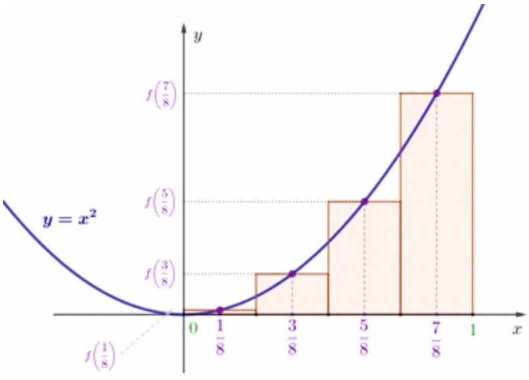
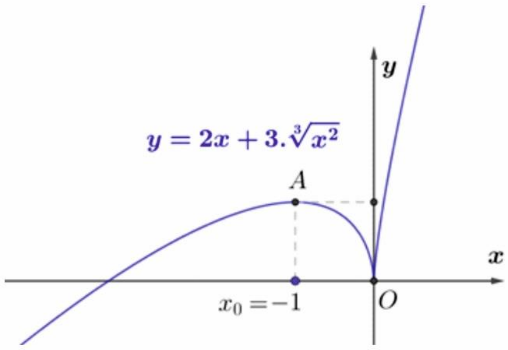
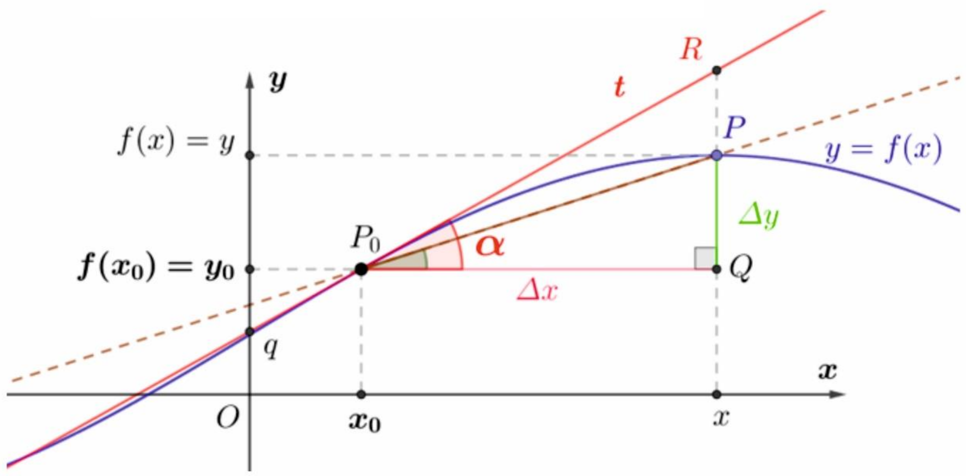




Matematická analýza pre učiteľov – rozširujúce štúdium

Diferenciálny a integrálny počet



Dušan Vallo

Nitra 2023

Matematická analýza pre učiteľov – rozširujúce štúdium

Diferenciálny a integrálny počet

Edícia Prírodovedec č. 820

Autor:
doc. RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Recenzenti:
Dr. h. c. prof. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, PhD.
Ing. RNDr. Janka Drábeková, PhD.

Publikácie je podporená z projektu 001UKF-2-1/2022 Zvyšovanie kvality prípravy budúcich učiteľov matematiky, fyziky, chémie, informatiky, anglického jazyka, slovenského jazyka a techniky formou doplňujúceho pedagogického štúdia a rozširujúceho štúdia na UKF v Nitre.

ISBN 978-80-558-2042-2

9 788055 820422

Obsah

Krátke slovo na úvod ....

Matematická analýza je matematická disciplína, ktorá sa venuje štúdiu funkcií, ich vlastností a aplikáciám v rôznych matematických odboroch, ako aj v prírodných vedách (fyzika, chémia, ...). Má veľmi široké použitie a tomu zodpovedá aj rozsah teórie, ktorú v sebe zahŕňa.

Táto vysokoškolská učebnica sa sústreďuje na základy - úvod do štúdia diferenciálneho a integrálneho počtu. Obsahovo je text cielene orientovaný na potreby frekventantov rozširujúceho štúdia matematiky na FPVaI UKF v Nitre, ktorí si rozširujú svoju učiteľskú kvalifikáciu v kurzoch ďalšieho vzdelávania.

Z racionálnych dôvodov nie je možné v jednom semestrálnom kurze podať úplný výklad teórie, ktorý by bol plnohodnotne doplnený všetkými dôkazmi uvedených viet a ich dôsledkov, ako aj ilustračnými príkladmi a inými hodnotnými detailmi. Koncepcia učebnice však umožňuje pokračovať samostatným štúdiom literatúry, je doplnená o názorné obrázky, mnohé riešené príklady a cvičenia.

Treba však zdôrazniť, že dôležitými predpokladmi úspešného štúdia sú tri faktory:

a) mať dobre zvládnuté **stredoškolské základy matematiky**. Tie je možné prípadne doplniť samoštúdiom príslušnej literatúry, ako napr. [1], [2] alebo [3],

b) učiť sa vždy **názorne** a vytvárať si konkrétne predstavy spojené s učivom. Odporúčame pri každej príležitosti používať vhodný geometrický/matematický softvér, ktorý dokáže znázorňovať jednotlivé funkcie, ich derivácie a pod. V tomto smere sa možno orientovať na literatúru [14], prípadne [15].

c) **byť vytrvalý a mať zodpovedný prístup** k štúdiu, ktorý vyžaduje detailné preštudovanie a porozumenie obsahu definícii a viet, ako aj samostatné pre-riešenie príkladov a cvičení.

Na záver – verím, že publikácia bude dobrým pomocníkom pri štúdiu základov matematickej analýzy.

V Nitre, 26. júna 2023. Autor

1 Postupnosti

S postupnosťami sa stretávame každodenne. Typickým príkladom zo života sú dni v týždni nasledujúce za sebou alebo mesiace v kalendárnom roku. Postupnosti majú svoj názov (týždeň, rok) a spôsob zápisu, napr.:

týždeň:= pondelok, utorok, streda, štvrtok, piatok, sobota, nedeľa

rok: = január, február, marec, ..., november, december

V matematike sa zaoberáme **číselnými postupnosťami** (ich prvky sú reálne čísla). Môžu byť konečné alebo aj nekonečné, napr.

$$(a_n)_{n=1}^{6} := \ (1, -1, 1, -1, 1, -1)$$

$$(b_k)_{k=2}^{n} := (\ 2, 3, \dots, n)$$

$$(c_n)_{n=1}^{\infty} := \ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

$$(d_n)_{n=1}^{\infty} := \left(\ \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}\ , \dots\right)$$

Definujme pojem postupnosti exaktne.

Definícia *Každé zobrazenie množiny prirodzených čísel N do množiny reálnych čísel R nazývame postupnosťou reálnych čísel.*

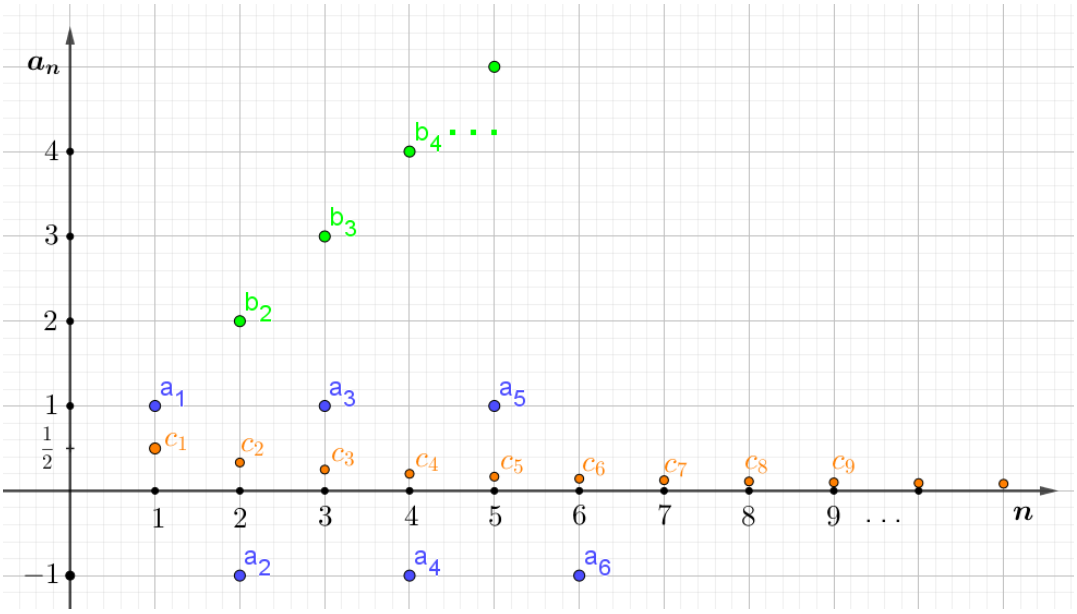
Zobrazenie v matematike zapisujeme pomocou jeho označenia a množín, zvyčajne v tvare:

$$f: N \to R.$$

Zápis $f: N \to R$ znamená, že existuje (je nám známe) isté pravidlo f, ktoré prirodzenému číslu n určí nejakú hodnotu – reálne číslo, napr.

$$f(n) = a_n\ .$$

Z praktických dôvodov pri postupnostiach používame jednoduchší zápis, napr. $(a_n)_{n=1}^{6}$, ..., $(c_n)_{n=1}^{\infty}$. Kvôli názornosti zobrazujeme postupnosti aj graficky, pričom indexujeme jednotlivé členy postupností[1].



Obr. 1

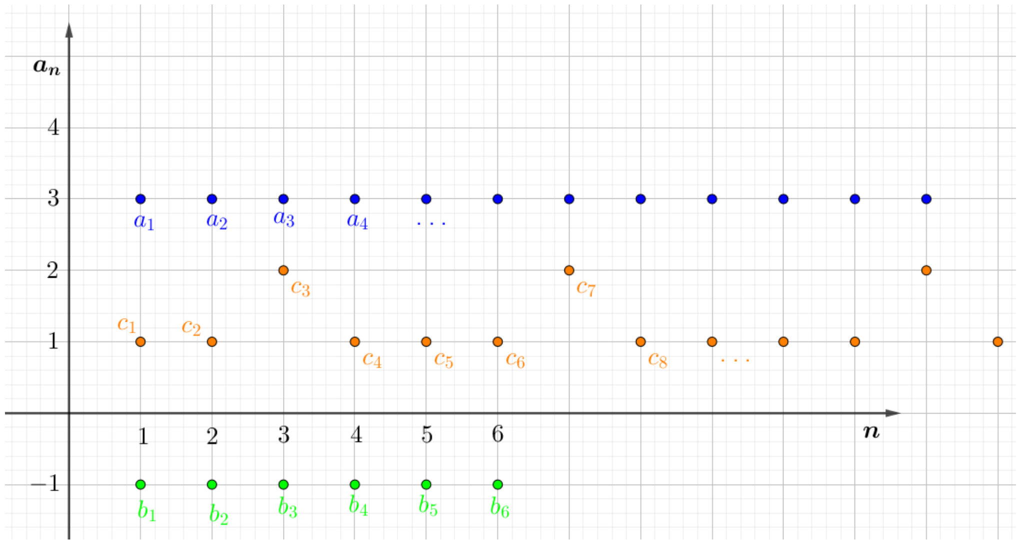
[1] Pochopiteľne, ak ide o nekonečné postupnosti, tak graficky znázorňujeme len istý (konečný) počet členov. V texte občas napíšeme, že graf je „naznačený na obr. “.

Definícia Hovoríme, že postupnosť (konečná alebo nekonečná) je ***konštantná***, ak jej ľubovoľné dva členy sa navzájom rovnajú.*

Na obr. 2 sú konštantné postupnosti

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} := (3,3,3,3,\dots)\ ; \qquad (b_n)_{n=1}^{6} := (-1,-1,-1,-1,-1,-1).$$

Postupnosť $(c_n)_{n=1}^{\infty} := (1,1,2,1,1,1,2,1,\dots)$, nie je konštantná, pretože existujú aspoň dva jej členy, ktoré sa nerovnajú (napr. $c_2 \neq c_3$).



Obr. 2

Definícia *Hovoríme, že postupnosť je **zdola ohraničená**, ak <u>existuje</u> reálne číslo d také, že ľubovoľný člen postupnosti je väčší alebo rovný číslu d. Hovoríme, že reálne číslo d je **dolným ohraničením** postupnosti.*

Definícia *Hovoríme, že postupnosť je **zhora ohraničená**, ak <u>existuje</u> reálne číslo h také, že ľubovoľný člen postupnosti je menší alebo rovný číslu h. Hovoríme, že reálne číslo h je **horným ohraničením** postupnosti.*

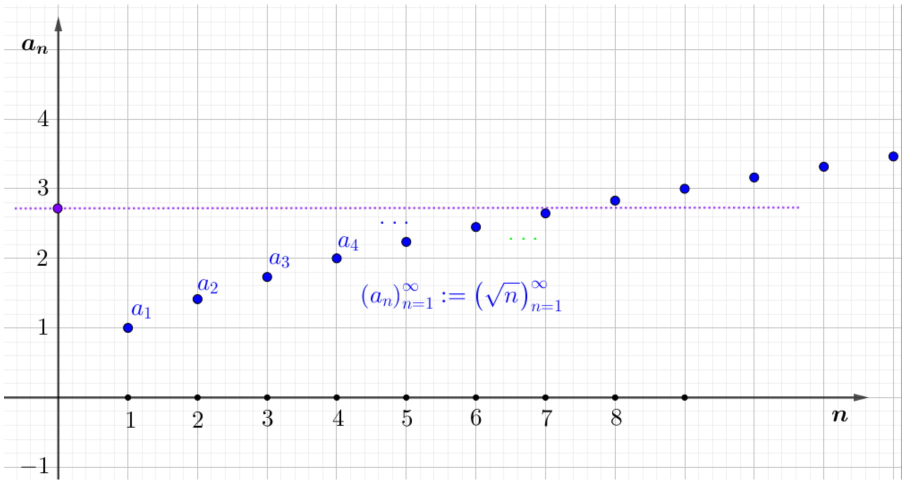
Obe definície uvádzajú, že musí <u>existovať</u> reálne číslo – to nemusí byť jediné.

Na obr. 3 je znázornený graf postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} := \left(\sqrt{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, ktorá je ohraničená zdola, napr. pre $d = 0$. V tomto prípade je dolným ohraničením každé reálne číslo d, pre ktoré platí $d \leq 1$.

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} := \left(\sqrt{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zhora.
Dôvod: ak si zvolíme ľubovoľné $h \in R$, vždy nájdeme také $n \in N$, pre ktoré $\sqrt{n} > h$, (napr. na obr. 3 pre zvolené $h = 2{,}72$ stačí položiť $n = 8$). Z toho vyplýva, že neexistuje horné ohraničenie danej postupnosti, postupnosť nie je zhora ohraničená.

Existujú však postupnosti, ktoré majú dolné i horné ohraničenie.

Na obr. 1 je postupnosť $(c_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zhora, napr. $h = 1$ a tiež je ohraničená zdola, napr. $d = 0$.



Obr. 3

Definícia *Hovoríme, že postupnosť je* ***ohraničená****, ak je ohraničená zhora a* ***súčasne*** *je ohraničená aj zdola.*

Príkladom ohraničenej postupnosti je aj konštantná postupnosť.

1.1 Aritmetická postupnosť a geometrická postupnosť – poznámka

Aritmetická postupnosť a geometrická postupnosť sú osobitné typy číselných postupností[2].

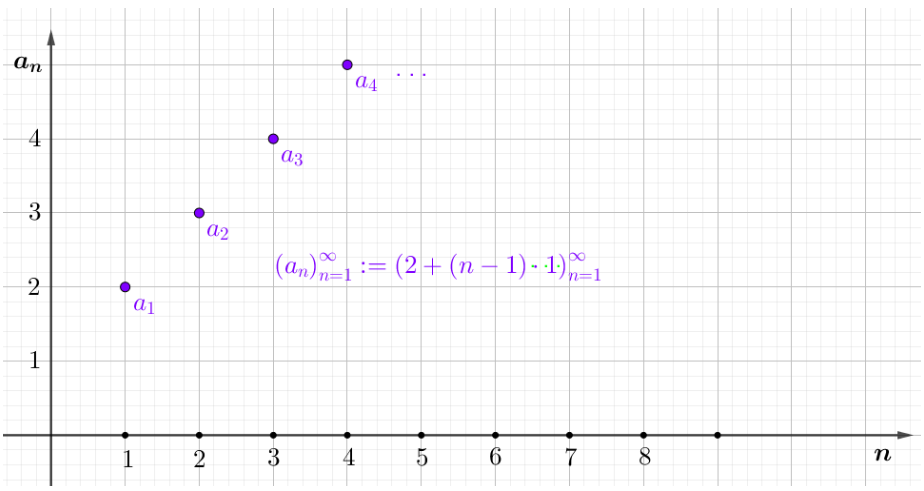
Definícia *Hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je* ***aritmetická****, ak pre každé* $n \in N$ *platí*

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

Reálne číslo d *nazývame* ***diferenciou*** *aritmetickej postupnosti.*

Aritmetická postupnosť má vlastnosť, že rozdiel dvoch po sebe nasledujúcich členov sa vždy rovná absolútnej hodnote diferencii d.

Príkladom aritmetickej postupnosti je $(a_n)_{n=1}^{\infty} := (2 + (n-1).1)_{n=1}^{\infty}$, kde $d = 1$, $a_1 = 2$. Graf je naznačený na obr. 4.



Obr. 4

[2] Učivo o vlastnostiach aritmetickej postupnosti (aj geometrickej postupnosti) nie je obsahom ŠVP, ale je obsiahnuté v požiadavkách na maturitu z matematiky.

Ak znakom s_n označíme súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti, t.j.

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \ ,$$

potom platí $$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Definícia *Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **geometrická**, ak pre každé $n \in N$ platí*

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

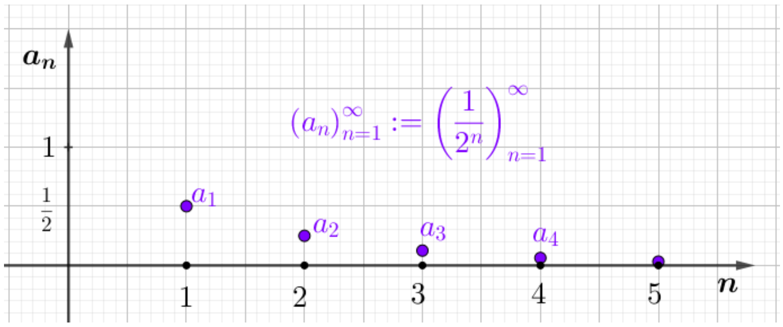
*Reálne číslo q nazývame **kvocientom** geometrickej postupnosti.*

Na obr. 5 je naznačený graf geometrickej postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} := \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$, kde $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$.

Ak znakom s_n označíme súčet prvých n členov geometrickej postupnosti s $q \neq 1$, t.j.

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \ ,$$

potom platí $$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$



Obr. 5

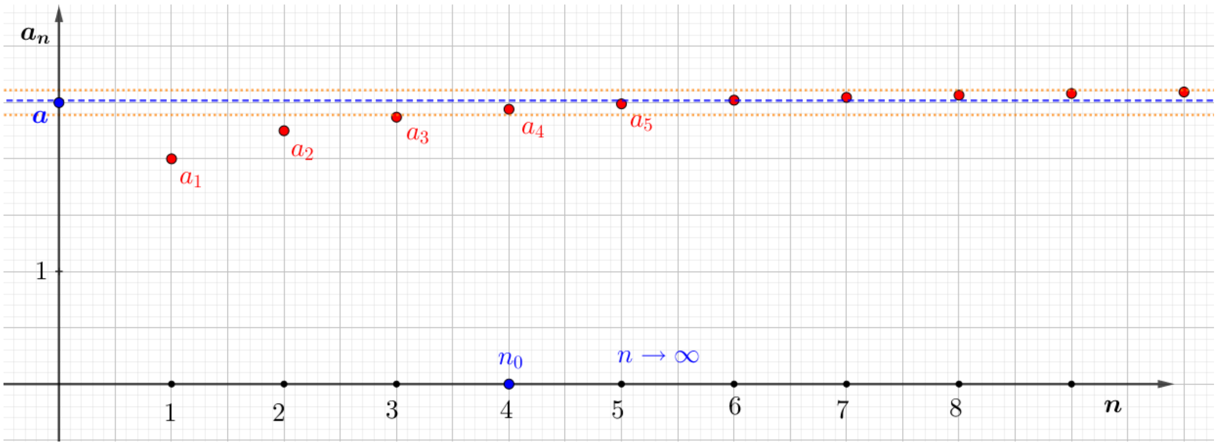
1.2 Definícia limity postupnosti

Limita postupnosti je dôležitým pojmom, ktorý si najprv názorne priblížime.

Na obr. 5 naznačený graf postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} := \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ má tú vlastnosť, že jednotlivé členy postupnosti $a_n, n = 1,2,3, \dots$ s „rastúcim" indexom nadobúdajú „menšie a menšie hodnoty", čím sa „približujú" k hodnote 0. Zapísali by sme, že pre $n \to \infty$ platí $a_n \to 0$.

Uvažujme všeobecne.

Ak sa členy a_n postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pre $n \to \infty$ „približujú" k reálnemu číslu a, potom hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu pre n idúce do nekonečna, ktorá sa rovná číslu a. Definujme tento intuitívny pojem limity presne!



Obr. 6

Definícia *Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** vtedy a len vtedy, keď existuje také reálne číslo **a**, že pre každé kladné reálne číslo ε existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre všetky prirodzené čísla n väčšie ako n_0 platí* $|a_n - a| < \varepsilon.$

Zapisujeme[3] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon \in R^+, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon$

Vysvetlime si geometrickú podstatu definície na obr. 6.

Nech máme danú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

a) V definícii sa uvádza, že pre **každé** kladné reálne číslo ε **existuje** prirodzené číslo n_0.
Formulácia **každé** kladné reálne číslo ε dovoľuje, aby sme za číslo ε položili ľubovoľnú, ale kladnú hodnotu (napr. $\varepsilon = 0{,}11$).

b) Ďalej, výraz $|a_n - a| < \varepsilon$ znamená, že vzdialenosť člena a_n danej postupnosti od čísla a je menšia ako hodnota určená číslom ε.
Geometricky to znázorníme ako pás rovnobežiek so šírkou 2ε, ktorého osou je priamka prechádzajúca cez bod a.

