace.com/static/596f7760c534a5c5442ea41e/t/59711416197aea98ce28fc42/1500582936451/QE+1+AMT+Nabb.pdf

PAVLOVIČOVÁ, G., 2012. *Niektoré kľúčové názory na rozvoj matematických predstáv*. Nitra: UKF, Prírodovedec č.511, 82. ISBN 978-80-558-0127-8 .

PANTZIARA, M. C., PHILIPPOU, G., 2012. Levels of students' conception of fractions. *Educational Studies in Mathematics*. 79 (1), s. 61-83.

PENROSE, R., 1995. *Shadows on the mind: a search for the missing science of consciousness*. London: Vintage, 1995. 457 p. ISBN 0-0995-8211-2.

PETRÁŠKOVÁ,E., 2007. Projektové vyučovanie. Prešov: Metodicko Pedagogické centrum, 87 s. ISBN 978-80-8045-463-0.

PIAGET, J., INHELDEROVÁ,B., SZEMINSKA, A., 1960. *The child conception of geometry*. London: Routledge & Kegan Paul.

PIAGET, J., 1985. *The equilibrium of cognitive structures. Cambridge*, MA: Harvard University Press.

PIAGET, J., INHELDEROVÁ,G., 2007. *Psychologie dítěte*. 5. vyd. Praha: Portál, 144s. ISBN 978-80-7367-263-8.

PÓLYA, G., 1962. *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*, roč. 1, Stanford University.

PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J., 2003. Pedagogický slovník. 4. aktualizované vydání. Praha: Portál, 322 s. ISBN 80-7178-772-8.

SAXE, G. B., POSNER, J., 1983. The development of numerical cognition : cross – cultural perspectives. In GINSBURG, H. *The development of mathematical thinking*. London: Academic Press, 1983, p.291-317. [cit.2023-06-01]. Dostupné na internete: <http://www.culturecognition.com/sites/default/files/Saxe%20%26%20Posner.pdf>

SFARD, A., 1991. On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics.* roč. 22, s. 1–36. ISSN: 1573-0816.

SHIRVANI, A., LANDMAN, W. A., 2016. Seasonal precipitation forecast skill over Iran. *International Journal of Climatology*. 36(4), 1887-1900.

SHIPLEY, E., SHEPPERSON, B., 1990. Countable entities: Develomental changes. In *Cognition*, 1990, vol.34, p.109-136.

SILVER, E. A., 1994. On mathematical problem posing. For the learning of mathematics, 1994, 14.1: 19-28.

SKALKOVÁ, J., 2007. Obecná didaktika. Praha: Grada Publishing. 2007, 328 s. ISBN 978-80-247-1821-7.

STERNBERG, R. J., 2002. *Kognitivní psychologie*. 1. vyd.. Praha: Portál, 2002. 640s. ISBN 80-7178-376-5.

STIPEK, D.J., GIVVIN, K.B., SALMON, J.M., MacGYVERS, V.L., 2001. Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. In *Teaching and Teacher Education*, 2001, 17, s. 213-226.

SUDZINOVÁ, J., 2016. Inovatívne metódy vo výučbe predmetu tvorba projektov osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe – výťah. In Pedagogické rozhľady. [online] 2016, č.1, s. 30 [cit. 2023.1.19.] Dostupné na internete: ISSN 1335-0404

TAFOYA, E., SUNAL, D., KNECHT, P., 1980. Assessing inquiry potential: a tool for curriculum decision makers. In *School Science and mathematics*, 1980, 80, s. 43-48.

TUREK, I., 2008. *Didaktika*, Iura Edition, Bratislava 2008.

VALOVIČOVÁ, Ľ., JAKABOVÁ, S. a kol., 2012. Prírodovedné vzdelávanie formou projektového vyučovania. Nitra: FPV UKF, 2012, 193 s. ISBN 978-80-8094-912-9.

VAN DE WALLE, J. A., KARP, K. S.; BAY-WILLIAMS, J. M., 2015. *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Pearson, 2015.

VONDROVÁ, N., 2019. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládaní kritických míst v matematice*. Praha: PedF UK. 258 s. ISBN 978-80-7603-109-8.

VYGOTSKIJ, L. S., 1970. *Myšlení a řeč*. Praha: SPN.
WALKER, M. 2007. *Teaching Inquiry-based Science*. Morrisville : Lulu.com, 2007. 160 s. 978-1-84799-932-0

WELLS, G., 2001. Action, talk, and text: Learning and teaching through inquiry. New York: Teachers College Press, 2001. 231 s. ISBN 978-0-8077-4014-9

YUZAWA, M., BART, W., 2002. Young children´s learning of size comparison strategies: Effect of orgiami exercises. In *The journal of genetic psychology*, 2002, vol.163, p.459-478.

Názov: **Úvod do didaktiky matematiky pre rozširujúce štúdium**

Autori: Gabriela Pavlovičová

Vydavateľ: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Edícia: Prírodovedec č. 823

Formát: A5

Rok vydania: 2023

Miesto vydania: Nitra

Počet strán: 80

Počet kusov: 100

ISBN 978-80-558-2057-6

9 788055 820576