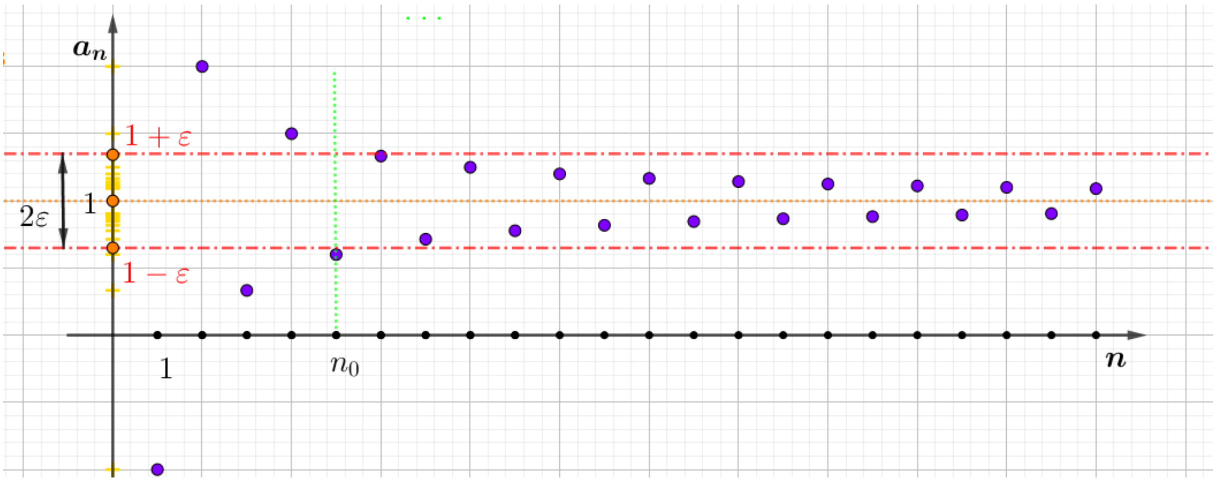
c) Následne skúmame, či nájdeme vhodné číslo n_0 také, že všetky body grafu postupnosti, ktorých členy a_n s indexom n väčším ako n_0 (*všetky prirodzené čísla n väčšie ako n_0*) už budú ležať v páse „okolo hodnoty a“ . Šírka pásu bola vopred stanovená podľa hodnoty ε .

Na obr. 6 sme nastavili hodnotu $\varepsilon = 0{,}11$, zostrojili pás rovnobežiek a podľa grafu naznačili, že pre každé $n > n_0 = 4$, **každý** bod grafu člena postupnosti s indexom $n \geq 5$, t.j. $a_5, a_6, a_7, \dots, a_n, \dots$, sa „**bude nachádzať“** vo vyznačenom páse.

Príklad Ukážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n.2}{n}\right) = 1.$

Riešenie. Naznačíme graf danej postupnosti, limitnú hodnotu $a = 1$ a pás rovnobežiek šírky 2ε.

[3] O postupnosti, ktorá má limitu ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), niekedy hovoríme, že **konverguje**, resp., že je **konvergentná**.



Obr. 7

Počítajme.

$$|a_n - a| = \left|1 - \frac{(-1)^n.2}{n} - 1\right| = \left|-\frac{(-1)^n.2}{n}\right| = \frac{2}{n}$$

Ak ε je konkrétne zvolená hodnota, potom $|a_n - a| = \frac{2}{n} < \varepsilon$. Z toho vyplýva, že $\frac{2}{\varepsilon} < n_0$. Ak uvažujeme členy postupnosti a_n s indexom $n > n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, potom všetky body grafu postupnosti už ležia vo vyznačenom páse a platí $|a_n - a| = \left|1 - \frac{(-1)^n.2}{n} - 1\right| = \left|-\frac{(-1)^n.2}{n}\right| = \left|\frac{2}{n}\right| < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

Napr. na obr. 7 sú znázornené pre $\varepsilon = 0{,}35$ všetky body grafu postupnosti pre index $n > 5$.

Interpretujme definíciu limitu postupnosti ešte inak!

Ak postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu a, potom členy postupnosti a_n **s indexom n väčším ako n_0** už ležia v danom páse šírky 2ε, ktorého os je priamka $y = a$. Z toho vyplýva, že:

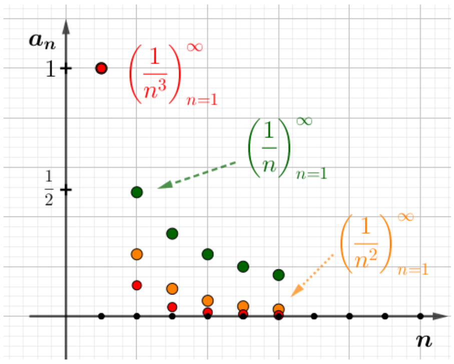
a) pre každé $n > n_0$ platí: $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.
Otvorený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pre $\varepsilon > 0$, nazývame **okolím bodu** a, číslo ε nazývame **polomer okolia** bodu a. Zapisujeme ako $U_\varepsilon(a)$.

b) Ak má postupnosť limitu rovnajúcu sa a, v okolí bodu a leží **nekonečne** mnoho členov postupnosti[4]. Niekedy hovoríme, že číslo a je hromadnou hodnotou postupnosti, ak jeho okolie obsahuje nekonečne mnoho členov tejto postupnosti.

c) Len **konečný** počet členov a_n postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **leží mimo** pásu rovnobežiek. Ide o členy a_n, ktorých index n je menší alebo rovný n_0. Tento konečný počet môže byť aj 0. Záleží na tom, akú hodnotu zvolíme pre ε.

[4] Alternatívna definícia limity postupnosti: *„Reálne číslo a nazveme limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ak každé okolie bodu a obsahuje takmer všetky členy tejto postupnosti. Zapisujeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$."*

Príklad (dôležitý) Ukážte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pre $k \in N$.



Obr. 8

Tab. 1.2.1

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$1/n$	1,00000	0,50000	0,33333	0,25000	0,20000	0,16667	0,14286	$\to 0$
$1/n^2$	1,00000	0,25000	0,11111	0,06250	0,04000	0,02778	0,02041	$\to 0$
$1/n^3$	1,00000	0,12500	0,03704	0,01563	0,00800	0,00463	0,00292	$\to 0$
$1/n^4$	1,00000	0,06250	0,01235	0,00391	0,00160	0,00077	0,00042	$\to 0$
$1/n^5$	1,00000	0,03125	0,00412	0,00098	0,00032	0,00013	0,00006	$\to 0$
$\downarrow$ $1/n^k$								$\ddots$

Riešenie. Ako naznačuje graf na obr. 8 , resp. Tab. 1.2.1 , limitou postupnosti $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty}$ pre $k \in N$ je číslo $a = 0$. Počítajme.

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n^k} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^k}\right| = \frac{1}{n^k}$$

Ak ε je vopred stanovená (zvolená) hodnota a má pre $n > n_0$ platiť $|a_n - a| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon$, potom stačí uvažovať

$$\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} < n_0.$$

Pre názornú predstavu uvádzame niekoľko konkrétnych hodnôt [5] v Tab. 1.2.2

Ku každému ε nájdeme odpovedajúce n_0 také, že pre všetky indexy $n > n_0$ členov $a_n = \frac{1}{n^k}$ postupnosti $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty}$ je splnená požadovaná podmienka definície, aby platilo $|a_n - a| = \left|\frac{1}{n^k} - 0\right| < \varepsilon$.

[5] Pre $k = 1$ formálne neuvažujeme o odmocnine.

Platí teda pre každé $k \in N$, že

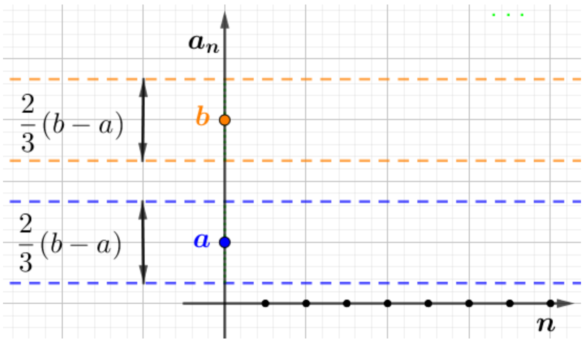
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \;.$$

Tab. 1.2.2

k	ε	$\sqrt[k]{\varepsilon}$	$\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$	n_0
1	0.1	0,1	10	10
	0,01	0,01	100	100
	0,001	0,001	1000	1000
2	0.1	0,32	3,16	3
	0,01	0,10	10	10
	0,001	0,03	31,62	32
3	0.1	0,46	2,15	2
	0,01	0,22	4,64	5
	0,001	0,10	10	10

Veta *Každá postupnosť má najviac jednu limitu (žiadnu alebo práve jednu)*

Dôkaz - nepriamo.
Nech postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má dve navzájom rôzne limity a, b . Predpokladajme, že $\boldsymbol{a < b}$.
Z definície limity vyplýva, že v ľubovoľnom okolí bodu a ležia takmer všetky členy postupnosti a súčasne v ľubovoľnom okolí bodu b taktiež. Okolie bodu však závisí od hodnoty jeho polomeru ε.
Zvoľme teda $\varepsilon = \frac{1}{3}(b-a)$. Potom je $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$. To znamená, že všetky členy postupnosti ležia buď len v $U_\varepsilon(a)$ alebo ležia iba v $U_\varepsilon(b)$, čo predstavuje spor. ■



Obr. 9

Všimnime si, že podľa vyššie uvedenej vety, **limita nemusí existovať**.[6] Ak však postupnosť limitu má, potom je táto limita iba jedna.

Existujú však postupnosti, ktoré limitu nemajú, napr. postupnosť

[6] Treba mať na pamäti, že definíciou limity postupnosti (formuláciou jej znenia) ešte nie je zaručená existencia tejto limity. Definícia len definuje nejaký objekt, resp. jeho vlastnosti. Pre názornosť - príklad zo života. Ak máte technický výkres nejakého výrobku, napr. auta, definujete ho výkresovou dokumentáciou (rozmery, farbu, parametre, výkon, ...), ale v skutočnosti samotný prototyp ešte nemusel byť (možno ani nikdy nebude) vyrobený.

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} := ((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1,1,-1,1,-1,\dots).$$

Dôvod.

Ak by postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mala limitu a, potom $a = 1$ alebo $a = -1$, pretože iné hodnoty členov a_n daná postupnosť nenadobúda.

Uvažujme najprv prípad pre $a = 1$ (analogická úvaha platí aj pre potenciálny prípad $a = -1$).

- Ak je n párne číslo, potom $|a_n - a| = |(-1)^n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$ pre ľubovoľne zvolené reálne číslo $\varepsilon > 0$.
- Ak je však n nepárne číslo, potom $|a_n - a| = |(-1)^n - 1| = |-1 - 1| = 2$. To obmedzuje nezávislú voľbu kladného reálneho čísla ε a tým sme sa dostali do rozporu s definíciou limity.

Definícia *Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentná,** ak má limitu $a \in R$. Postupnosť nazývame **divergentnou** postupnosťou, ak limitu nemá.*

Veta *Každá konvergentná postupnosť je ohraničená*[7]*.*

Dôkaz. Nech postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $a \in R$.

Podľa definície ku každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 také, že pre každé $n > n_0$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Poslednú nerovnosť alternatívne zapíšeme

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Uvažujme o prvých n_0 členoch postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ako o množine $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$.

Ak číslo k_1 je minimum[8] tejto množiny $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$ a číslo k_2 zase jej maximum, potom položíme

$$A = min\{k_1, a - \varepsilon\}$$
$$B = max\{k_2, a + \varepsilon\}.$$

Pri tejto voľbe pre každé $n \in N$ platí, že $A \le a_n \le B$. Postupnosť je teda ohraničená. ■

V nadväznosti na predchádzajúcu vetu poznamenávame, že vetu nemožno obrátiť. Existujú postupnosti, ktoré sú ohraničené, ale limitu nemajú, napr. postupnosť $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$.

1.3 Základné vety o limitách postupností

Uvažujme konvergentné postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Veta *Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ pre $a, b \in R$, potom postupnosť $(a_n \pm b_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a platí*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$$

[Limita súčtu dvoch konvergentných postupností sa rovná súčtu limít týchto postupností.]

Dôkaz. Kvôli názornosti, zaoberajme sa iba prípadom postupnosti $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$. Budeme vychádzať z predpokladov o existencii limít postupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

---

[7] Ohraničenú postupnosť možno definovať aj inak, než sme uviedli v prvej kapitole.

Definícia Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, ak existuje také reálne číslo $M \ge 0$, že pre každé $n \in N$ platí $|a_n| \le M$.

[8] Minimum konečnej množiny je prvok tejto množiny, ktorý je v danom usporiadaní najmenší. Maximum je zase prvok množiny, ktorý je v danom usporiadaní najväčším prvkom.

Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, potom (podľa definície limity) k ľubovoľnému $\varepsilon_a > 0$, existuje $n_a \in N$ také, že pre každé $n \in N,\ n > n_a$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon_a$.[9]

Podobne, ak $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, potom (podľa definície limity) k ľubovoľnému $\varepsilon_b > 0$, existuje $n_b \in N$ také, že pre každé $n \in N,\ n > n_b$ platí: $|b_n - b| < \varepsilon_b$.

Ak chceme ukázať, že aj postupnosť $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, t.j. že existuje limita

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b,$$

potom musíme k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ nájsť také n_0, aby pre každé $n > n_0$ platilo

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Keďže $\varepsilon > 0$ si môžeme zvoliť ľubovoľne, nech je $\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_b$ a počítajme[10]:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Ak položíme $n_0 = max\{n_a, n_b\}$, potom pre každé $n > n_0$ platí:

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon.$$

Tým sme ukázali, že k ľubovoľnému kladnému reálnemu číslu ε existuje také $n_0 \in N$, že pre $n > n_0$ členy $a_n + b_n$ postupnosti ležia v okolí bodu $a + b$. ■

Veta *Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ pre $a, b \in R$, potom postupnosť $(a_n . b_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a platí $\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = a . b$*

[Limita súčinu dvoch konvergentných postupností sa rovná súčinu limít týchto postupností.]

Dôkaz. Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Je potrebné dokázať, že aj postupnosť $(a_n . b_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, t.j. že existuje limita

$$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = a . b,$$

Počítajme.

$$|a_n . b_n - a . b| = |a_n . b_n - a_n . b + a_n . b - a . b| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Ohraničíme jednotlivé členy nerovnosti.

Keďže postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje, potom je ohraničená a existuje reálne číslo $K > 0$ také, že $|a_n| < K$ pre každé $n \in N$.

Najprv zvoľme číslo $\varepsilon > 0$.

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a, preto ku každému $\varepsilon_a > 0$ existuje n_0 také, že pre každé $n > n_0$ platí:

$$|a_n - a| < \varepsilon_a.$$

Keďže $\varepsilon_a > 0$ môžeme zvoliť ľubovoľne, položme[11] $\varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{2.|b|}$.

[9] Zvolili sme označenie ε_a, n_a, aby bolo zrejmé, k akej postupnosti a limite sa uvedené hodnoty vzťahujú. Obdobne aj pre druhú uvažovanú postupnosť.

[10] Využijeme vlastnosť absolútnej hodnoty, kde $|x + y| \leq |x| + |y|$.

[11] Voľba $\varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{2.|b|}$ je účelová.

Postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu b, preto ku každému $\varepsilon_b > 0$ existuje n_0 také, že pre každé $n > n_0$ platí:

$$|b_n - b| < \varepsilon_b$$

a opäť položíme (účelovo zvolíme) $\varepsilon_b = \frac{\varepsilon}{2.K}$.

Dosadíme do nerovnosti

$$|a_n.b_n - a.b| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq K.\frac{\varepsilon}{2.K} + |b|.\frac{\varepsilon}{2.|b|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n.b_n) = a.b$ ■

Veta *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ *pre* $b_n \neq 0, n = 1,2,3,\cdots,$ $a, b \in R,$ *potom postupnosť* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná a platí* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

[Limita podielu dvoch konvergentných postupností sa rovná podielu limít týchto postupností, ak podiel má zmysel.]

Dôkaz vety nájde čitateľ v [Fulier, Vrábel, str. 52].

Príklad

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-4}{5n+6}$.

Riešenie. Použijeme predchádzajúce vety o súčte a podiele dvoch limít. Najprv však upravíme výraz $\frac{3n-4}{5n+6}$ tak, že zlomok rozšírime hodnotou $\frac{1}{n}$. Taktiež použijeme výsledok predchádzajúceho príkladu.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{5n+6} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)\cdot\frac{1}{n}}{(5n+6)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+4}{n}}{\frac{5n+6}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{5+\frac{6}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}} = \frac{3+0}{5+0} = \frac{3}{5}$$

Výsledok: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{5n+6} = \frac{3}{5}$.

1.4 Nevlastná limita postupnosti

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (n^2+1)_{n=1}^{\infty} = (2, 5, 10, 17, 26, \dots)$ má tú vlastnosť, že so zväčšujúcim sa indexom n rastie hodnota členov danej postupnosti.

Presnejšie napísané, ak zvolíme ľubovoľne veľké reálne číslo k, potom vždy nájdeme taký index n_0, že pre každé $n > n_0$ pre členy a_n platí: $a_n > k$.

Ak má postupnosť vyššie popísanú vlastnosť, potom hovoríme, že má **nevlastnú limitu.** a zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Definícia *Hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má* ***nevlastnú*** *limitu* $+\infty$ *, ak ku každému* $k \in R$ *existuje prirodzené číslo* n_0*, že pre každé* $n > n_0$ *platí* $a_n > k$.

Zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má* ***nevlastnú*** *limitu* $-\infty$ *, ak ku každému* $k \in R$ *existuje prirodzené číslo* n_0*, že pre každé* $n > n_0$ *platí* $a_n < k$.

Zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Postupnosť, ktorá má nevlastnú limitu, je tiež divergentná.[12]

Geometrický význam definície nevlastnej limity ako $+\infty$ spočíva v tom, že všetky členy postupnosti a_n s indexom $n > n_0$ ležia v intervale (k, ∞), kde $k \in R$. Niekedy hovoríme, že „**ležia v okolí bodu** $+\infty$“, ktoré symbolicky zapisujeme $\boldsymbol{U_k}(\infty)$**.** Obdobne pre nevlastnú limitu $-\infty$.

Kvôli prehľadu – pre postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ môžu nastať tieto štyri, navzájom sa vylučujúce, prípady:

- existuje vlastná limita postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- neexistuje vlastná, a ani nevlastná limita postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Pre nevlastné limity platia nasledovné vety. Uvedieme ich bez dôkazu.

Veta *Ak je postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ohraničená a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, *potom*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0 \text{ za podmienky } b_n \neq 0 \text{ pre } n = 1,2,3,\ldots.$$

Veta *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

Veta *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \infty$.

Veta *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$.

Veta *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = -\infty$.

Veta *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \infty$.

Veta *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = -\infty$.

1.5 Niektoré limity postupností

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{pre} \quad a > 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \doteq 2{,}718 \qquad \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \text{neexistuje}, ak \;\; a \leq -1 \\ 0, ak\ a \in (-1,1) \\ 1, ak\ a = 1 \\ \infty, ak\ a > 1 \end{cases}$$

1.6 Cvičenie

1. Napíšte a znázornite graficky prvých 5 členov postupnosti, ktorej n –tý člen postupnosti je:

   a) $a_n = 2$ b) $b_n = \frac{1}{3^{2n}}$ c) $a_n = \frac{1-\cos n\pi}{2}$ d) $a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{2}$

2. Napíšte všeobecný n – člen postupnosti:

[12] Definícia konvergentnej postupnosti vyžaduje existenciu limity ako konkrétneho reálneho čísla a. **Znakom +∞** sa len intuitívne naznačuje, že uvažujeme o extrémne veľkej hodnote. Nejde o konkrétne číslo. Podobná interpretácia je aj v prípade znaku $-\infty$.

a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ b) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ c) $5, -5, 5, -5, 5, -5, \dots$

3. Zistite, či postupnosť je ohraničená:

   a) $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

4. Vypočítajte a_{10} a d aritmetickej postupnosti, ak $a_1 = 6, S_{10} = 195$.
5. Vypočítajte a_1 a príslušné n aritmetickej postupnosti, ak $a_n = 80, d = 8, S_n = 416$.
6. Určte kvocient q a prvý člen a_1 geometrickej postupnosti, pre ktorú platí $a_4 = -\frac{8}{3}, a_6 = -\frac{32}{3}$.
7. Určte kvocient q a prvý člen a_1 geometrickej postupnosti, pre ktorú platí $a_1 + a_4 = 4$ a súčasne $a_2 - a_4 = -24$.
8. Ukážte, že postupnosť $\left(\frac{2n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a má limitu rovnú 2. Pre $\varepsilon = 1/1000$ nájdite odpovedajúcu hodnotu n_0.
9. Vypočítajte limity

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+5}{4-2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2-4n+7}{10n^2+n-6}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n^3-1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right)^3$

10. Vypočítajte limity

    a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3} \,.\, \sqrt[4]{3} .\, \sqrt[6]{3} . \cdots \sqrt[2n]{3}$

11. Vypočítajte limity

    b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^4 - 2n^2 + 3)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n+3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1-n} + 2^n\right)$

12. Uvažujme prípad, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverguje a postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Nájdite príklady konkrétnych postupností tak, aby postupnosť $(a_n . b_n)_{n=1}^{\infty}$

    a) konvergovala,
    b) mala nevlastnú limitu,
    c) nemala limitu.

13. Vypočítajte limity

    a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$

2 Funkcia jednej premennej

2.1 Reálna funkcia jednej premennej

Z priestorových a časových dôvodov nie je možné uvádzať základy stredoškolského učiva matematiky, ktoré sú potrebné ku štúdiu tohto tematického celku. Predpokladáme preto, že čitateľ má vedomosti zo strednej školy a pozná aspoň tieto definície a pojmy:

a) funkcia, definičný obor funkcie, obor hodnôt funkcie, graf funkcie, rovnosť dvoch funkcií, súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch funkcií,
b) monotónnosť funkcie, extrémy funkcie,
c) prostá funkcia, inverzná funkcia a zložená funkcia, racionálna funkcia.

Taktiež požadujeme, aby čitateľ ovládal vlastnosti a dokázal načrtnúť grafy funkcií (lineárna funkcia, lineárna lomená funkcia, kvadratická funkcia, mocninová funkcia, exponenciálna funkcia, logaritmická funkcia, gonometrická funkcia, cyklometrické funkcie).

V prípade nejasností v uvedených pojmoch, odporúčame literatúru [1]. V každom prípade, aspoň zopakujeme pojem reálnej funkcie reálneho argumentu.

Definícia *Reálna funkcia f reálneho argumentu x je zobrazenie podmnožiny A množiny reálnych čísel R do množiny reálnych čísel R, ktoré má tieto dve vlastnosti:*

1) $x \in A$.
2) Ku každému $x \in A$ existuje práve jedno reálne číslo y tak, že $y = f(x)$.

Funkcia f je definovaná, ak je určená:

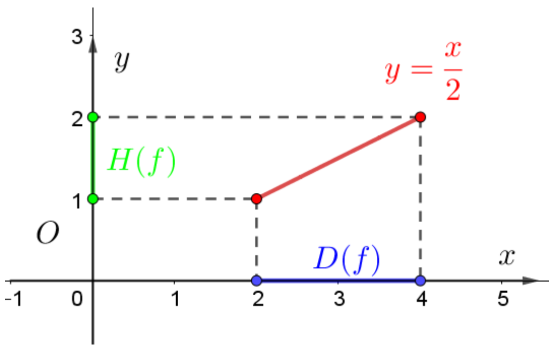
a) množina A

a súčasne

b) aj predpis, podľa ktorého je ku každému reálnemu číslu $x \in A$ priradené práve jedno reálne číslo y, označované aj ako $f(x)$. Hodnotu $f(x)$ nazývame **funkčnou hodnotou funkcie f** v čísle x (alebo kratšie – funkčnou hodnotou)

Množinu A nazývame **definičným oborom** funkcie a býva zvykom označovať ho ako $D(f)$. Množinu hodnôt $f(x)$ pre $x \in D(f)$ označujeme ako $H(f)$ a nazývame **oborom hodnôt funkcie f** .

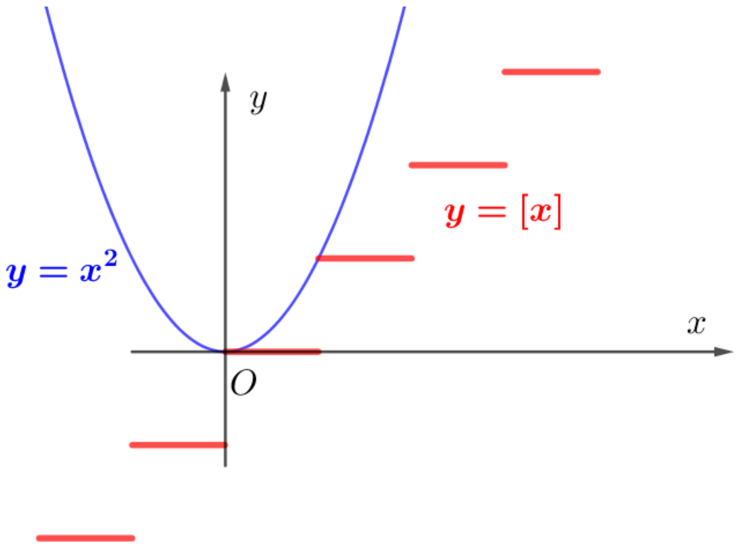
Na obr. 2.1 je znázornený graf funkcie $f: y = \frac{x}{2}$ s definičným oborom $D(f) = \langle 2,4 \rangle$, ktorého obor hodnôt je $H(f) = \langle 1,2 \rangle$.



Obr. 2.1

2.2 Spojitá funkcia

Dôležitou vlastnosťou funkcie je jej spojitosť. Intuitívny pohľad na spojitosť nám ukáže obr. 2.2, kde sú znázornené grafy funkcií $y = x^2$ a funkcie $y = [x]$ (čítame „ **celá časť z hodnoty** x", napr. $[0{,}25] = 0$, $[1{,}75] = 1$ a pod.).



Obr. 2.2

Definícia Nech je daná funkcia $y = f(x)$ a nech $x_0 \in D(f)$.
Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je **v bode x_0** z definičného oboru $D(f)$ **spojitá**, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D(f)$ je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Geometricky - definícia spojitosti uvádza, že funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode $x_0 \in D(f)$, ak pre body x dostatočne blízke k x_0 a patriace do definičného obrou $D(f)$ sa hodnoty $f(x)$ ľubovoľne málo líšia od hodnoty $f(x_0)$. [13]

Funkcia $y = f(x)$ je **spojitá v bode x_0** aj v prípade, že x_0 je **izolovaným bodom**[14] z definičného oboru $D(f)$, t.j. ak existuje $\delta > 0$ také, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D(f) = \{x_0\}$.

Ak v definícii namiesto intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uvažujeme interval $(x_0, x_0 + \delta)$, potom hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je v bode x_0 **spojitá sprava.** V prípade intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ hovoríme o **spojitosti zľava** (v danom bode x_0).

Veta *Funkcia je spojitá v bode x_0 vtedy a len vtedy, keď je spojitá v bode x_0 zľava i sprava súčasne.*
Veta uvádza, že ide o spojitosť v danom bode x_0. Napr. funkcia $y = sgn(x)$ (čítame[15] „*signum* x") s definičným oborom $D(f) = R$ nie je spojitá v bode $x_0 = 0$. Platí totiž, že pre každé $x \neq 0$ je hodnota

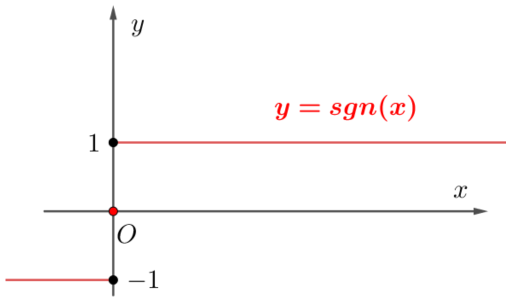
---

[13] **Alternatívna definícia spojitej funkcie**. Nech číslo $a \in D(f)$ funkcie $y = f(x)$. Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode a, ak pre každú postupnosť bodov $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ z definičného oboru $D(f)$, konvergujúcu k číslu a (t.j. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$) platí, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

[14] Bod x_0 nazývame **hromadným bodom** definičného oboru, ak sa v jeho ľubovoľnom okolí nachádza nekonečne mnoho ďalších bodov x z daného definičného oboru.

[15] $y = sgn(x) = \begin{cases} -1, & ak\ x < 0 \\ 0, & ak\ x = 0 \\ 1, & ak\ x > 0 \end{cases}$

$|f(x) - f(x_0)|$ konštantná, teda konkrétnejšie $|sgn(x) - 0| = |\pm 1 - 0| = 1$ a v zmysle definície ju nemožno ohraničiť ľubovoľne zvoleným $\varepsilon > 0$.



Obr. 2.3

Príklad Ukážte, že funkcia $y = [x]$ nie je v bode $x_0 = 1$ spojitá.

Riešenie. Použijeme predchádzajúcu vetu. Uvedomíme si (viď. obr. 2.2), že

$$y = [x] = \begin{cases} 0, ak\ x \in (0,1) \\ 1, ak\ x \in \langle 1, 2) \end{cases}$$

Ak je $x \in (0,1)$, potom $|[x] - 1| = |0 - 1| = 1$, čo je v rozpore s možnosťou voľby čísla $\varepsilon > 0$ v zmysle definície[16]. Funkcia $y = [x]$ nie je v bode $x_0 = 1$ spojitá zľava.
Ak $x \in (1,2)$, potom $|[x] - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$, pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$. V zmysle definície je funkcia $y = [x]$ v bode $x_0 = 1$ spojitá sprava.
Podľa predchádzajúcej vety funkcia $y = [x]$ je v bode $x_0 = 1$ nie je spojitá.

Rozhodnutie o tom, či je funkcia $y = f(x)$ v danom bode $x_0 \in D(f)$ spojitá, je vždy záležitosť toho, aký konkrétny bod $x_0 \in D(f)$ uvažujeme.

Napr. riešenie predchádzajúceho príkladu naznačuje, že funkcia $y = [x]$ nie je spojitá v $x_0 = 1$, ale je spojitá v každom bode x_0 množiny $(0,1) \cup (1,2)$.

Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je **spojitá na celom definičnom obore $\boldsymbol{D(f)}$**, ak je funkcia $y = f(x)$ **spojitá v každom bode $\boldsymbol{x \in D(f)}$**. Napr., funkcia $y = x^2$ je v každom bode $x \in D(f) = R$ spojitá.

Veta *Ak funkcie $y = f(x), y = g(x)$ sú spojité v bode x_0, potom sú spojité v bode x_0 aj funkcie:*

a) $c.f(x)$ *pre* $c \in R$,
b) $f(x) + g(x)$,
c) $f(x).g(x)$,
d) $\frac{f(x)}{g(x)}$, *ak* $g(x_0) \neq 0$

Veta *Ak funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode x_0 a funkcia $z = g(y)$ je spojitá v bode $y_0 = f(x_0)$, potom aj zložená funkcia $z = g\big(f(x)\big)$ je v bode x_0 spojitá.*

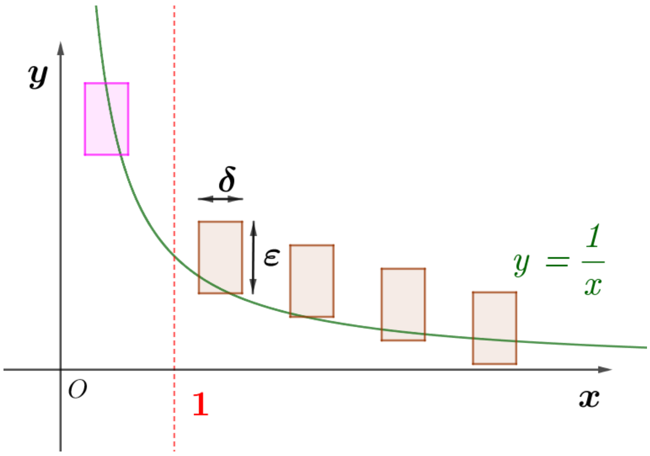
Definícia Nech je daná funkcia $y = f(x)$ a nech $x_0 \in D(f)$. Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je **rovnomerne spojitá** na intervale I, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky $x_1, x_2 \in I$, ktoré spĺňajú nerovnosť $|x_1 - x_2| < \delta$, platí, že $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

[16] Máme obmedzenú možnosť zvoliť za ε ľubovoľne malé kladné reálne číslo.

Geometrická interpretácia definície je nasledovná:
Ak zostrojíme obdĺžnik tak, aby:

a) strana s dĺžkou ε bola rovnobežná s osou y ,
b) strana s dĺžkou δ zase rovnobežná s osou x,
c) obdĺžnik obsahoval vo svojom vnútri časť grafu funkcie $y = f(x)$,

potom pri ľubovoľnom posunutí tohto obdĺžnika **nemôže** graf rovnomerne spojitej funkcie pretínať dve jeho strany, ktoré sú rovnobežné s osou x.



Obr. 2.4

Na obr. 2.4 je znázornený graf funkcie $y = \frac{1}{x}$ s definičným oborom $D(f) = (0, \infty)$, ktorá :

a) je rovnomerne spojitá na intervale $\langle 1, \infty)$,
b) na intervale $(0,1)$ nie je rovnomerne spojitá.

***Veta* (Cantor)** *Ak je funkcia spojitá na konečnom uzavretom intervale, potom je na tomto intervale ohraničená, rovnomerne spojitá, má na ňom minimum a maximum a nadobúda na ňom každú hodnotu ležiacu medzi jej minimom a maximom.*

2.3 Limita funkcie

Skôr, ako pristúpime k definícii limity, vytvorme si názornú predstavu na konkrétnom príklade.

Majme funkciu $y = \frac{1}{x^2}$ s definičným oborom $D(f) = R - \{0\}$. V bode $x_0 = 2$ je funkcia definovaná a je zrejmé, že postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ má limitu[17] rovnú $x_0 = 2$.

Vezmime členy postupnosti $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$, dosadzujme ich hodnoty postupne do predpisu funkcie $y = \frac{1}{x^2}$ za premennú x a vypočítavajme funkčné hodnoty, čím dostávame novú číselnú postupnosť

$$\left(f(x_n)\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{x_n^2}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2}\right)_{n=1}^{\infty} = \cdots = \left(\frac{(n+1)^2}{4n^2}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n^2+2n+1}{4n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

V tab. 2.3.1 je naznačený výpočet pre $n = 1, 2, \dots, 42$ s presnosťou na 3 desatinné miesta.

[17] Všimnite si, že každý člen postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je rôzny od 2.

Tab. 2.3.1

n	1	2	3	4	…	20	21	…	30	31	…	40	41	42	…
x_n	1,000	1,333	1,500	1,600		1,905	1,909		1,935	1,938		1,951	1,952	1,953	
$f(x_n)$	1,000	0,563	0,444	0,391		0,276	0,274		0,267	0,266		0,263	0,262	0,262	

Postupnosť $\left(f(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ má limitu a platí:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

Možno dokázať, že limita postupnosti $\left(f(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ sa rovná $\frac{1}{4}$ pre každú postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ takú, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, kde $x_n \in D(f)$, $x_n \neq 2$. Hodnoty funkcie $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sa blížia k číslu $\frac{1}{4}$, ak sa hodnoty x blížia k číslu 2.

Hovoríme, že funkcia $f(x) = \frac{1}{x^2}$ má v bode $x_0 = 2$ limitu $\frac{1}{4}$ a zapisujeme

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

***Definícia* (Heine)** Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 limitu rovnú a, ak pre každú postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňajúcu podmienky:

a) $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

má odpovedajúca postupnosť funkčných hodnôt $\left(f(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ v bode $x = x_0$ limitu rovnú a.

Formálne zapísané

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \left[\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \in D(f), x_n \neq x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a\right]$$

Voľne povedané, pre hodnoty x málo odlišné od x_0 a súčasne, $x \neq x_0$, sú hodnoty $f(x)$ málo odlišné od čísla a.

Dôsledky vyplývajúce z definície:

a) predpoklad $x_n \neq x_0$ umožňuje definovať limitu funkcie $y = f(x)$ aj v bode x_0, ktorý nemusí byť z definičného oboru $D(f)$,
b) existencia, a ani hodnota limity a funkcie $y = f(x)$ v bode x_0 nezávisí od funkčnej hodnoty $f(a)$, ak táto vôbec existuje.

***Definícia* (Cauchy)** Nech je funkcia $y = f(x)$ definovaná pre všetky $x \neq x_0$ z niektorého okolia bodu x_0. Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 limitu rovnú a, ak ku každému okoliu $U_\varepsilon(a)$ existuje také okolie $V_\delta(x_0)$, že pre každé $x \in V_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$, je $f(x) \in U_\varepsilon(a)$.

Formálne zapísané

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff [\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon]$$

Obe definície, Heineho i Cauchyho, sú ekvivalentné.

To znamená - ak má funkcia $y = f(x)$ limitu v bode x_0 podľa Heineho definície, potom má v danom bode x_0 aj limitu (a rovnakú) aj podľa definície Cauchyho, a opačne. Ak má funkcia $y = f(x)$ limitu v bode x_0 v zmysle Cauchyho, potom má v danom bode x_0 aj limitu v zmysle Heineho.

2.4 Základné vety o limitách funkcie

Pre limitu funkcie platia nasledovné vety.

Veta *Funkcia $y = f(x)$ môže mať v bode x_0 najviac jednu limitu.*
Dôkaz vyplýva z jednoznačnosti limity postupnosti.

Veta *Nech sú dané funkcie $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, pre ktoré platí*

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = a = \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

Ak existuje také okolie $U(x_0)$ bodu x_0, že pre všetky $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ je

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \text{ potom } \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Príklad Vypočítajte limitu funkcie $y = x \cos\frac{1}{x}$ v bode $x_0 = 0$.

Riešenie. Funkcia $y = \cos\frac{1}{x}$ je ohraničená a platí $\qquad -1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1.$

Najprv uvažujeme, že $x > 0$.

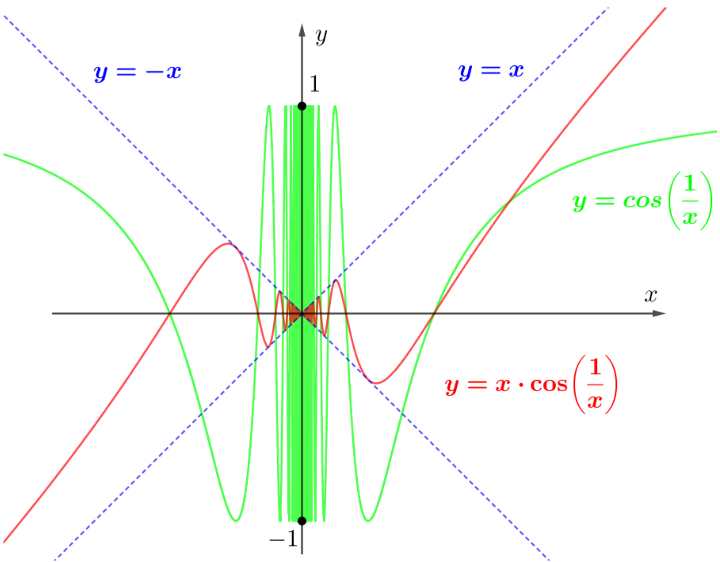
Ak položíme $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = x$, $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$, potom $\qquad -x \leq x\cos\frac{1}{x} \leq x.$

Súčasne $\lim\limits_{x \to 0} -x = 0 = \lim\limits_{x \to 0} x$ a teda podľa predchádzajúcej vety platí

$$\lim_{x \to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

Ak bude $x < 0$, výsledok dostaneme rovnaký.

Grafy funkcií $y = x, y = -x, y = \cos\frac{1}{x}$ a $y = x\cos\frac{1}{x}$ sú na obr. 2.5.



Obr. 2.5

Veta *Ak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, potom platí*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b,$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x).g(x)) = a.b,$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, *ak* $b \neq 0$

Príklad Vypočítajte $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{2x^3+x^2-x}$.

Riešenie. Najprv zistíme, či existujú limity $\lim_{x\to 1}(x^2+x+2)$ a $\lim_{x\to 1}(2x^3+x^2-x)$.

Vypočítame:

$\lim_{x\to 1}(x^2+x+2) = 1^2+1+2 = 4$ a $\lim_{x\to 1}(2x^3+x^2-x) = 2.1^3+1^2-1 = 2.$

Podľa predchádzajúcej vety dostávame

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{2x^3+x^2-x} = \frac{\lim_{x\to 1} x^2+x+2}{\lim_{x\to 1} 2x^3+x^2-x} = \frac{4}{2} = 2.$$

Príklad Vypočítajte $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Riešenie. Keďže výraz $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ nie je definovaný pre $x=0$, najprv ho upravíme – rozšírime výrazom $\sqrt{x+1}+1$. Platí:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

Ďalej počítame

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \cdots = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}$$

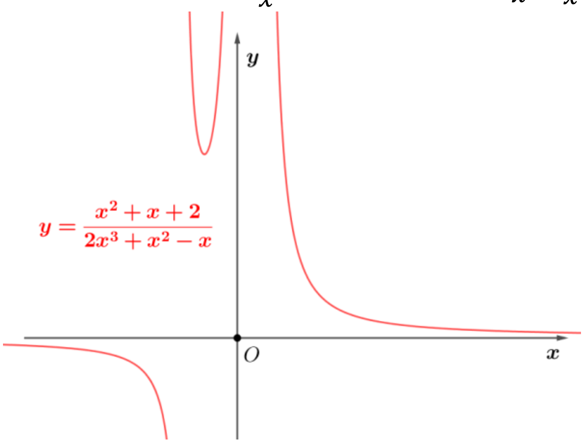
2.5 Nevlastná limita funkcie a limita funkcie v nevlastnom bode

Ak v definícii limity nahradíme všade x_0 symbolom ∞, resp. $-\infty$, získame definíciu **limity v bode** ∞ , resp. $-\infty$.

Príklad Vypočítajte $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{2x^3+x^2-x}$.

Riešenie. Keďže podľa Heineho definície ide o limitu z postupnosti funkčných hodnôt, počítame obdobným spôsobom ako limity postupností. Platí:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{2x^3+x^2-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x+2}{x^3}}{\frac{2x^3+x^2-x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{2} = 0$$



Obr. 2.6

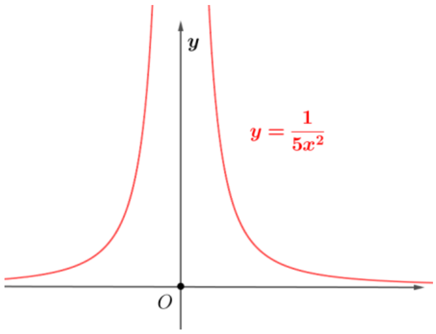
Limitu funkcie možno definovať aj ako **nevlastnú limitu**, $a = +\infty$, b resp. $a = -\infty$ v bode $x_0 \in R$.

Definícia Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 **nevlastnú limitu** rovnú ∞, ak pre každú postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňajúcu podmienky:

a) $x_n \in D(f), \quad x_n \neq \mathrm{x}_0,$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{x}_0$

má odpovedajúca postupnosť funkčných hodnôt $\left(f(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ v bode $x = x_0$ limitu rovnú ∞.

Zápis $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ znamená (voľne povedané),ak sa x približuje k x_0, ale $x \neq x_0$, potom sa hodnoty $f(x)$ stále viac zväčšujú, napr. podľa obr. 2.6 je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{5x^2} = \infty$.



Obr. 2.7

Analogicky možno definovať aj nevlastnú limitu rovnú $-\infty$. Ak uvažujeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, potom pre x približujúce sa k x_0, ale stále $x \neq x_0$, odpovedajúce hodnoty $f(x)$ stále viac zmenšujú.

Pre úplnosť, ešte je možné ešte uvažovať **o nevlastnej limite v nevlastnom bode**.

Príklad Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+x^2-x}{x^2+x+2}$.

Riešenie. Keďže podľa Heineho definície ide o limitu z postupnosti funkčných hodnôt, počítame obdobným spôsobom ako limity postupností. Platí:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x^2-x}{x^2+x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3+x^2-x}{x^3}}{\frac{x^2+x+2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{2}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} = \infty$$

2.6 Niektoré limity funkcií

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0, n\epsilon N \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}718$$

Príklad Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{x}$.

Riešenie. Upravíme podľa vzorovej limity $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Počítame

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x} . \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} . \frac{3}{\cos 3x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(1 . \frac{3}{\cos 3x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3}{\cos(3.0)} = \frac{3}{1} = 3$$

Príklad Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$.

Riešenie. Upravíme podľa vzoru $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Počítame

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{x}{x-2}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{x-2}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x-2+2}{x-2}\right)^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x-2}{x-2}+\frac{2}{x-2}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{x-2}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{2}}\right)^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{2}}\right)^{x-2+2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{2}}\right)^{\frac{2(x-2+2)}{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{2}}\right)^{\frac{2(x-2)}{2}}.\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{2}}\right)^{\frac{4}{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^2.\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{2}}\right)^2} = \frac{1}{e^2.1} = \frac{1}{e^2}$$

2.7 Jednostranná limita

Podobne, ako sme zaviedli spojitosť funkcie zľava a spojitosť funkcie sprava, môžeme definovať aj jednostranné limity.

Definícia Nech je funkcia $y = f(x)$ definovaná pre každé $x \neq x_0$ z niektorého pravého okolia bodu x_0. Hovoríme**,** že funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 **limitu sprava** rovnajúcu sa a, ak pre každú postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňajúcu podmienky:

a) $x_n \in D(f),\quad x_n > \mathrm{x}_0,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{x}_0$

má odpovedajúca postupnosť funkčných hodnôt $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ v bode $x = x_0$ limitu rovnú a.

Zapisujeme $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$

Analogicky možno definovať aj limitu zľava, ktorú zapisujeme $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a$

Pre limitu zľava a limitu sprava sa používa spoločný názov - **jednostranné limity.**

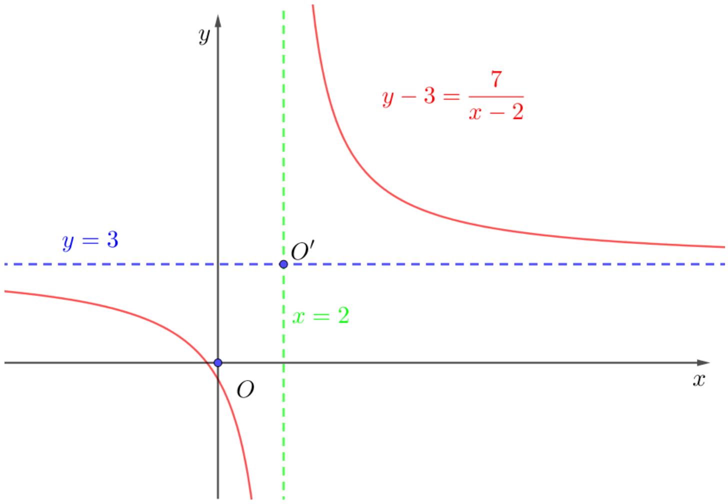
Príklad Načrtnite graf funkcie $y = \frac{3x+1}{x-2}$ a určte jednostranné limity v bode nespojitosti.

Riešenie. Racionálna lomená funkcia $y = \frac{3x+1}{x-2}$ má definičný obor $D(f) = R - \{2\}$.

Upravíme predpis funkcie nasledovne

$$y = \frac{3x+1}{x-2} = 3\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)}{x-2} = 3\frac{\left(x-2+2+\frac{1}{3}\right)}{x-2} = 3\left(\frac{x-2}{x-2} + \frac{2+\frac{1}{3}}{x-2}\right) = \cdots = 3 + \frac{7}{x-2}$$

Graf funkcie $y = \frac{3x+1}{x-2}$ bude posunutým grafom funkcie $y = \frac{7}{x}$ s vektorom posunutia $\vec{u} = (2,3)$.



Obr. 2.8

Pre jednostranné limity platí

$$\lim_{x \to 2^-}\left(3 + \frac{7}{x-2}\right) = -\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x \to 2^+}\left(3 + \frac{7}{x-2}\right) = \infty.$$

Vidíme, že funkcia v bode $x_0 = 2$ nemá limitu, a taktiež nie je spojitá.

Veta *Limita $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existuje vtedy a len vtedy, keď existujú jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$. Súčasne platí* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

2.8 Asymptoty grafu

Graf funkcie má rôzny priebeh. Zaujímavé sú prípady, keď sa rastúcimi (alebo aj klesajúcimi) hodnotami nezávislej premennej x, alebo aj závislej premennej y, „približuje" k istým priamkam.

Na obr. 2.8 je naznačený graf funkcie $y = 3 + \frac{7}{x-2}$, z ktorého je zrejmé, že pre $x \to \pm\infty$ sa graf „približuje" k priamke $y = 3$. Analogicky, pre $y \to \pm\infty$ sa graf zase „približuje " k priamke $x = 2$. Priamky takej vlastnosti nazývame **asymptotami**.

Definícia Priamku s rovnicou $x = x_0$, $x_0 \in R$, nazývame **asymptotou bez smernice** grafu funkcie $y = f(x)$, ak funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 aspoň jednu nevlastnú jednostrannú limitu.

Priamka $x = x_0$ je asymptotou bez smernice, ak platí aspoň jeden zo vzťahov

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty.$$

Definícia Priamku s rovnicou $y = kx + q$, $k \in R$, nazývame **asymptotou so smernicou** grafu funkcie $y = f(x)$, ak funkcia $y = f(x)$ je definovaná v nejakom okolí bodu ∞, resp. $-\infty$, a platí

$$\lim_{x \to \infty}\big(f(x) - (kx+q)\big) = 0 \qquad \text{alebo} \qquad \lim_{x \to -\infty}\big(f(x) - (kx+q)\big) = 0.$$

Ak máme graf funkcie $y = f(x)$ a priamku $y = kx + q$, rozdiel $f(x) - (kx + q)$ je rozdielom funkčných hodnôt pre určité konkrétne x. Na obr. 2.9 ide o dĺžku úsečky MN. Ak pre $x \to \infty$, resp. $x \to -\infty$ sa dĺžka úsečky zmenšuje, priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou.

Veta *Nech je funkcia $y = f(x)$ definovaná v nejakom okolí bodu ∞, resp. $-\infty$. Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou vtedy a len vtedy, keď existujú vlastné limity*

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = q$ *alebo* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = q$.

Dôkaz. 1) $\Rightarrow$ Ak priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou, potom podľa definície platí $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - (kx + q)\big) = 0$. Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = q$. Naviac, keďže $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$, podľa viet o limite súčtu, rozdielu a súčinu funkcií platí:

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (kx + q)\big) = 0 \qquad /.\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (kx + q)\big).\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - (kx + q)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} k - \lim_{x\to\infty}\frac{q}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$$

2) $\Leftarrow$ Ak existujú vlastné limity $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = q$, *potom z nich vyplýva* $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - q) = 0$. *Priamka $y = kx + q$ je podľa definície asymptotou so smernicou ku grafu funkcie $y = f(x)$.*

Dôkaz pre $x \to -\infty$ je analogický. ∎

Príklad Zistite, či funkcia $y = x + \frac{1}{x-1}$ má asymptoty a určte ich rovnice.

Riešenie. Definičný obor funkcie je $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Vypočítame najprv jednostranné limity v bode $x_0 = 1$. Počítajme:

$$\lim_{x\to1^+}\left(x + \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\right)$$

Zápis $x \to 1^+$ znamená, že $x > 1$.

Z toho vyplýva, že $x - 1 > 0$. Súčasne kvadratická rovnica $x^2 - x + 1 = 0$ má záporný diskriminant a jej graf $y = x^2 - x + 1$ je umiestnený nad osou x. Z toho vyplýva, že podiel $\frac{x^2-x+1}{x-1} > 0$.

Naviac, čím bližšie bude x k 1^+, tým väčšiu hodnotu bude mať zlomok $\frac{1}{x-1}$ a hodnoty súčtov $x + \frac{1}{x-1}$ budú rastúce do $+\infty$. Odvodili sme výsledok

$$\lim_{x\to1^+}\left(x + \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\right) = \infty$$

Analogicky možno ukázať, že

$$\lim_{x\to1^-}\left(x + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$$

Priamka $x = 1$ je asymptotou bez smernice ku grafu funkcie $\quad y = x + \frac{1}{x-1}$.
Ešte zistíme, či má funkcia asymptotu so smernicou.
Počítame

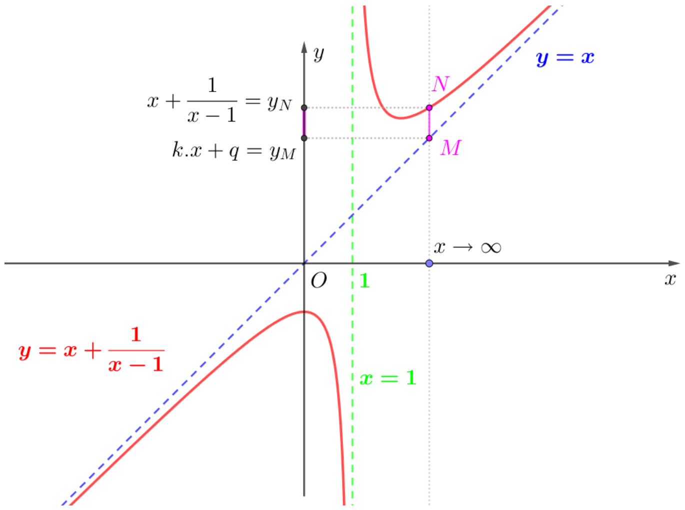
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \dfrac{1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2 - x + 1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}}{\dfrac{x^2 - x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}} = 1$$

Ak má graf funkcie asymptotu, potom jej smernica je $k = 1$. Vypočítame q.

$$q = \lim_{x-\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} - 1.x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Asymptota so smernicou ku grafu funkcie $y = x + \frac{1}{x-1}$ je priamka $y = x$.



Obr. 2.9

2.9 Cvičenie

1. Načrtnite grafy funkcií a určte body z definičného oboru, kde je funkcia nespojitá

   a) $y = 1/x$ b) $y = \frac{1}{x-2}$ c) $y = \frac{1}{x^2+5x+6}$

   d) $y = 1 - \frac{1}{x^2}$ e) $y = \frac{x+1}{x-2}$ f) $y = \frac{2x+3}{x+1}$

2. Vypočítajte

   a) $\lim\limits_{x\to1} \frac{3x^4+6x^2-4}{x^5+2}$ b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x+\cos x}{2x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-1} (x+2)^3$

3. Vypočítajte

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^5+6x^2-4}{x^5+2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+3)(x+4)}{x^3+x-11}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+2)^3}{x^2+4x+1}$

4. Vypočítajte

   a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to(-2)} \frac{x+2}{\sqrt{6+x}-2}$

5. Vypočítajte

   a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+4}{2x+5}\right)^x$

6. Určte jednostranné limity z cvičenia 1.

7. Určte asymptoty ku grafu funkcie

a) $y = x + \frac{2x}{x^2-1}$ b) $y = \frac{x^3+2}{x^2-4}$ c) $y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

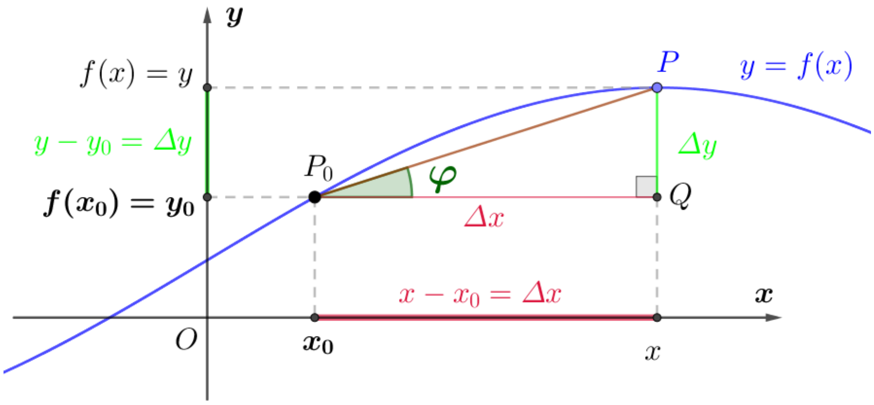
3 Derivácia funkcie

3.1 Derivácia funkcie v bode

Uvažujme o funkcii $y = f(x)$, ktorá je na definičnom obore $D(f)$ spojitá a nech x_0 je určité, pevne zvolené číslo z definičného oboru $D(f)$. Hodnote x_0 odpovedá na grafe funkcie bod $P_0[x_0, y_0]$, kde $y_0 = f(x_0)$.

Ak na grafe zvolíme ďalší bod $P[x, y]$, kde $y = f(x)$, môžeme zostrojiť sečnicu P_0P, ktorá bude preponou pravouhlého trojuholníka P_0PQ (obr. 3.1). Ak označíme dĺžky jeho odvesien $|P_0Q| = \Delta x$, $|PQ| = \Delta y$, potom pre uhol $\measuredangle QP_0P = \varphi$ platí:

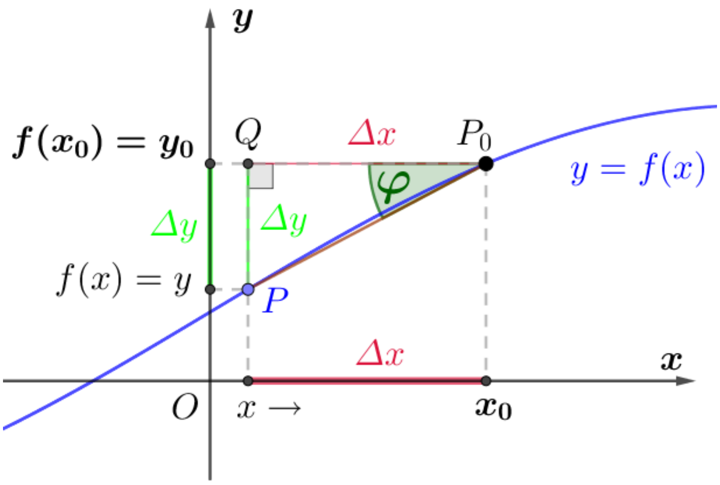
$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|y - y_0|}{|x - x_0|} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$



Obr. 3. 1

Ak sa bodom P „pohybuje" po grafe smerom k bodu P_0, t.j. $x \to x_0$ (podľa obr. 3.1. sa približujeme sprava), bude sa meniť veľkosť uhla φ, ako aj hodnota $\tan\varphi$. Prakticky skúmame jednostrannú limitu

$$\lim_{x \to x_0^+} \tan\varphi = \lim_{x \to x_0^+} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



Obr. 3. 2

Ak by sa bod P „pohyboval " po grafe k bodu P_0 zľava, situácia je obdobná (obr. 3.2) a platí:

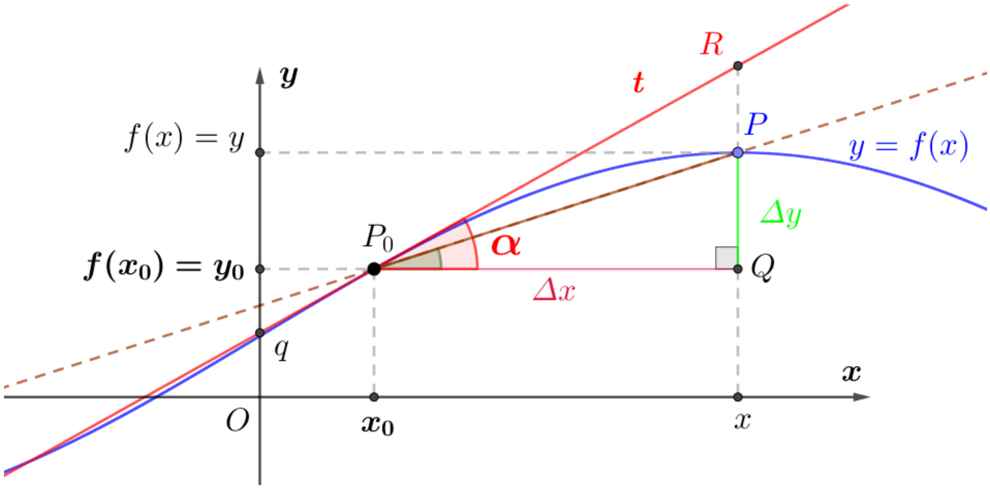
$$\lim_{x \to x_0^-} \tan\varphi = \lim_{x \to x_0^-} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{-(f(x) - f(x_0))}{-(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}.$$

Ak existujú jednostranné limity a rovnajú sa, potom existuje aj limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k,$$

kde $k \in R$.

Geometricky, ak sa bod P „približuje“ po grafe funkcie $y = f(x)$ k bodu P_0, potom $x \to x_0$ a sečnica P_0P sa limitne blíži k dotyčnici t grafu funkcie v bode $P_0[x_0, f(x_0)]$.



Obr. 3.3

Keďže hodnota výrazu $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ predstavuje smernicu priamky P_0P, v limitnom prípade (ak uvedená limita existuje) sa sečnica dostáva do polohy **dotyčnice**[18] s rovnicou $y = kx + q$, kde $k, q \in R$. Ak označíme **smernicový uhol**[19] dotyčnice t ako α , potom platí

$$y = \tan\alpha \,.\, x + q,$$

kde $$\tan\alpha = k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Definícia Nech je funkcia $y = f(x)$ definovaná v okolí bodu $x_0 \in R$. Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom tejto limite hovoríme derivácia funkcie v bode x_0.

Zapisujeme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Príklad Vypočítajte deriváciu funkcie $y = x^2$ v bode $x_0 = 1$.

---

[18] Všimnime si - smernica dotyčnice v bode $P_0[x_0, f(x_0)]$ sa definuje pomocou limity. Následkom toho, dotyčnica ako priamka môže pretínať graf funkcie $y = f(x)$. Ide o prekonanie zaužívanej predstavy, ktorá je zo skúsenosti s dotyčnicou ku kružnici (tam dotyčnica má s krivkou spoločný práve 1 bod).

[19] **Smernicový uhol** je orientovaný uhol $\measuredangle QP_0R$, ktorého prvé (začiatočné) rameno je polpriamka P_0Q, druhé (koncové) rameno zase polpriamka P_0R.

Riešenie. Vypočítame limitu $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ pre konkrétnu funkciu $y = x^2$. Platí, že $f(x_0) = x_0^2 = 1^2 = 1$.

$$f'(1) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2$$

Ukázali sme, že existuje vlastná limita (rovná sa 2) a teda funkcia $y = x^2$ má deriváciu v bode $x_0 = 1$.

Niekedy je výhodné použiť **na výpočet derivácie** iný (rovnocenný) výraz. Podľa obr. 3.1 je zrejmé, že $x = x_0 + \Delta x$ a pre $x \to x_0$ platí, že $\Delta x \to 0$. Z toho vyplýva, že

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Príklad Vypočítajte deriváciu funkcie $y = x^3$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie. Vypočítame limitu $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, kde $f(x_0) = f(1) = 1^3 = 1$. Počítame

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1^3 + 3.1^2\Delta x + 3.1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2) = 3 + 0 = 3.$$

O derivácii funkcie $y = f(x)$ v bode x_0 uvažujeme ako o výsledku výpočtu príslušnej limity. Samotná limita však **nemusí** existovať. Výpočet závisí vždy od predpisu danej funkcie a výberu konkrétneho bodu x_0 z definičného oboru $D(f)$.

Príklad Vypočítajte deriváciu funkcie $y = |x|$ v bodoch:

a) $x_0 = 2$,
b) $x_0 = 0$.

Riešenie. a) Keďže pre $x > 0$ platí $f: y = |x| = x$, počítame limitu

$$f'(2) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{|x| - |2|}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 1 = 1.$$

Derivácia v bode $x_0 = 2$ existuje a rovná sa hodnote 1.

b) Ak je $x < 0$, potom jednostranné limita[20] zľava v bode $x_0 = 0$ je $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$, kým jednostranná limita sprava v bode $x_0 = 0$ je zase $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$. Vzhľadom k tomu, že sa jednostranné limity nerovnajú, limita v $x_0 = 0$ neexistuje.

[20] Ak x dosadzujeme záporné čísla, hodnota zlomku $\frac{|x|}{x}$ je záporná, napr. pre $x = (-3)$ máme $\frac{|-3|}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$.

3.2 Geometrický a fyzikálny význam derivácie

Geometrický význam derivácie funkcie $y = f(x)$ v bode x_0 je zrejmý z obr. 3.3. Hodnota derivácie je hodnotou smernice k dotyčnice t ku grafu danej funkcie $y = f(x)$ v jej bode $P[x_0, f(x_0)]$. Rovnica dotyčnice má tvar:

$$y - f(x_0) = k.(x - x_0),$$

kde

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Príklad Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^3$

a) v bode $x_0 = 1$,
b) v bode $x_0 = 0$.

Riešenie. Podľa riešenia predchádzajúceho príkladu platí $k = 3$. Rovnica dotyčnice t má tvar:

$$y - f(x_0) = k.(x - x_0),$$

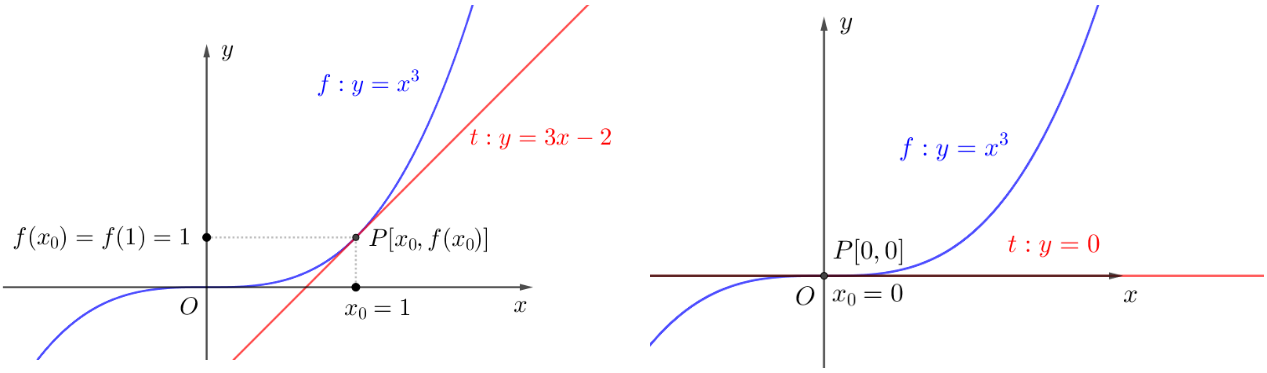
a) Dosadíme príslušné hodnoty a vypočítame (obr. 3.4 a):

$$y - f(1) = 3(x - 1)$$

$$y - 1 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 2.$$

b) Obdobne odvodíme (obr. 3.4 b): $y = 0.$



Obr. 3.4 a, b

Fyzikálny význam derivácie v bode je tiež jednoduchý.
Ak uvažujeme podiel

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

Tak tento podiel označuje priemernú zmenu závislej veličiny y od nezávislej veličiny x na intervale $\langle x_0, x_0 + \Delta x \rangle$. Podiel možno interpretovať ako **priemernú rýchlosť** na úseku Δx.

Ak sa limitne $\Delta x \to 0$, priemerná rýchlosť je **okamžitou rýchlosťou** uvažovanou v bode x_0.

3.3 Derivácia funkcie

V derivácii funkcie v bode sme sa zameriavali na konkrétne určený bod x_0 a existenciu špecifickej limity v tomto bode. Úvahy teraz zovšeobecníme.

Definícia Ak **má** funkcia $y = f(x)$ deriváciu **v každom** bode x_0 intervalu (a, b), potom hovoríme, že **má deriváciu na intervale** (a, b).

Upozorňujeme, že je kvalitatívny rozdiel medzi deriváciou v bode a deriváciou na intervale.

Kým derivácia funkcie $y = f(x)$ v bode x_0 je číslo, derivácia funkcie $y = f(x)$ na intervale (a, b) je funkciou premennej x_0. Uvedieme ukážkový príklad.

Príklad Vypočítajte deriváciu funkcie $y = x^2$ v bode $x_0 = 4$ a určte deriváciu danej funkcie na intervale $(0,5)$.

Riešenie. Ak určujeme deriváciu v bode $x_0 = 4$, počítame limitu

$$f'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-4^2}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4).(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8.$$

Ak určujeme deriváciu funkcie $y = x^2$ na intervale $(0,5)$, vypočítame príslušnú limitu pre ľubovoľný bod x_0 z daného intervalu. Konkrétne:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0).(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0.$$

Výsledok $y' = 2x_0$ je funkciou[21] premennej x_0, kde x_0 ako hodnota „prebieha cez celý interval $(0,5)$".

3.4 Derivácie elementárnych funkcií

Počítať deriváciu funkcie v bode (na intervale) pomocou limity môže byť nepraktické, preto boli odvodené vzorce pre derivácie vybraných elementárnych funkcií.

Tab. 3.1

č.	**Typ**	**Funkcia**	**Podmienky**
1.		$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$x \in R, n \in R$
2.	goniometrické funkcie	$(\sin x)' = \cos x$	$x \in (-\infty, \infty)$
3.		$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in (-\infty, \infty)$
4.		$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$
5.		$(cot\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in Z$
6.	cyklometrické	$(arc \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
7.		$(arc \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
8.		$(\mathrm{arc\,tan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty, \infty)$
9.		$(\mathrm{arc\,cot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty, \infty)$
10.		$(a^x)' = a^x.\ln a$	$a > 0, x \in (-\infty, \infty)$
11.		$(e^x)' = e^x$	$x \in (-\infty, \infty)$
12.		$(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x \in (0, \infty)$
13.		$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$

[21] Funkcia je teraz označená s čiarkou, ako y'.

Ukážeme odvodenie niektorých základných vzorcov pre derivácie elementárnych funkcií.

Príklad Odvoďte vzorec pre deriváciu funkcie $y = x^n$ pre $n \in N$.

Riešenie. Použijeme binomickú vetu

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n .$$

Ak položíme $a = x_0, b = \Delta x$, potom

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Longrightarrow (x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^n + \binom{n}{1}.x_0^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}.x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}.x_0^1(\Delta x)^{n-1} + \binom{n}{n}.x_0^0(\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(n.x_0^{n-1} + \binom{n}{2}.x_0^{n-2}(\Delta x)^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}.x_0^1(\Delta x)^{n-2} + \binom{n}{n}.x_0^0(\Delta x)^{n-1} \right) =$$

$$= n.x_0^{n-1} + 0 = n.x_0^{n-1}.$$

Príklad Odvoďte vzorec pre deriváciu funkcie $y = \sin x$ pre $x \in (-\infty, \infty)$.

Riešenie. Použijeme goniometrickú identitu

$$\sin(A+B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$$

a známu limitu $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Ak položíme $A = x_0, B = \Delta x$, potom

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Longrightarrow (\sin x_0)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x_0 \cos \Delta x + \cos x_0 \sin \Delta x - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x_0 (\cos \Delta x - 1) + \cos x_0 \sin \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x_0 (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x_0 \sin \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x_0 (1-1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x_0 \sin \Delta x}{\Delta x} = 0 + \cos x_0 . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x_0 .$$

Príklad Odvoďte vzorec pre deriváciu funkcie $y = \ln x$ pre $x \in (0, \infty)$.

Riešenie. Použijeme vetu $\log_a X - \log_a Y = \log_a \frac{X}{Y}$, pre $a > 0, a \neq 1$

a tiež limitu $\lim_{z \to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$.

Počítame

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Longrightarrow (\ln x_0)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0+\Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x_0+\Delta x}{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right).x_0}{\Delta x . x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

3.5 Základné vety o derivácii funkcie

Pre deriváciu funkcie platia nasledovné vety.

Veta *Nech je funkcia $y = f(x)$, $y = g(x)$ sú také funkcie, že každá má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0), g'(x_0)$, potom majú v bode x_0 deriváciu aj funkcie*

a) $c_1 f(x) \pm c_2 g(x)$, *kde* $c_1, c_2 \in R$,

b) $f(x).g(x)$,

c) $\frac{f(x)}{g(x)}$, *ak* $g(x_0) \neq 0$

a platí

a) $(c_1 f(x_0) \pm c_2 g(x_0))' = c_1 f'(x_0) \pm c_2 g'(x_0)$,

b) $(f(x_0).g(x_0)' = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$,

c) $\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0),}{g^2(x_0)}$

Naznačíme dôkazy a hneď aj uvedieme príklady.

a) Počítajme limitu – deriváciu súčtu dvoch funkcií pre $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[c_1 f(x_0 + \Delta x) + c_2 g(x_0 + \Delta x)] - [c_1 f(x_0) + c_2 g(x_0)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c_1 f(x_0 + \Delta x) - c_1 f(x_0) + c_2 g(x_0 + \Delta x) - c_2 g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= c_1. \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + c_2. \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0).$$

Príklad Vypočítajte deriváciu funkcie $f: y = -\sin x + 5.2^x$ v bode $x_0 = \pi$.

Riešenie. Ak označíme $f: y = \sin x$, $g: y = 2^x$, $c_1 = (-1)$, $c_2 = 5$, potom platí:

$$(c_1.f(x_0) + c_2.g(x_0))' = (-\sin x + 5.2^x)' = (-1).(\sin x)' + 5.(2^x)' =$$
$$= (-1).\cos x + 5.2^x.\ln 2\,.$$

Hodnota derivácie v bode $x_0 = \pi$ je

$$(c_1.f(\pi) + c_2.g(\pi))' = -\cos \pi + 5.2^\pi.\ln 2 = \cdots = 1 + 2^\pi.\ln 32 \approx 31{,}55$$

b) Počítajme limitu – deriváciu súčinu dvoch funkcií pre $\Delta x \to 0$. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujeme $c_1 = 1 = c_2$. Zápis bude prehľadnejší.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x_0 + \Delta x).g(x_0 + \Delta x)] - [f(x_0).g(x_0)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x_0 + \Delta x).g(x_0 + \Delta x)] - f(x_0 + \Delta x).g(x_0) + f(x_0 + \Delta x).g(x_0) - [f(x_0).g(x_0)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x).\frac{(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x} + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} g(x_0) \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x).\frac{(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} g(x_0) =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x).\lim_{\Delta x\to 0} g\frac{(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}g(x_0)=$$
$$=f(x_0).g'(x_0)+f'(x_0).g(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0).$$

Príklad Vypočítajte deriváciu funkcie $f: y=\sin x\,.\cos x$ v bode $x_0=\frac{\pi}{3}$.

Riešenie. Ak označíme $f: y=\ \sin x$, $g: y=\cos x$, potom platí:
$$f'(x_0)=(\sin x_0\,)'=\cos x_0\ , g'(x_0)=(\cos x_0)'=-\sin x_0.$$
Z vety vyplýva
$$(\sin x_0.\cos x_0)'=\cos x_0.\cos x_0+\sin x_0.(-\sin x_0)=\cos^2\frac{\pi}{3}-sin^2\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

c) **Počítajme limitu – deriváciu podielu dvoch funkcií pre $\Delta x\to 0$**, pričom položíme $c_1=1=c_2$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x}=\dots=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x).g(x_0)-f(x_0).g(x_0+\Delta x)}{\Delta x.g(x_0+\Delta x).g(x_0)}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)+f(x_0).g(x_0)-f(x_0).g(x_0+\Delta x)}{\Delta x.g(x_0+\Delta x).g(x_0)}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(f(x_0+\Delta x).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)\big)-\big(f(x_0).g(x_0+\Delta x)-f(x_0).g(x_0)\big)}{\Delta x.g(x_0+\Delta x).g(x_0)}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)g(x_0)}{\Delta x.g(x_0+\Delta x).g(x_0)}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)\big(g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\big)}{\Delta x.g(x_0+\Delta x).g(x_0)}=$$
$$=\frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Príklad Vypočítajte deriváciu funkcie $f: y=\cot x$ v bode $x_0=\frac{\pi}{4}$.

Riešenie. Ak uvážime, že $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ a označíme $f: y=\ \cos\ x$, $g: y=\sin\ x$, potom platí:
$$f'(x_0)=(\cos\ x_0\,)'=-\sin x_0\,, g'(x_0)=(\sin x_0)'=\cos x_0.$$
Z vety vyplýva
$$(\cot x_0)'=\left(\frac{\cos x_0}{\sin x_0}\right)'=\frac{(\cos x_0)'.\sin x_0-\cos x_0.(\sin x_0)'}{(\sin x_0)^2}=\frac{-\sin^2 x_0-\cos^2 x_0}{(\sin x_0)^2}=-\frac{1}{(\sin x_0)^2}.$$
Dosadíme $x_0=\frac{\pi}{4}$ a odvodíme:
$$(\cot x_0)'=-\frac{1}{(\sin x_0)^2}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{2.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\approx -1{,}41.$$

Veta *Nech funkcia $x=f(y)$ je spojitá a rýdzomonotónna na intervale (a,b), pričom má v bode $x_0=f(y_0)$ deriváciu $f'(y_0)\neq 0$,*
potom
k nej inverzná funkcia $f^{-1}(x)=y$ má deriváciu v odpovedajúcom bode $x_0=f(y_0)$ a platí:
$$(f^{-1}(x_0))'=-\frac{1}{f'(y_0)}.$$

Veta umožňuje odvodiť niektoré vzorce pre derivácie cyklometrických funkcií.

Príklad Určte deriváciu funkcie $f: y = \arcsin\ x$ na intervale $(-1,1)$.

Riešenie. Počas výpočtu použijeme identitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
Ak uvážime, že $y = \arcsin\ x$ má inverznú funkciu $x = \sin y$ a funkcia je na intervale $(-1,1)$ spojitá a rýdzomonotónna, potom podľa vety platí

$$(arc\sin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(arc\sin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Veta *Nech funkcia $u = g(x)$ má v bode x_0 deriváciu; funkcia $y = f(u)$ má deriváciu v bode $u_0 = g(x_0)$, potom zložená funkcia $y = f[g(x)]$ má v bode x_0 deriváciu a platí*

$$(f[g(x)])' = f'(u_0).g'(x_0).$$

Príklad Vypočítajte deriváciu funkcie $f: y = \cos(\ln x)$ na intervale $(0, \infty)$.

Riešenie. Funkcia $y = \cos(\ln x)$ je zložená funkcia, kde $g: u = \ln x$, $f: y = \cos u$. Podľa vety odvodíme

$$f'(u) = (\cos u)' = -\sin u$$

$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\cos(\ln x))' = (-\sin u).\frac{1}{x} = -\frac{\sin(\ln x)}{x}.$$

Veta *Ak pre funkcie $y = f(x), y = g(x)$ platí, že pre každé $x \in D(f) \cap D(g)$:*

a) $f(x) > 0$,
b) existujú ich derivácie v bode $x_0 \in D(f) \cap D(g)$,

potom pre deriváciu funkcie $y = f(x)^{g(x)}$ v bode x_0 platí:

$$\left(f(x_0)^{g(x_0)}\right)' = f(x_0)^{g(x_0)}.\left[\ln\left(f(x_0)\right)^{g'(x_0)} + \frac{g(x_0)}{f(x_0)}f'(x_0)\right].$$

Dôkaz. Funkciu $y = f(x)^{g(x)}$ najprv zlogaritmujeme a následne ako zloženú funkciu zderivujeme podľa premennej x.

$$y = f(x)^{g(x)}$$

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x).\ln f(x)$$

$$(\ln y)' = (g(x).\ln f(x))'$$

$$\frac{y'}{y} = g'(x).\ln f(x) + g(x).(\ln f(x))'$$

$$\frac{y'}{y} = g'(x).\ln f(x) + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Z poslednej rovnosti vyplýva, že

$$\left(f(x_0)^{g(x_0)}\right)' = f(x_0)^{g(x_0)}.\left[g'(x_0).\ln f(x_0) + \frac{g(x_0)}{f(x_0)}f'(x_0)\right]$$

$$\left(f(x_0)^{g(x_0)}\right)' = f(x_0)^{g(x_0)}.\left[\ln\left(f(x_0)\right)^{g'(x_0)} + \frac{g(x_0)}{f(x_0)}f'(x_0)\right].$$ ■

Príklad Vypočítajte deriváciu funkcie $y = (\cos x)^{\sin x}$ na intervale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Riešenie. Pomocou predchádzajúcej vety určíme

$$y = f(x) = \cos x, \qquad y = g(x) = \sin x$$

a vypočítame:

$$\left((\cos x)^{\sin x}\right)' = (\cos x)^{\sin x}.\left[(\sin x)'.\ln(\cos x) + \frac{\sin x}{\cos x}(\cos x)'\right] =$$

$$= (\cos x)^{\sin x}.\left[\cos x\,.\ln(\cos x) + \frac{\sin x}{\cos x}.(-\sin x)\right] =$$

$$= (\cos x)^{\sin x}.\,[\ln(\cos x)^{\cos x} - \tan x\,.\sin x]$$

3.6 Poznámka k derivácii vyššieho rádu

Ak má funkcia $y = f(x)$ v okolí bodu x_0 deriváciu $f'(x)$ a táto derivácia je tiež definovaná v okolí bodu x_0, môžeme pomocou limity definovať deriváciu z derivácie $f'(x)$, t.j.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0)$$

a hovoríme o **derivácii 2. rádu** v bode x_0.

Derivácie 1. rádu, 2. rádu a 3.rádu sa zvyčajne označujú čiarkami, derivácie 4. a vyššieho rádu pomocou príslušnej číslice v zátvorke, ktorá sa píše do pravého horného indexu.

Všeobecne, ak označíme deriváciu n –tého rádu v bode x_0 ako $f^{(n)}(x_0)$, potom

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Ak uvažujeme o derivácii n –tého rádu v bode x_0, potom predpokladáme, že existujú všetky derivácie nižších rádov a sú definované v istých okoliach bodu x_0.

Veta *Ak funkcie $y = f(x), y = g(x)$ majú derivácie až do $n -$ tého rádu, potom majú deriváciu $n -$ tého rádu aj funkcie*

a) $c_1.f(x) + c_2.g(x), \quad c_1, c_2 \in R$
b) $f(x).g(x)$

a platí

a) $\left(c_1.f(x) + c_2.g(x)\right)^{(n)} = c_1.f^{(n)}(x) + c_2.g^{(n)}(x)$

b) $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} =$

$$= \binom{n}{0}.f^{(n)}(x).g^{(0)}(x) + \binom{n}{1}.f^{(n-1)}(x).g'(x) + \cdots + \binom{n}{n}.f^{(0)}(x).g^{(n)}(x),$$

kde $f^{(0)}(x) = f(x), g^{(0)}(x) = g(x).$

3.7 Cvičenie

1. Vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$ v bode x_0.

a) $y = x + 1, x_0 = 3$ b) $y = |x|, x_0 = -1$ c) $y = x^3 + 1, x_0 = 0$

2. Vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$ v bode x_0, ak

a) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\,, x_0 = 0$ b) $y = x^2 - \frac{1}{x^2}, x_0 = (-2)$

3. Určte deriváciu funkcie z definície:

a) $y = x^2 - 3x + 5$ b) $y = \frac{1+x+x^2}{x}, x \neq 0$ c) $y = \frac{1}{x}, x \neq 0.$

4. Vypočítajte derivácie funkcií:

a) $y = 5(3x^2 - 2x + 7)$ b) $y = \left(a - \sqrt{x}\right)^2$ c) $y = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

d) $y = \frac{1}{(5-x)^2}$ e) $y = \frac{x}{(x+5)(1-x)}$ f) $y = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^3}$

5. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode P:

a) $y = x^2 - x$, $P[-1, ?]$ b) $y = x^2 - 2x + 3$, $P[-2, ?]$.

6. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode x_0:

a) $y = \frac{8}{4+x^2}$, $x_0 = 2$ b) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

7. Napíšte rovnice dotyčnice ku grafu funkcie$y = \ln x$, ak dotyčnica má byť rovnobežná s priamkou $y = x + 5$. Určte súradnice dotykového bodu A.

8. Aká je okamžitá rýchlosť telesa v čase $t_0 = 2s$, ak sa pohybuje priamočiaro a dĺžka ním prejdenej dráhy je určená vzťahom $d = \frac{1}{2}t^2$? Aká je priemerná rýchlosť na úseku $\langle t_1, t_2 \rangle$, ak $t_1 = 0{,}5s$, $t_2 = 5s$?

9. Vypočítajte derivácie funkcií:

a) $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ b) $y = \sqrt{4x + \sin 4x}$ c) $y = \tan(x + 1).\operatorname{cotan} x$

10. Vypočítajte derivácie funkcií:

a) $y = e^{-x^2}$ b) $y = e^{\sin^3 x}$ c) $y = e^x(\sin x - \cos x)$

d) $y = \ln(2x + \sin x)$ e) $y = \frac{\ln x}{x}$ f) $y = \ln \frac{e^x}{x^2+1}$

11. Vypočítajte derivácie funkcií:

a) $y = x^{\sin x}$ b) $y = x^{\frac{1}{x}}$ c) $y = x^{\ln x}$

12. Vypočítajte derivácie funkcií:

a) $y = arc\sin 3x$ b) $y = arc\cos\frac{1}{x}$ c) $y = \ln(arc\sin 2x)$

13. Vypočítajte n –tú deriváciu funkcie $y = f(x)$:

a) $y = \ln(x + 1), x > (-1),\ n = 2$ b) $y = e^{-x}.\sin x, n = 4$ c) $y = \frac{\ln x}{x}, x > 0,\ n = 4$

4 Diferencovateľná funkcia

Diferencovateľnosť funkcie je jednou z dôležitých vlastností funkcie a má priamy súvis s deriváciou funkcie.

Definícia Nech je funkcia $y = f(x)$ definovaná v okolí bodu x_0. Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je v bode x_0 **diferencovateľná**, ak

a) je definovaná v okolí bodu x_0,

b) pre každé x z okolia bodu x_0 môžeme prírastok $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, ktorý prislúcha prírastku $\Delta x = x - x_0$ vyjadriť v tvare

$$f(x) - f(x_0) = A.\Delta x + \omega(\Delta x).\Delta x,$$

kde A je reálne číslo, $\omega(\Delta x)$ je spojitá funkcia prírastku Δx a platí $\lim_{\Delta x \to 0} \omega(\Delta x) = 0$.

Príklad Zistite, či funkcia $y = x^3$ je diferencovateľná v bode $x_0 = \frac{1}{2}$ z jej definičného oboru. Ak áno, určte prírastok Δy pre $\Delta x = 0{,}01$.

Riešenie. Zistíme, či pre prírastok funkcie $y = x^3$ existuje v zmysle definície reálne číslo A, odpovedajúca spojitá funkcia $\omega(\Delta x)$. Počítajme:

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 =$$
$$= x_0^3 + 3x_0^2.\Delta x + 3x_0.(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2.\Delta x + 3x_0.(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 =$$
$$= 3x_0^2.\Delta x + (3x_0.\Delta x + (\Delta x)^2).\Delta x$$

Dosadíme za $x_0 = \frac{1}{2}$ a dostaneme

$$f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) = x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\Delta x + \left(3.\frac{1}{2}\Delta x + (\Delta x)^2\right).\Delta x$$
$$x^3 - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.\Delta x + \left(\frac{3}{2}\Delta x + (\Delta x)^2\right).\Delta x.$$

Ak položíme $A = \frac{3}{4}$ a označíme $\omega(\Delta x) = \frac{3}{2}\Delta x + (\Delta x)^2$ ako funkciu premennej Δx , potom treba už len overiť spojitosť funkcie $\omega(\Delta x)$ a jej limitu pre $\Delta x \to 0$.

Funkcia $\omega(\Delta x) = \frac{3}{2}\Delta x + (\Delta x)^2$ ako kvadratická funkcia premennej Δx je spojitá a platí:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \omega(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{3}{2}\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 0.$$

Funkcia $y = x^3$ je diferencovateľná v bode $x_0 = \frac{1}{2}$.

Ak $\Delta x = 0{,}01$, potom

$$x^3 - \frac{1}{8} = \Delta y = \frac{3}{4}.0{,}01 + \left(\frac{3}{2}0{,}01 + (0{,}01)^2\right).0{,}01$$
$$\Delta y = \frac{3}{4}.0{,}01 + \left(\frac{3}{2}.0{,}01 + (0{,}01)^2\right).0{,}01$$
$$\Delta y = 0{,}0075 + (0{,}015 + 0{,}0001).0{,}01$$
$$\Delta y = 0{,}0075 + (0{,}0151).0{,}01$$
$$\Delta y = 0{,}075151$$

Ak od bodu $x_0 = \frac{1}{2}$ na osi x „odskočíme“ o $\Delta x = 0{,}01$ vľavo alebo vpravo, funkčná hodnota sa zmení z hodnoty $y_0 = \frac{1}{8}$ o $\Delta y = 0{,}075151$ nasledovne:

a) pre $x_0 = \frac{1}{2} - 0{,}01$ klesne na hodnotu $f(x_0 - 0{,}01) = 0{,}05349$

b) pre $x_0 = \frac{1}{2} + 0{,}01$ narastie na hodnotu $f(x_0 + 0{,}01) = 0{,}19651$.

Definícia **Diferenciálom** funkcie $y = f(x)$ v bode x_0 nazývame **výraz** $\boldsymbol{A}.\Delta\boldsymbol{x}$.

Diferenciál $\boldsymbol{A}.\Delta\boldsymbol{x}$ je lineárnou funkciou premennej Δx, ktorú zapisujeme

$$\boldsymbol{df(x_0) = A.\Delta x}$$

Uvažujme o diferencovateľnej funkcii $y = f(x)$ v bode x_0 a pre $\Delta x \neq 0$ odvodíme:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A.\Delta x + \omega(\Delta x).\Delta x,$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \omega(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} A\omega(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A + 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$$

$$f'(x_0) = A.$$

Veta *Funkcia $y = f(x)$ je v bode x_0 diferencovateľná vtedy a len vtedy, keď má v bode x_0 deriváciu a platí:*

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

Príklad Vypočítajte diferenciál funkcie $y = \sqrt[3]{x+8}$ v bode $x_0 = 0$ a zistite jeho hodnotu pre prírastok $\Delta x = 0{,}01$.

Riešenie. Vypočítame deriváciu zloženej funkcie $y = \sqrt[3]{x+8}$ v bode $x_0 = 0$.

$$y' = f'(x) = (x+8)'.\left(\sqrt[3]{u}\right)' = 1.\left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = 1.\frac{1}{3}.u^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{1}{3}.u^{-\frac{2}{3}} = \cdots = \frac{1}{3.\sqrt[3]{(x+8)^2}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{3.\sqrt[3]{(0+8)^2}} = \frac{1}{3.\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}$$

Diferenciál funkcie $y = \sqrt[3]{x+8}$ v bode $x_0 = 0$ je výraz

$$df(0) = \frac{1}{12}.\Delta x,$$

ktorý sa pre $\Delta x = 0{,}01$ rovná $df(0) = \frac{1}{12}.0{,}01 \approx 0{,}00083$.

4.1 Diferenciál a približné výpočty

Ak uvažujeme, že prírastok $\Delta x \to 0$, potom diferenciál $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$ sa tiež limitne blíži k 0. Rovnako aj $\omega(\Delta x).\Delta x \to 0$ a môžeme písať

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0).$$

Odtiaľ vyplýva, že hodnotu funkcie $y = f(x)$ v bode $x_0 + \Delta x$ možno v „rozumne malom " okolí bodu x_0 približne vypočítať pomocou vzorca

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$$

Príklad Vypočítajte približnú hodnotu $e^{1.05}$, ak $e \approx 2{,}71828$.

Riešenie. Uvažujme funkciu $y = e^x$ a bod $x_0 = 1$. Ďalej určíme prírastok $\Delta x = 1{,}05 - 1 = 0{,}05$ a deriváciu funkcie $y' = (e^x)' = e^x$. Použijeme predchádzajúci vzorec a odvodíme:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$$
$$e^{1{,}05} = e^{1+0{,}05} \approx e^1 + (e^1)'.0{,}05$$
$$e^{1{,}05} \approx 2{,}71828 + 2{,}71828\,.\,0{,}05 = 2{,}85419.$$

Príklad Matematické kyvadlo má periódu určenú vzťahom $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, kde l je dĺžka vlákna, na ktorom je zavesené závažie, a $g \approx 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$. Vypočítajte približnú hodnotu o koľko upraviť dĺžku pôvodne $20cm$ dlhého vlákna, aby sa perióda zmenila o $0{,}1s$.

Riešenie. Ak má kyvadlo $0{,}2m$ dlhé vlákno, jeho perióda sa rovná

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{9{,}81}} = 2.3{,}14\sqrt{0{,}02038} = 6{,}28\,.\,0{,}14278 = 0{,}89668\ s$$

Ďalej upravíme daný vzťah:

$$g.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = l$$
$$\frac{g}{4\pi^2}.T^2 = l$$

a použijeme diferenciál upravenej funkcie v bode T_0 s prírastkom $\Delta T = 0{,}1$.

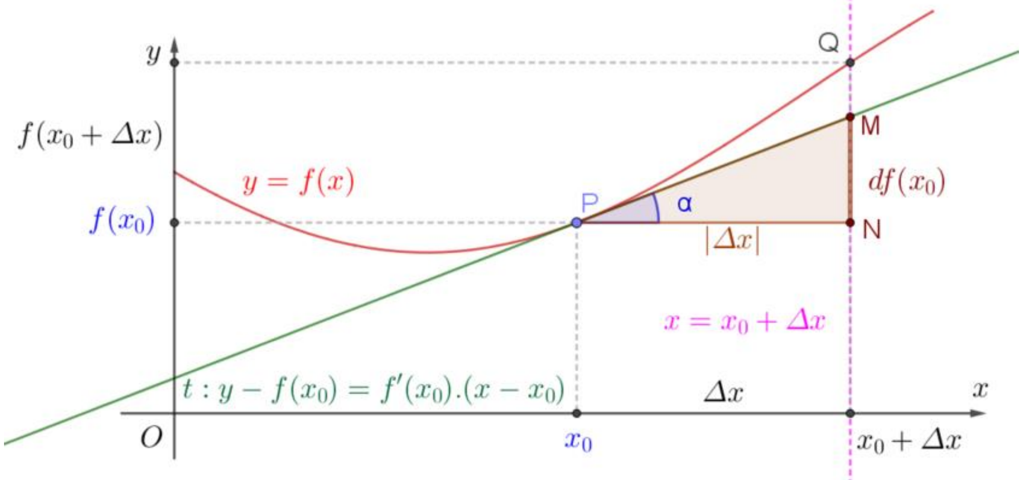
$$\Delta l \approx \left(\frac{g}{4\pi^2}.T^2\right)'.\Delta T$$
$$\Delta l \approx \frac{g}{4\pi^2}.2T_0.\Delta T$$
$$\Delta l \approx \frac{9{,}81}{2\,.\,(3{,}14)^2}.0{,}89668\,.\,0{,}01 = 0{,}04456m$$

Ak sa má pôvodná perióda $T_0 = 0{,}89668s$ zvýšiť o $0{,}1s$, je potrebné predĺžiť vlákno o $4{,}456\ cm$ na dĺžku $24{,}456\ cm$.

Ak sa má perióda T_0 o $0{,}1s$ znížiť, musíme vlákno o $4{,}456\ cm$ skrátiť na dĺžku $15{,}544\ cm$.

4.2 Geometrický význam diferenciálu

Nech funkcia $y = f(x)$ má v bode $P[x_0, f(x_0)]$ zostrojenú dotyčnicu $t: y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$.



Obr. 4. 1

Na grafe funkcie vyznačíme ďalší bod $Q[x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)]$. Priamka $x = x_0 + \Delta x$ zostrojená bodom Q kolmo na os x, pretína dotyčnicu t v bode M.

Súčasne na danej priamke leží aj bod $N[x_0 + \Delta x, f(x_0)]$. V pravouhlom trojuholníku PMN platí:

$$\tan\alpha = \frac{|MN|}{|PN|} = \frac{|MN|}{|\Delta x|}.$$

Keďže $\tan\alpha = f'(x_0)$, odvodíme $\quad |MN| = f'(x_0).|\Delta x| = |df(x_0)|.$

Diferenciál $df(x_0)$ v absolútnej hodnote je geometricky dĺžka úsečky MN, ktorá reprezentuje tzv. **prírastok na dotyčnici** t.

4.3 Cvičenie

1. Ukážte, že funkcia $y = 5x - x^2$ je diferencovateľná a určte prírastok Δy pre $x_0 = 2$ a $\Delta x = 0{,}001$.

2. Vypočítajte približnú hodnotu funkcie $y = f(x)$ pre:

   a) $y = \sqrt{1+x}$ pre $x = 0{,}2$ b) $y = e^{1-x^2}$ pre $x = 1{,}05$

3. Približne vypočítajte:

   a) $\sqrt[4]{17}$ b) $arc\sin 0{,}54$ c) $\arctan\frac{4}{3}$.

4. Vypočítajte diferenciál funkcie $y = f(x)$ pre ľubovoľné x a Δx:

   a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ b) $y = x^n.e^x.\ln x\,, x > 0$ c) $y = \frac{x}{1-x}$

5 Významné vety diferenciálneho počtu

Veta (Fermat) *Ak funkcia $y = f(x)$ definovaná na intervale (a, b) v bode x_0 tohto intervalu nadobúda maximálnu (alebo minimálnu) hodnotu a má v bode x_0 deriváciu (vlastnú alebo nevlastnú), potom pre jej deriváciu platí:* $f'(x_0) = 0.$

Dôkaz. Predpokladajme, že funkcia $y = f(x)$ má na intervale najväčšiu hodnotu v bode x_0 a súčasne v tomto bode x_0 existuje aj derivácia $f'(x_0)$.

1) Uvažujme o bode x_1 z intervalu (a, b) také, že $x_1 < x_0$. Keďže v x_0 je najväčšia hodnota, platí: $f(x_1) \leq f(x_0)$. Z toho vyplýva, že
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$$
a pre jednostrannú limitu platí: $\lim\limits_{x_1 \to x_0^-} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$
2) Ak uvažujeme o bode x_2 z intervalu (a, b) také, že $x_0 < x_2$ a tiež je v x_0 je najväčšia hodnota, potom máme: $f(x_2) \leq f(x_0)$. Z toho zase vyplýva, že
$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq 0$$
a pre jednostrannú limitu platí: $\lim\limits_{x_2 \to x_0^+} \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq 0$

Z uvedeného dostávame
$$\lim_{x_2 \to x_0^+} \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq 0 \leq \lim_{x_1 \to x_0^-} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$
Keďže jednostranné derivácie sa rovnajú samotnej derivácii, platí $f'(x_0) = 0.$ Obdobný dôkaz by sa previedol pre minimum v bode x_0. ■

Fermatova veta má zaujímavý geometrický dôsledok.
Ak funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 extrém a existuje v danom bode x_0 derivácia, dotyčnica v bode x_0 je **rovnobežná** s osou x.

Treba si tiež uvedomiť, že podmienka existencie derivácie $f'(x_0)$ v bode x_0 je dôležitá. Vhodným príkladom je funkcia $y = |x|$, ktorá má v bode $x_0 = 0$ minimum, ale derivácia v danom bode neexistuje (nemôže sa rovnať 0).

Veta (Rolle) *Ak funkcia $y = f(x)$ vyhovuje podmienkam:*

a) je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$,

b) v každom bode otvoreného intervalu (a, b) má deriváciu (vlastnú alebo nevlastnú),

c) $f(a) = f(b)$,

potom

existuje aspoň jeden bod $x_0 \in (a, b)$ taký, že $f'(x_0) = 0.$

Veta (Lagrange) *Ak funkcia $y = f(x)$ vyhovuje podmienkam:*

a) je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$,

b) v každom bode otvoreného intervalu (a, b) má deriváciu (vlastnú alebo nevlastnú),

potom

existuje aspoň jeden bod $x_0 \in (a, b)$ taký, že $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

Dôkaz. Uvažujme o pomocnej funkcii $F(x) = f(x) + \lambda . x$, kde $\lambda \in R$ je vhodná konštanta. Určíme ju tak, aby $F(a) = F(b)$. K tomu je potrebné, aby platilo:

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

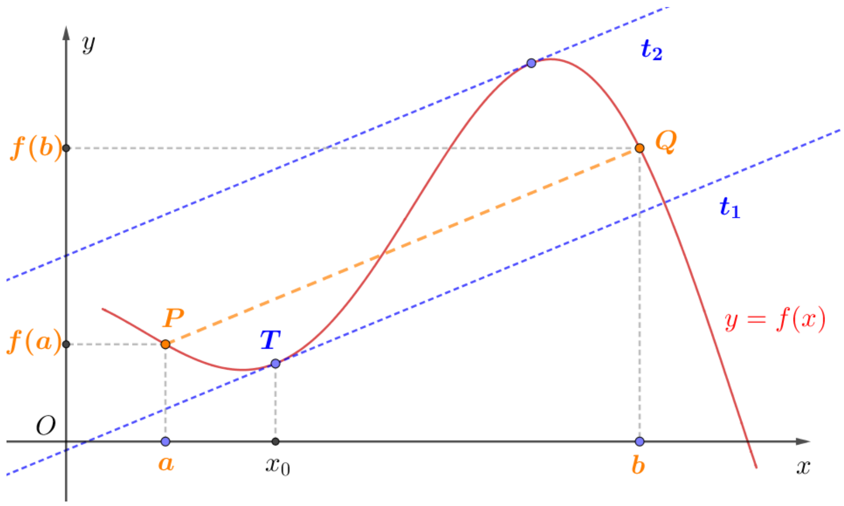
Ak je takto zvolená konštanta λ, pomocná funkcia $y = F(x)$ spĺňa predpoklady Rolle-ho vety a existuje taký bod $x_0 \in (a, b)$, že $F'(x_0) = 0$.
Z toho vyplýva, že:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Langrange-ova veta sa niekedy v literatúre nazýva aj **veta o strednej hodnote funkcie**. Geometrický význam je zrejmý. Podiel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ reprezentuje smernicu k sečnice grafu funkcie, ktorá je určená bodmi $P[a, f(a)], Q\ [b, f(b)]$.
Vzhľadom na dokazovanú rovnosť $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sa jedná aj o smernicu dotyčnice t ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $T[x_0, f(x_0)]$. Smernica PQ a dotyčnica t sú rovnobežné.

Ak využijeme fyzikálnu interpretáciu, priemerná rýchlosť priamočiaro sa pohybujúceho bodu na úseku $\langle a, b \rangle$, ktorá je určená podielom $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sa rovná okamžitej rýchlosti v bode x_0.
Teda, ak pohybujúci sa hmotný bod mal na úseku $\langle a, b \rangle$ pri priamočiarom pohybe nejakú priemernú rýchlosť, počas jeho trajektórie musel nastať aspoň jeden okamih, keď sa jeho okamžitá rýchlosť vyrovnala s priemernou rýchlosťou.



Obr. 5. 1

Príklad Odhadnite hodnotu $arc\tan\frac{1}{2}$ pomocou Langrange-ovej vety.

Riešenie. Uvažujme funkciu $y = arc\tan x$ na intervale $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Funkcia $y = arc\tan x$ je na danom intervale spojitá a má deriváciu, ktorá sa pre každé $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ rovná:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Podľa Lagrange-ovej vety existuje na intervale $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ taký bod x_0, pre ktorý platí:

$$f'(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2} = \frac{arc\tan\frac{1}{2} - arc\tan 0}{\frac{1}{2} - 0}$$

$$\frac{1}{1+x_0^2} = \frac{arc\tan\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2(1+x_0^2)} = arc\tan\frac{1}{2}$$

Odhadneme hodnotu $\frac{1}{1+x_0^2}$. Keďže $x_0 \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, platí:

$$0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x_0^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$0 + 1 \leq 1 + x_0^2 \leq \frac{1}{4} + 1$$

$$2 \leq 2(1+x_0^2) \leq \frac{5}{2}$$

$$\frac{2}{5} \leq \frac{1}{2(1+x_0^2)} \leq \frac{1}{2}$$

Odtiaľ vyplýva: $\mathbf{0,4 \leq \boldsymbol{arc}\,tan\frac{1}{2} \leq 0,5}$

Istým zovšeobecnením Langrange-ovej vety je Cauchy-ho veta.

***Veta* (Cauchy)** *Ak funkcie $y = f(x)$, $y = g(x)$ vyhovujú podmienkam:*

a) sú spojité na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$,

b) v každom bode otvoreného intervalu (a, b) má funkcia $y = f(x)$ deriváciu $f'(x)$ (vlastnú alebo nevlastnú),

c) v každom bode otvoreného intervalu (a, b) má funkcia $y = g(x)$ vlastnú deriváciu $g'(x) \neq 0$,

potom

existuje aspoň jeden bod $x_0 \in (a, b)$ taký, že $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Dôkaz je analogický ako pri dôkaze Langrange-ovej vety. Položíme pomocnú funkciu $y = F(x)$, ktorá sa definuje nasledovne: $F(x) = f(x) - \lambda . g(x)$, $\lambda \in R$, kde $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

***Veta* (L' Hospital-ovo pravidlo)** *Nech funkcie $y = f(x)$, $y = g(x)$ spĺňajú podmienky*

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

alebo

b) $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

Ak existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potom existuje aj $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x)}.$$

L' Hospitalovo pravidlo určuje spôsob, ako vypočítať limitu z podielu dvoch funkcií, ak je limita čitateľa i menovateľa nulová, alebo limita menovateľa v absolútnej hodnote je ∞.

Príklad Ukážte, že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Riešenie. Keďže $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x$ a počítame:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Limita z podielu derivácií existuje, existuje teda aj pôvodná limita z podielu funkcií $y = \sin x$ a $y = x$ a rovná sa 1.

Príklad Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Riešenie. Použijeme L' Hospitalovo pravidlo opakovane.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}\left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}\left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}\left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Výsledok: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2$.

Príklad Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln x}$.

Riešenie. Pre menovateľ platí, že $\lim\limits_{x\to 0}|\ln x| = \infty$. Použijeme L' Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\ln x}\left\|\frac{0}{-\infty}\right\| = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} 2x^2 = 0$$

Výsledok je limita rovná 0.

Príklad Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 5x}$.

Riešenie. Platí, že $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}|\tan x = \infty =|\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}|\tan 5x|$ a máme limitu typu „$\frac{\infty}{\infty}$“. Aplikujeme L'Hospitalovo pravidlo opakovane.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 5x}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan x\,)'}{(\tan 5x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{cos^2 x}}{\frac{5}{cos^2 5x}} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cos^2 5x}{cos^2 x} = \frac{1}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 5x}{\cos x}\right)^2\left\|\frac{0}{0}\right\| =$$

$$\frac{1}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{5.(-\sin 5x)}{-\sin x}\right)^2 = \frac{25}{5}.\frac{-1}{-1} = 5.$$

Príklad Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x$.

Riešenie. Ak uvážime, že $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ a $= \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, potom máme limitu typu „$0.(-\infty)$“. Výraz $x.\ln x$ upravíme na podiel a použijeme L' Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left\|\frac{-\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Príklad Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$.

Riešenie. Ak uvážime, že $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}|\tan x| = \infty$ a $= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{\cos x}\right|$, potom máme limitu typu „$\infty - \infty$“. Výraz upravíme a použijeme L' Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{\cos x}\left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Z riešení uvedených príkladov vyplýva, že L' Hospitalovo pravidlo môžeme aplikovať na výpočet limít tzv. **neurčitých výrazov** typu $\frac{0}{0}, \frac{0}{\infty}, 0.\infty, \frac{\infty}{\infty}$ alebo $\infty - \infty$.

Neurčitými výrazmi sa nazývajú limity podielu, rozdielu, súčinu alebo aj mocniny funkcií, kde limity jednotlivých funkcií existujú, avšak príslušná operácia medzi nimi nie je definovaná (alebo sa nedá odvodiť z viet o nevlastných limitách).

Ukážeme si, ako vypočítať zostávajúce limity typu 1^∞, ∞^0 alebo 0^0.

Ak funkcia $y = f(x)$ je kladná pre každé $x \in D(f)$, potom

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x).\ln f(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x).\ln f(x)}$$

Príklad Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Riešenie. Ide o limitu typu 0^0, kde $y = f(x) = x$, $y = g(x) = x$. Ak uvažujeme $x \in (0,\infty)$, potom $f(x) > 0$ a počítame:

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x.\ln x}$$

Limita $\lim\limits_{x\to 0} x.\ln x$ je typu $0.\infty$ a podľa príkladu vyššie platí $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x = 0$.

Výsledok

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x} = e^0 = 1$$

5.1 Cvičenie

1. Overte splnenie podmienok Rolleovej vety pre funkciu $y = \tan x$ na intervale $\langle 0,\pi\rangle$.
2. Overte splnenie podmienok Lagrangeovej vety pre funkciu $y = x - x^2$ na intervale $\langle -2,1\rangle$ a nájdite odpovedajúce $x_0 \in \langle -2,1\rangle$.
3. Nájdite na parabole $y = x^2$ medzi bodmi $A[1,1]$, $B[3,9]$ taký bod $C[x_0, ?]$, aby dotyčnica t v bode C bola rovnobežná so sečnicou AB.
4. Ak pre funkciu $y = f(x)$ platí, že $f(0) = (-3)$ a súčasne $f'(x) \le 5$ pre všetky $x \in D(f)$, potom $f'(2) \le 7$. Dokážte pomocou Lagrange-vej vety.
5. Vypočítajte L' Hospitalovým pravidlom

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x+2}{x^3-7x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x.\cos x-\sin x}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^5}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x . \ln(x-1))$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} x.\sin\frac{1}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

6 Monotónnosť funkcie

Monotónnosť funkcie je pojem, ktorým sa označuje, či funkcia na istom intervale rastie alebo klesá. Exaktne to vymedzuje definícia.

Definícia Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je na definičnom obore $D(f)$:

a) **rýdzomonotónna**, ak je rastúca alebo klesajúca,

b) **monotónna,** ak je neklesajúca alebo nerastúca.

Len pripomíname, že funkcia je:

a) rastúca, ak $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

b) klesajúca, ak $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

c) nerastúca, ak $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,

d) neklesajúca, ak $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

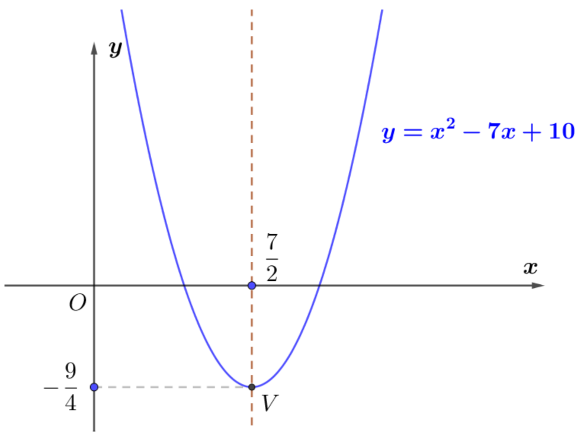
Veta *Nech funkcia $y = f(x)$ je spojitá na intervale (a, b) a má deriváciu v každom jeho vnútornom bode x_0.*
Funkcia $y = f(x)$ je neklesajúca vtedy a len vtedy, keď pre každé $x \in (a, b)$ platí: $f'(x) \geq 0$.

Dôkaz. 1 $\Rightarrow$) Nech funkcia $y = f(x)$ je spojitá na intervale (a, b) , má v každom jeho vnútornom bode deriváciu a súčasne je neklesajúca. Ukážeme, že derivácia $f'(x)$ je nezáporná.
Keďže je funkcia neklesajúca, potom pre $x_1 < x_2$ z intervalu (a, b) je $f(x_1) \leq f(x_2)$ a platí, že podiel $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. V každom vnútornom bode intervalu (a, b) existuje derivácia, preto má zmysel aj limita

$$0 \leq \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_2).$$

2 $\Leftarrow$) Nech funkcia $y = f(x)$ je spojitá na intervale (a, b), má v každom jeho vnútornom bode deriváciu, ktorá je nezáporná. Ukážeme, že funkcia $y = f(x)$ je neklesajúca. Podľa Lagrange-ovej vety existuje na intervale (x_1, x_2) bod x_0, pre ktorý platí $f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Súčasne je derivácia nezáporná, teda $f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. Z podmienky $x_1 < x_2$ dostávame, že $f(x_1) \leq f(x_2)$. Tým sme dokázali, že funkcia $y = f(x)$ je neklesajúca. ■

Príklad Zistite intervaly, na ktorých je funkcia $y = x^2 - 7x + 10$ monotónna.



Obr. 6. 1

Riešenie. Zderivujeme funkciu $y = x^2 - 7x + 10$ a jej deriváciu položíme väčšiu alebo rovnú 0.

$$y' = 2x - 7 \geq 0 \iff x_0 \geq \frac{7}{2}.$$

Funkcia $y = x^2 - 7x + 10$ je na intervale $\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$ rastúca.

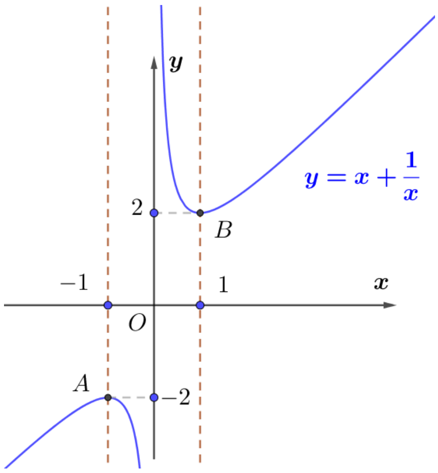
Obdobne, ak by sme položili $y' = 2x - 7 \leq 0$, zistíme, že funkcia je na intervale $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ klesajúca.

Z riešenia príkladu sú zrejmé dôsledky.

*Dôsledok 1. Na intervale (a, b) spojitá funkcia $y = f(x)$, ktorá má v každom vnútornom bode tohto intervalu deriváciu je **rastúca** vtedy a len vtedy, keď $f'(x) > 0$.*

*Dôsledok 2. Na intervale (a, b) spojitá funkcia $y = f(x)$, ktorá má v každom vnútornom bode tohto intervalu deriváciu je **klesajúca** vtedy a len vtedy, keď $f'(x) < 0$.*

Príklad Zistite intervaly, na ktorých je funkcia $y = x + \frac{1}{x}$ monotónna.



Obr. 6. 2

Riešenie. V prvom rade si treba uvedomiť, že funkcia $y = x + \frac{1}{x}$ je definovaná na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Pre jej deriváciu odvodíme

$$y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = \cdots = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Deriváciu položíme rovnú 0 a dostaneme

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \iff \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Definičný obor rozdelíme na čiastkové intervaly a určíme hodnoty derivácií vo vnútorných bodoch týchto intervalov[22]. Prehľadne zapíšeme do tabuľky.

Tab. 6.1

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$	nedef.	$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$
$f(x)$	rastie		klesá		klesá		rastie
	↗		↘	-	↘		↗

[22] Určiť hodnotu derivácie vo vnútornom bode znamená vybrať niektorú hodnotu z daného intervalu a dosadiť ju do príslušnej derivácie, napr. z $(-\infty, -1)$ vyberieme hodnotu (-2) a počítame $f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 1}{(-2)^2} = \frac{3}{4} > 0$.

6.1 Cvičenie

1. Určte intervaly, kde funkcia rastie:

a) $y = x^2 + 4x + 5$ b) $y = x^5 - 15x^3 + 3$ c) $y = 3 - 2x^2 - x^4$

2. Určte intervaly, kde funkcia klesá:

a) $y = x^3 - 12x - 6$ b) $y = x^3 - 18x^2 + 27x - 7$ c) $y = 4x^2 - \frac{1}{x}$

3. Nájdite intervaly, na ktorých sú funkcie monotónne:

a) $y = x^3 - x$ b) $y = \frac{x}{1+x^2}$ c) $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x}$

d) $y = \frac{x}{x^2-1}$ e) $y = x - 2\ln x$ f) $y = \frac{\ln x}{x}$.

7 Stacionárny bod a extrémy funkcie

Ako sme ukázali v predchádzajúcich príkladoch, existujú funkcie, ktoré majú v istých bodoch derivácie rovné 0.

Definícia Bod $x_0 \in D(f)$ funkcie $y = f(x)$ sa nazýva **stacionárnym bodom,** ak existuje v danom bode x_0 derivácia a platí: $f'(x_0) = 0.$

Stacionárny bod je teda bodom, v ktorom **môže (ale aj nemusí)** existovať extrém. Pozrite si opäť znenie Fermatovej vety.

Definícia Nech $x_0 \in D(f)$ funkcie $y = f(x)$. Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 **lokálne maximum**, ak existuje také okolie $U(x_0)$ bodu x_0, že pre každé $x \in D(f) \cap U(x_0)$ platí:

$$f(x_0) \geq f(x).$$

Ak platí, že $f(x_0) > f(x)$, hovoríme o **ostrom lokálnom maxime**.

Analogicky sa definuje aj lokálne minimum a ostré lokálne minimum.

Na obr. 6.2 je ostré lokálne maximum v $x_1 = -1$ a nadobúda ho na grafe v bode $A[-1,-2]$; kým ostré lokálne minimum funkcia nadobúda v $x_2 = 1$ a na grafe je znázornené bodom $B[1,2]$.

Definícia Nech $x_0 \in D(f)$ funkcie $y = f(x)$. Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 **globálne maximum**, pre každé $x \in D(f)$ platí:

$$f(x_0) \geq f(x).$$

Ak platí, že $f(x_0) > f(x)$, hovoríme o **ostrom globálnom maxime**.

Analogicky sa definuje aj globálne minimum a ostré globálne minimum.

Na obr. 6.1 nadobúda v bode $x_0 = \frac{7}{2}$ funkcia $y = x^2 - 7x + 10$ ostré globálne minimum, ktoré na grafe znázornené bodom $V\left[\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right]$.

Veta *Nech funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode x_0 a súčasne pre každé x z ľavého okolia bodu x_0 je derivácia $f'(x) > 0$; pre každé x z pravého okolia bodu x_0 je derivácia $f'(x) < 0$, potom má funkcia $y = f(x)$ v bode x_0 ostré lokálne maximum.*

Všimnime si Tab. 6.1. Funkcia $y = x + \frac{1}{x}$ má na intervale $(-\infty, 1)$ t.j. ľavom okolí bodu $x_0 = -1$ kladnú deriváciu, v pravom okolí bodu $x_0 = -1$, t.j. na intervale $(-1,0)$ má zase zápornú deriváciu.

V bode $x_0 = -1$ je ostré lokálne maximum.

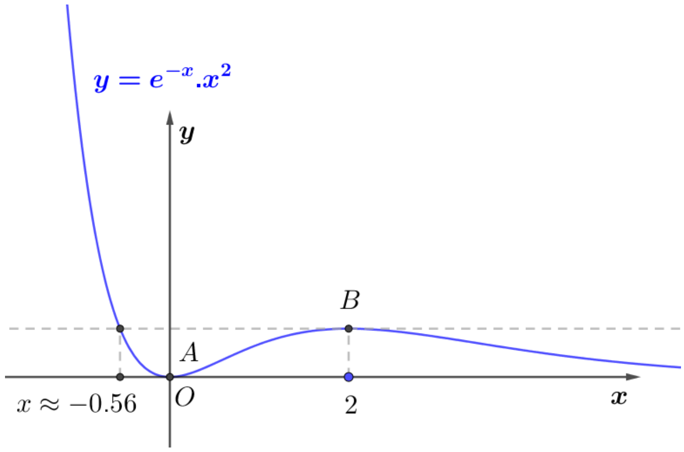
Príklad Určte extrémy funkcie $y = e^{-x}.x^2$.

Riešenie. Funkcia $y = e^{-x}.x^2$ je definovaná na $(-\infty, \infty)$. Pre jej deriváciu odvodíme

$$y' = (e^{-x}.x^2)' = -e^{-x}.x^2 + e^{-x}.2x = e^{-x}(-x^2 + 2x).$$

Stacionárnymi bodmi sú

$$e^{-x}(-x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$



Obr. 7. 1

Zistíme monotónnosť funkcie.

Tab. 7.1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	ostré	$f'(x) > 0$	ostré	$f'(x) < 0$
$f(x)$	klesá	lok.	rastie	lok.	klesá
	↘	min.	↗	max.	↘

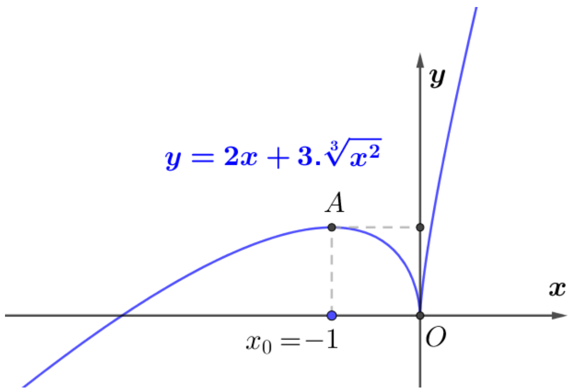
Funkcia $y = e^{-x}.x^2$ má v bode $x_1 = 0$ nielen ostré lokálne minimum, ale aj globálne minimum. V bode B na grafe funkcie je ostré lokálne maximum, ktoré však nie je globálnym maximom. Pre $x < -0.56$ funkcia nadobúda väčšie hodnoty ako pre $x = 2$.

Príklad Určte extrémy funkcie $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

Riešenie. Funkcia $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ je definovaná na $(-\infty, \infty)$. Vypočítame jej deriváciu a položíme ju rovnú 0.

$$y' = \left(2x + 3\sqrt[3]{x^2}\right)' = 2 + 3.\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 2 + 3.\frac{2}{3}\left(x^{\frac{2}{3}-1}\right) = 2 + 2.\left(x^{-\frac{1}{3}}\right) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} =$$

$$= 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \cdots = 2.\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 0 \iff 1 + \sqrt[3]{x} = 0.$$



Obr. 7.2

Odtiaľ vyplýva, že stacionárnym bodom je $x_0 = -1$. Súčasne si všimnime, že derivácia y' nie je definovaná pre $x = 0$.

Naviac, funkcia $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ nemá v bode $x = 0$ deriváciu, lebo

$$\lim_{x\to 0^-}\left(2.\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)=2.\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right)=-\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0^+}\left(2.\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)=\cdots=+\infty$$

Funkcia však môže mať extrém aj v bodoch, kde derivácia neexistuje. Z toho dôvodu v príslušnej tabuľke rozdelíme definičný obor na podintervaly nasledovne:

Tab. 7.2

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$f'(x)>0$	ostré lok. max.	$f'(x)<0$	ostré lok. min.	$f'(x)>0$
$\boldsymbol{f(x)}$	rastie ↗		klesá ↘		rastie ↗

Veta *Nech funkcia $y=f(x)$ má stacionárny bod x_0 a existuje $f"(x_0)$.*

a) Ak $f"(x_0)>0$, funkcia $y=f(x)$ má v bode x_0 ostré lokálne minimum.

b) Ak $f"(x_0)<0$, funkcia $y=f(x)$ má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

Príklad Určte extrémy funkcie $y=e^{-x}.x^2$ pomocou 2. derivácie.

Riešenie. V riešení (obr. 7.1) boli určené stacionárne body $x_1=0, x_2=2$. Vypočítame 2. deriváciu ako deriváciu 1. derivácie:

$$y"=\left(e^{-x}(-x^2+2x)\right)'=-e^{-x}(-x^2+2x)+e^{-x}(-2x+2)=e^{-x}.(x^2-4x+2).$$

Zistíme hodnotu 2. derivácie v stacionárnych bodoch:

a) $f"(0)=\ e^{-0}.(0^2-4.0+2)=\cdots=2>0.$

V bode $x_1=0$ je ostré lokálne minimum.

b) $f"(2)=\ e^{-2}.(2^2-4.2+2)=\cdots\approx-0{,}27<0.$

V bode $x_2=2$ je ostré lokálne maximum.

Veta *Nech funkcia $y=f(x)$ je spojitá na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$. Funkcia $y=f(x)$ nadobúda na $\langle a,b\rangle$ svoje globálne extrémy buď v bodoch lokálnych extrémov na intervale (a,b) alebo v krajných bodoch intervalu $\langle a,b\rangle$.*

Príklad Pravouholník $ABCD$ má konštantný obvod $2p$. Určte pomer dĺžok jeho strán tak, aby mal maximálny obsah.

Riešenie. Ak označíme $|AB|=x$, $|BC|=z$, potom pre obvod platí $2(x+z)=2p\Rightarrow z=p-x$. Obsah S zase odvodíme zo vzťahu $S=x(p-x)=px-x^2$.

Určíme extrém funkcie $S=px-x^2$ cez stacionárny bod.

$$S'=(px-x^2)'=p-2x=0.$$

Stacionárnym bodom je $x_0=\frac{p}{2}$.

Z druhej derivácie $S"\ =(-2)$ vyplýva, že v bode $x_0=\frac{p}{2}$ je globálne maximum. Výsledný pravouholník je štvorec a platí $|AB|=|BC|=\frac{p}{2}$.

7.1 Cvičenie

1. Určte extrémy funkcie

   a) $y=x^3-3x+3$ b) $y=\frac{x}{x-2}$ c) $y=\frac{x}{x^2-6x-16}$

d) $y = x.\ln x$ e) $y = 2^{\frac{1}{x-5}}$ f) $y = x + \sin x$

g) $y = \sqrt{2x - x^2}$ h) $y = x\sqrt[3]{x-1}$ i) $e^x.\sin x$

2. Určte extrémy funkcie $y = f(x)$ na intervale:

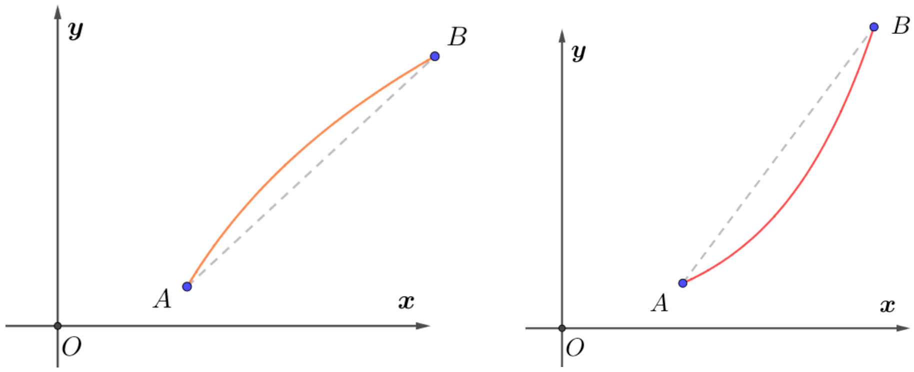
   a) $y = x^3, x \in \langle -1,3 \rangle$ b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, x \in \langle -10,12 \rangle$

   c) $y = \sqrt{5-4x}, x \in \langle -1,1 \rangle$ d) $y = |x^2 - 3x + 2|, x \in \langle -10,10 \rangle$

3. Určte lokálne extrémy funkcie $y = x + \frac{1}{x}$ a presvedčte sa, že pre každé $x \in D(f)$ platí:
$$\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2.$$
4. Určte koeficienty $p, q \in R$ tak, aby funkcia $y = x^2 + px + q$ nadobúdala minimum v bode grafu $A[1,3]$.
5. Určte globálne extrémy funkcie $y = e^x - 1 - x$ a ukážte, že pre každé $x \neq 0$ platí: $e^x > 1 + x$.
6. Stanovte rozmery otvoreného bazénu so štvorcovým dnom a objemom $30m^3$ tak, aby sa spotrebovalo minimum materiálu na obklad.
7. Do kružnice s polomerom r je vpísaný pravouholník. V akom pomere sú dĺžky jeho strán, ak má maximálny obsah?
8. Z tvrdého papiera v tvare obdĺžnika s rozmermi 2,5dm x $4dm$ sa v jeho rohoch vystrihli štvorce tak, aby z papiera zložená krabica mala maximálny objem. Aká dlhá je strana vystrihnutých štvorcov?
9. Rýchlosť chemickej oxidácie určitej látky je daná vzťahom $v = k.(100c^2 - c^3)$, kde k je rýchlostná konštanta závislá len od teploty a c je koncentrácia príslušnej oxidovanej látky. Zistite, pre akú koncentráciu c_0 je rýchlosť reakcie maximálna.

8 Flexia grafu funkcie a inflexný bod

Flexia grafu funkcie znamená **ohyb** samotnej krivky. Rozlišujeme dva ohyby. Uvažujme o rastúcej funkcii $y = f(x)$ na intervale (a, b) tak, že $A[a, f(a)], B[b, f(b)]$ (obr. 8.1).



a) b)

Obr. 8.1

V oboch prípadoch funkcia rastie, konkávne (obr. 8.1a) a konvexne (obr. 8.1b). Analogická situácia môže nastať pre klesajúcu funkciu.

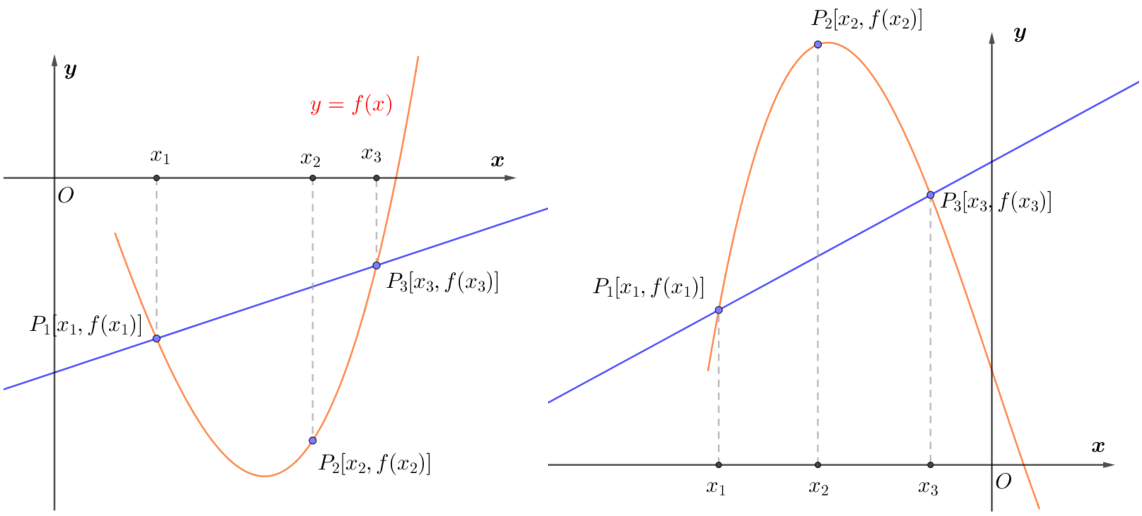
Definícia Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je **konvexná** na intervale $(a, b) \subset D(f)$, ak pre tri body $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je **rýdzo konvexná** na intervale $(a, b) \subset D(f)$, ak pre tri body $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Geometricky – bod $P_2[x_2, f(x_2)]$ leží „**pod**“ priamkou určenou bodmi $P_1[x_1, f(x_1)]$, $P_3[x_3, f(x_3)]$ (obr. 8.2a).



Obr. 8.2 a, b

Definícia Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je **konkávna** na intervale $(a, b) \subset D(f)$, ak pre tri body $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je **rýdzo konkávna** na intervale $(a, b) \subset D(f)$, ak pre tri body $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Geometricky – bod $P_2[x_2, f(x_2)]$ leží „**nad**" priamkou určenou bodmi $P_1[x_1, f(x_1)]$, $P_3[x_3, f(x_3)]$ (obr. 8.2.b).

Veta *Nech funkcia $y = f(x)$ má na intervale (a, b) deriváciu $y' = f'(x)$. Funkcia $y = f(x)$ je na intervale (a, b) rýdzo konvexná vtedy a len vtedy, keď $y' = f'(x)$ je na intervale (a, b) rastúca.*

Analogicky možno sformulovať tvrdenie o rýdzo konkávnej funkcii a klesajúcej derivácii na danom intervale.

Veta *Nech funkcia $y = f(x)$ má na intervale (a, b) druhú deriváciu $y" = f''(x)$. Funkcia $y = f(x)$ je na intervale (a, b) rýdzo konvexná vtedy a len vtedy, keď pre každé x z intervalu (a, b) platí, že $f''(x) > 0$ a súčasne neexistuje podinterval intervalu (a, b), kde by sa $f''(x) = 0$.*

Analogicky možno sformulovať tvrdenie o nezápornej druhej derivácii na danom intervale a konvexnosti funkcie.

Obdobné vety platia aj pre rýdzo konkávnu, resp. konkávnu, funkciu.

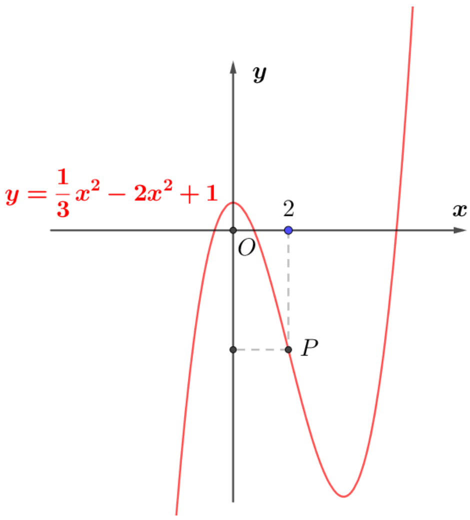
Príklad Určte intervaly, na ktorých je funkcia $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ konkávna alebo konvexná.

Riešenie. Definičným oborom funkcie je $D(f) = (-\infty, \infty)$. Postupne vypočítame derivácie.

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1\right)' = \cdots = x^2 - 4x$$

$$y'' = (x^2 - 4x)' = 2x - 4$$

Funkcia je rýdzo konvexná vtedy a len vtedy, keď $y'' > 0$,. Odtiaľ vyplýva, že $2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.
Funkcia je rýdzo konkávna vtedy a len vtedy, keď $y'' < 0$,. Odtiaľ vyplýva, že $2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.



Obr. 8.3

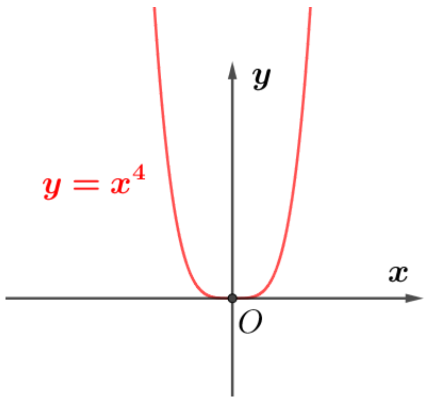
Definícia Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 inflexný bod, ak

a) má v tomto bode deriváciu,
b) v ľavom okolí bodu x_0 je rýdzo konvexná a v pravom okolí bodu x_0 je rýdzo konkávna alebo opačne.

Na obr. 8.3 je inflexný bod v $x_0 = 2$, pretože $f'(2) = (-4)$ a v bode x_0 sa mení krivka z konkávnej na konvexnú. Bod $P[x_0, f(x_0)]$ je inflexným bodom grafu.

Veta *Ak má funkcia $y = f(x)$ v bode x_0 inflexný bod, potom $f''(x_0) = 0$ alebo $f''(x_0)$ neexistuje.*

Vetu nemožno obrátiť. Funkcia $y = x^4$ má v bode $x_0 = 0$ druhú deriváciu rovnú 0, ale nemá v ňom inflexný bod. Funkcia je totiž na celom definičnom obore konvexná.

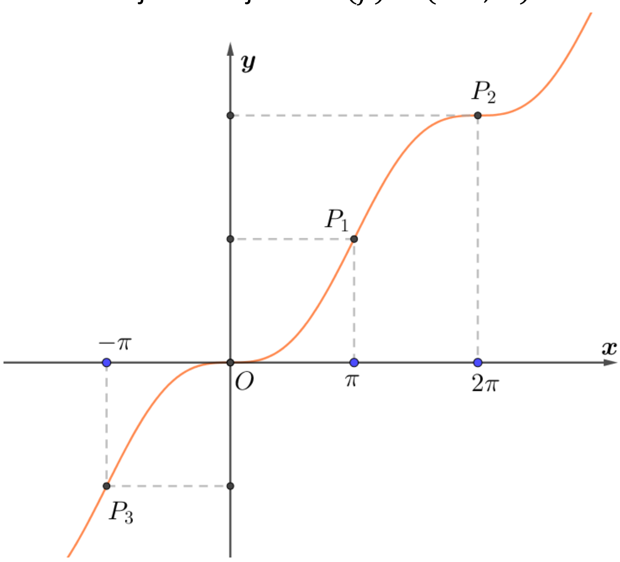


Obr. 8. 4

Veta *Ak má funkcia $y = f(x)$ v bode x_0 druhú deriváciu $f''(x_0) = 0$ a súčasne $f'''(x_0) \neq 0$, potom má v bode x_0 inflexný bod.*

Príklad Určte inflexné body funkcie $y = x - \sin x$.

Riešenie. Definičným oborom danej funkcie je tiež $D(f) = (-\infty, \infty)$.



Obr. 8. 5

Postupne derivujeme funkciu.

$$y' = (x - \sin x)' = 1 - \cos x$$
$$y'' = \sin x$$

Položíme $y'' = 0$ a odvodíme $x_0 = 0 + k.\pi, k \in Z$.

Keďže $y''' = \cos x$ a $\cos(0 + k.\pi) = \pm 1$,

funkcia $y = x - \sin x$ má nekonečne veľa inflexných bodov pre $x_0 = 0 + k.\pi, k \in Z$.

Príklad Určte inflexné body funkcie $y = \sqrt[3]{x+2}$.

Riešenie. Definičným oborom danej funkcie je tiež $D(f) = (-\infty, \infty)$. Vypočítame druhú deriváciu funkcie, ktorá sa rovná

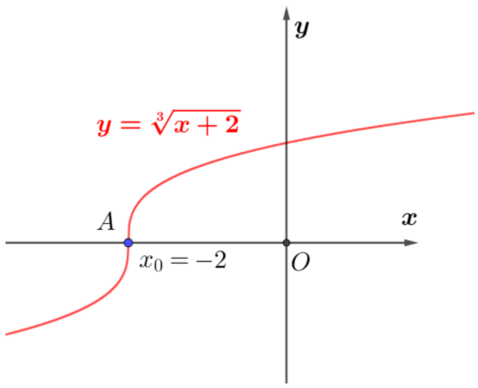
$$y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

Pre každé $x \in R$ platí, že $y'' \neq 0$, avšak druhá derivácia nie je definovaná pre $x = -2$ a platí, že

$$\lim_{x \to -2}\left(-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}\right)$$

neexistuje (ak je $x < -2$, potom je $y'' > 0$; pre $x > -2$ zase odvodíme, že $y'' < 0$).

Bod $A[-2,0]$ je inflexným bodom grafu funkcie $y = \sqrt[3]{x+2}$.



Obr. 8. 6

8.1 Cvičenie

1. Určte interval, na ktorom je funkcia $y = f(x)$ konkávna, resp. konvexná:

   a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ b) $y = \frac{1}{x+3}$ c) $y = \frac{x^3}{x^2+12}$

   d) $x - \sin x$ e) $y = x^2 . \ln x$

2. Vypočítajte inflexné body funkcie $y = f(x)$:

   a) $y = x + \frac{2x}{1-x^2}$ b) $y = x + \ln x$ c) $y = \ln(4 - x^2)$

   d) $y = e^{-x^2}$ e)* $y = x.\sin(\ln x), x > 0$

3. Ukážte, že inflexné body funkcie $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ ležia na jednej priamke.

4. K danej funkcii $y = f(x)$ určte:

   1) definičný obor,
   2) či je funkcia párne alebo nepárna,
   3) priesečníky funkcie s osami x, y,

4) intervaly, kde je funkcia monotónna,
5) extrémy funkcie,
6) intervaly, kde je funkcia konkávna , resp. konvexná,
7) inflexné body,
8) asymptoty grafu funkcie

a načrtnite samotný graf, ak:

a) $y = x^3 - 3x$ b) $y = \frac{x}{x^2-1}$ c) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ d) $y = (x - 3).\sqrt{x}$

e) $y = \sin x + \cos^2 x$ f) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ g) $y = x.\arctan x$ h)* $y = x^x$

9 Neurčitý integrál

Ukázali sme, že v prípade funkcie $y = f(x)$ definovanej na nejakom intervale, má zmysel uvažovať o jej derivácii $y' = f'(x)$. Proces, ako vypočítať deriváciu sa stručne nazýva ***derivovanie*** funkcie. Opačný proces, kedy k danej funkcii $y = f(x)$, definovanej na nejakom intervale, hľadáme funkciu $y = F(x)$, pre ktorú platí $F'(x) = f(x)$, nazývame ***integrovaním*** funkcie. Definujeme postupne a presne.

Definícia Nech $y = f(x)$ a $y = F(x)$ sú dve funkcie, ktorých definičné obory $D(f)$, $D(F)$ obsahujú otvorený interval I (aj neohraničený) a nech funkcia $y = F(x)$ má na intervale I deriváciu. Ak pre každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$, potom funkciu $y = F(x)$ nazývame **primitívnou funkciou** k funkcii $y = f(x)$ na intervale I.

Ohľadom definície primitívnej funkcie je potrebné si uvedomiť dve základné skutočnosti:

a) funkcia $y = F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $y = f(x)$ vzhľadom na určený interval. Napr. funkcia $y = F(x) = \tan x$ je primitívna funkcia k funkcii $y = f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ale nie je primitívnou funkciou k funkcii $y = f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, pretože nie je definovaná pre $x = \frac{\pi}{2}$.

b) V kapitole 3.3 sme uviedli vetu, podľa ktorej: „*ak má funkcia deriváciu v každom bode daného intervalu, potom je na tomto intervale spojitá*.“

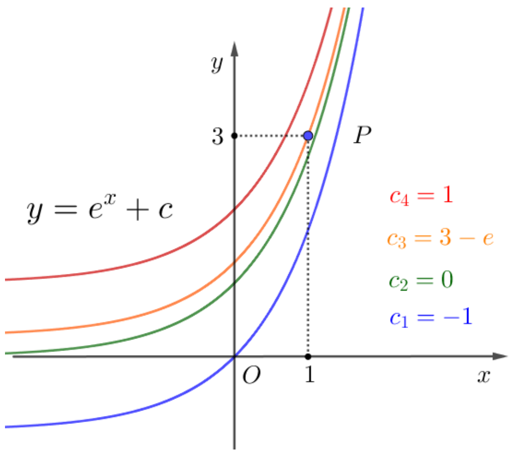
Primitívna funkcia $\boldsymbol{y = F(x)}$ má túto vlastnosť, preto je na intervale I **vždy spojitá**.

Veta *Ak $y = F(x)$ je primitívna funkcia k funkcie $y = f(x)$, potom aj funkcia $y = F(x) + c$ pre ľubovoľnú konštantu $c \in R$ je primitívna funkcia k funkcii $y = f(x)$ na danom intervale.*

Dôkaz. Ak pre každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$, potom aj

$$(F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x). \qquad \blacksquare$$

Príklad Na intervale $(-\infty, \infty)$ určte primitívnu funkciu k funkcii $y = e^x$, ktorej graf prechádza bodom $P[1,3]$.



Obr. 9.1

Riešenie. Primitívna funkcia $y = F(x)$ na intervale $(-\infty, \infty)$ k funkcii $y = e^x$ je funkcia

$$y = F(x) = e^x + c, \text{ kde } c \in R.$$

Ak má graf funkcie $F(x) = e^x + c$ prechádzať bodom $P[1,3]$, potom

$$3 = e^1 + c \Rightarrow c = 3 - e.$$

Výsledkom je funkcia $y = F(x) = e^x + 3 - e$ (obr. 9.1).

Veta *Ak $y = F(x)$, $y = G(x)$ sú primitívne funkcie k funkcii $y = f(x)$ na intervale (a, b), potom sa líšia o konštantu.*

Dôkaz. Ak uvažujeme, že $H(x) = F(x) - G(x)$, potom jej derivácia pre každé $x \in (a, b)$ sa rovná 0, lebo platí:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ak vezmeme ľubovoľné $x_1, x_2 \in (a, b)$ také, že $x_1 < x_2$, potom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje medzi x_1, x_2 také c, že platí: $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1}$.

Keďže derivácia $H'(x) = 0$ pre každé x z intervalu (a, b), odvodíme:

$$H(x_2) - H(x_1) = H'(c).(x_2 - x_1) = 0.(x_2 - x_1) = 0$$

$$H(x_2) = H(x_1).$$

Funkcia $H(x) = F(x) - G(x)$ je konštantná a platí:

$$F(x) = G(x) + c,$$

kde $c \in R$. ■

Z uvedeného vyplýva – ak sa primitívne funkcie k danej funkcii $y = f(x)$ na intervale I líšia len o reálnu konštantu.

Riešenie nasledujúceho príkladu ukazuje, že primitívne funkcie $y = F(x)$ a $y = G(x)$ k danej funkcii $y = f(x)$ **nemusia** mať rovnaký funkčný predpis. Ich funkčné hodnoty sa však odlišujú o konštantu.

Príklad Ukážte, že funkcie $y = \frac{\sin^2 x}{2}$ a $y = -\frac{\cos(2x)}{4}$ sú primitívne funkcie k funkcii $y = \sin x . \cos x$ na intervale $(-\infty, \infty)$. Zistite, o akú konštantu sa líšia.

Riešenie. Vypočítame derivácie oboch funkcií. Platí:

$$y' = \left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)' = \frac{1}{2}.2.\sin x.\cos x = \sin x.\cos x$$

$$y' = -\left(\frac{\cos(2x)}{4}\right)' = -\frac{1}{4}.2.(-\sin(2x)) = \frac{\sin(2x)}{2} = 2.\frac{\sin x.\cos x}{2} = \sin x.\cos x$$

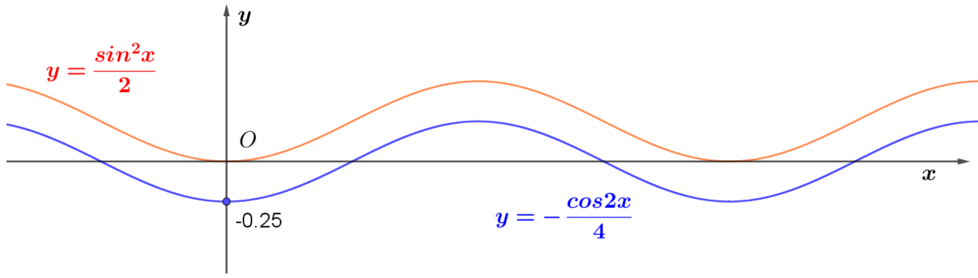
Pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ sú obe funkcie primitívne k funkcii $y = \sin x.\cos x$ a môžeme napísať:

$$\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos(2x)}{4} + c.$$

Ak zvolíme, napr. $x = 0$, dostaneme:

$$\frac{\sin^2 0}{2} = -\frac{\cos(2.0)}{4} + c$$

$$0 = -\frac{\cos 0}{4} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{4}.$$



Obr. 9.2

Definícia Ľubovoľnú primitívnu funkciu $y = F(x) + c$, kde $c \in R$ k funkcii $y = f(x)$ na intervale I nazývame **neurčitým integrálom** a zapisujeme

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Funkciu $y = f(x)$ nazývame **integrovanou funkciou**, premennú x zase **integračnou premennou,** číslo $c \in R$ nazývame **integračnou konštantou.**

Z uvedeného vyplýva, že operácie ako derivovanie a integrovanie sú navzájom inverznými operáciami s funkciami. Integrovanie niektorých elementárnych funkcií vyplýva z ich derivácií a môžeme zapísať do tabuľky.

Tab. 9.1

$\int a\,dx = ax + c\,, a \neq 0$	$\int 0\,dx = c\,, c \in R$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq 1$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c\,, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c\,, x \neq 0$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c\,, x \neq k\pi, k \in Z$
$\int e^x dx = e^x + c, x \in (-\infty, \infty)$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + c, x \in (-a, a)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c\,, a > 0, a \neq 1$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = arc\cos x + c, x \in (-a, a)$
$\int \sin x dx = -\cos x + c \;\; x \in (-\infty, \infty)$	$\int \frac{1}{1+x^2} = arc\tan x + c, x \in (-\infty, \infty)$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c\,, x \in (-\infty, \infty)$	$\int -\frac{1}{1+x^2} = arc\cot x + c, x \in (-\infty, \infty)$

Veta *Ak funkcie $y = f(x)$, $y = g(x)$ majú neurčité integrály a c_1, c_2 sú reálne konštanty, potom platí*

$$\int (c_1.f(x) \pm c_2.g(x))dx = c_1.\int f(x)\,dx \pm c_2.\int g(x)dx.$$

Dôkaz vyplýva z vety o derivácii súčtu a rozdielu funkcií. ■

Príklad Vypočítajte $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx$.

Riešenie. Integrovanú funkciu $y = \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}$ upravíme

$$\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}=\frac{\sqrt{x^3}-3x+3\sqrt{x}-1}{x}=x^{\frac{3}{2}-1}-3+3x^{\frac{1}{2}-1}-\frac{1}{x}=x^{\frac{1}{2}}-3+3x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}$$

a budeme postupne integrovať podľa integračnej premennej x, pričom všetky „čiastkové“ integračné konštanty „zlúčime“ do spoločnej konštanty c. Odvodíme:

$$\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx=\cdots=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-3+3x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int 3dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-3x+3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\ln|x|+c\quad=\quad\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-3x+3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\ln x|\quad|+c=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-3x+6\sqrt{x}-\ln|x|+c.$$

Príklad Vypočítajte $\int\frac{1}{\sin^2 x\,.\cos^2 x}dx$.

Riešenie. Použijeme goniometrickú identitu $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ a upravíme integrovanú funkciu

$$\frac{1}{\sin^2 x\,.\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\,.\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\,.\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\,.\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Ďalej vypočítame

$$\int\frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\cdots=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\tan x-\cot x+c.$$

9.1 Metóda integrovania per partes

Existujú rôzne spôsoby výpočtu neurčitého integrálu. Jednou z nich je aj metódy označovaná ako „**per partes**“ (integrovanie „po častiach“). Používa sa zväčša v prípadoch, kedy integrovaná funkcia je v tvare súčinu dvoch funkcií.

Veta *Ak funkcie $y=f(x)$, $y=g(x)$ majú na otvorenom intervale I spojité derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$, potom pre každé $x\in I$ platí*

$$\int f(x).g'(x)\,dx=f(x).g(x)-\int f'(x).g(x)\,dx.$$

Dôkaz vyplýva z vety o derivácii súčinu dvoch funkcií. Naznačíme dôkaz (súčasne vynechávame „(x)“ kvôli prehľadnosti).

$$(f.g)'=f'.g+f.g'$$

$$\int(f.g)'dx=\int(f'.g+f.g')dx$$

$$f.g=\int f'.g\,dx+\int f.g'dx$$

$$\int f'(x).g(x)dx=f(x).g(x)-\int f(x).g'(x)\,dx$$

alebo

$$\int f(x).g'(x)dx=f(x).g(x)-\int f'(x).g(x)\,dx$$

■

Príklad Vypočítajte $\int x.\sin x\,dx$.

Riešenie. Použijeme metódu per partes, kde $y=f(x)=x$, $y=g'(x)=\sin x$. Z uvedeného vyplýva:

$$\int x.\sin x\,dx \dots \left\| \begin{matrix} f(x)=x & g'(x)=\sin x \\ f'(x)=1 & g(x)=-\cos x \end{matrix} \right\| \dots = x.(-\cos x) - \int 1.(-\cos x)\,dx =$$

$$= -x.\cos x + \int \cos x\,dx = -x.\cos x + \sin x + c.$$

Z ukážky vyplýva, ako sa uvedená metóda aplikuje. Integrovanú funkciu rozložíme na súčin dvoch funkcií, z ktorých jednu prehlásime už za derivovanú. Následne podľa vzorca určíme zvyšné funkcie (zapísané v dvojitých zvislých zátvorkách) a počítame. Metódu možno úspešne použiť , ak integrál na pravej strane je jednoduchší, než pôvodný.

Niekedy je potrebné použiť úpravu integrovanej funkcie na pravej strane, niekedy zase postup opakovať.

Príklad Vypočítajte $\int \sin^2 x\,dx$.

Riešenie. Opäť použijeme metódu per partes, identitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a zvláštny obrat v závere výpočtu.

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x.\sin x\,dx \dots \left\| \begin{matrix} f(x)=\sin x & g'(x)=\sin x \\ f'(x)=\cos x & g(x)=-\cos x \end{matrix} \right\| \dots =$$

$$= \sin x.(-\cos x) - \int \cos x.(-\cos x)\,dx = \sin x.(-\cos x) - \int \cos x.(-\cos x)\,dx =$$

$$= -\sin x.\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x.\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= -\sin x.\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx.$$

Ak dáme do rovnosti začiatok a koniec výpočtu, dostaneme rovnosť:

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x.\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx,$$

z ktorej vyplýva

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x.\cos x + x$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x - \sin x.\cos x}{2} + c$$

Príklad Vypočítajte $\int x^2.e^x\,dx$.

Riešenie. Aplikujeme metódu per partes a to opakovane.

$$\int x^2\,e^x dx = \cdots \left\| \begin{matrix} f(x)=x^2 & g'(x)=e^x \\ f'(x)=2x & g(x)=e^x \end{matrix} \right\| \dots = x^2.e^x - \int 2x.e^x dx$$

Znovu použijeme metódu per partes pre integrál $\int x.e^x dx$.

$$\int x.e^x dx \dots \left\| \begin{matrix} f(x)=x & g'(x)=e^x \\ f'(x)=1 & g(x)=e^x \end{matrix} \right\| \dots = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + c_0$$

Výsledok

$$\int x^2\,e^x dx = \cdots = x^2.e^x - 2.\int x.e^x dx = x^2.e^x - 2.(x.e^x - e^x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$$

Metódu per partes možno použiť v nasledujúcom príklade, kde na prvý pohľad nejde o súčin dvoch funkcií.

Príklad Vypočítajte $\int \ln x\, dx$.

Riešenie.

$$\int \ln x\, dx = \int 1.\ln x\, dx \ldots \left\| \begin{matrix} f(x) = \ln x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = x \end{matrix} \right\| \ldots = x.\ln|x| - \int \frac{1}{x}.x\, dx =$$

$$x.\ln|x| - \int 1.dx = = x.\ln|x| - x + c.$$

9.2 Integrovanie substitučnou metódou

Myšlienka použitia substitučnej metódy vychádza z vety o derivácii zloženej funkcie. Podstata je založená na nasledovnej vete.

Veta *Ak funkcia $y = F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $y = f(t)$ na otvorenom intervale I_t; a súčasne funkcia $t = \varphi(x)$ má na otvorenom intervale I_x deriváciu $\varphi'(x)$ a pre každé $x \in I_x$ je $\varphi(x) \in I_t$, potom je funkcia $F(\varphi(x))$ primitívna funkcia k funkcii $f(\varphi(x)).\varphi'(x)$ na intervale I_x.*

Ako prakticky použiť substitučnú metódu, ukážeme na príkladoch. Podmienky existencie príslušných derivácií vnútorných zložiek $\varphi'(x)$ zložených funkcií $f(\varphi(x))$, ako aj určenie príslušných otvorených intervalov I_t, I_x ponecháme na čitateľa, čím výpočet „prevedieme skoro mechanicky". Príslušnú substitúciu naznačujeme pomocným zápisom ... || || ... .

Príklad Vypočítajte $\int \frac{x^2}{(1-x^3)^2} dx$.

Riešenie. Zavedieme substitúciu $1 - x^3 = t$ a počítame

$$\int \frac{x^2}{(1-x^3)^2} dx \ldots \left\| \begin{matrix} 1 - x^3 = t \\ dx = ? \\ \ldots diferencujeme \\ -3x^2 dx = dt \end{matrix} \right\| \ldots$$

$$= -\int \frac{x^2}{t^2}.\frac{dt}{3x^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{3}.\int t^{-2} dt = -\frac{1}{3}.\frac{t^{-2+1}}{(-2+1)} + c =$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{t^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{3}.\frac{1}{t} + c = \frac{1}{3(1-x^3)} + c.$$

Príklad Vypočítajte $\int e^{x^3}.x^2\, dx$.

Riešenie. Zavedieme substitúciu $x^3 = t$ a počítame

$$\int e^{x^3}.x^2\, dx \ldots \left\| \begin{matrix} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{matrix} \right\| \ldots = \int e^t.x^2.\frac{dt}{3x^2} = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}.e^{x^3} + c.$$

Výber vhodnej substitúcie je vecou skúsenosti a praxe. V istých prípadoch ako „kontrola" vhodnej substitúcie slúži skutočnosť, že výraz pod integračným znakom sa po substitúcii a náhrade diferenciálu úpravou zjednoduší.

Príklad Vypočítajte $\int x\sqrt{x+a}\, dx$.

Riešenie. Zavedieme substitúciu $\sqrt{x+a} = t$ a počítame

$$\int x\sqrt{x+a}\, dx \ldots \left\| \begin{matrix} \sqrt{x+a} = t \\ x + a = t^2 \Rightarrow x = t^2 - a \\ dx = 2t.dt \end{matrix} \right\| \ldots = \int x.t.2t.dt = 2\int (t^2 - a).t^2.dt =$$

$$= 2\int (t^4 - at^2)dt = 2.\left(\frac{t^{4+1}}{4+1} - a\frac{t^{2+1}}{2+1}\right) + c = 2\left(\frac{t^5}{5} - a.\frac{t^3}{3}\right) + c =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+a}\right)^5 - \frac{2a}{3}\left(\sqrt{x+a}\right)^3 + c, \quad x \geq -a.$$

Príklad * (dôležitý) Vypočítajte $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx.$

Riešenie. Zavedieme substitúciu $x = at.$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx \dots \left\| \begin{matrix} x = at \\ dx = a.dt \end{matrix} \right\| \dots = \int \frac{1}{a^2+(at)^2}.a.dt = a.\int \frac{1}{a^2(1+t^2)}dt = \frac{a}{a^2}.\int \frac{1}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{a}.\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{a}.\arctan t + c = \frac{1}{a}.\arctan\frac{x}{a} + c\,; \quad a \neq 0$$

Príklad* Vypočítajte $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$

Riešenie. Zavedieme substitúciu $x = a.\sin t$ a aplikujeme známu identitu $\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \dots \left\| \begin{matrix} x = a.\sin t \\ dx = a.\cos t.dt \end{matrix} \right\| \dots = \int \sqrt{a^2 - (a.\sin t)^2}.a.\cos t.dt =$$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2.\sin^2 t}\,.a.\cos t.dt = \int a.\sqrt{1-\sin^2 t}\,.a.\cos t.dt = \int a^2.\sqrt{1-\sin^2 t}\,.\cos t.dt =$$

$$= a^2.\int \cos t.\cos t\,.dt.$$

Integrál $\int \cos^2 t.dt$ vypočítame metódou per partes.

$$\int \cos t.\cos t\,.dt \dots \left\| \begin{matrix} f(t) = \cos x & g'(t) = \cos t \\ f'(t) = -\sin t & g(t) = \sin t \end{matrix} \right\| \dots = \cos t.\sin t - \int (-\sin t).\sin t.dt =$$

$$= \cos t.\sin t + \int \sin^2 t.dt = \cos t.\sin t + \int (1 - \cos^2 t).dt =$$

$$= \cos t.\sin t + t - \int \cos^2 t.dt.$$

Odvodili sme

$$\int \cos^2 t.dt = \cos t.\sin t + t - \int \cos^2 t.dt$$

$$2\int \cos^2 t.dt = \cos t.\sin t + t$$

$$\int \cos^2 t.dt = \frac{\cos t.\sin t + t}{2} + c_0.$$

Dosadíme do pôvodného výpočtu.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \dots = a^2.\int \cos^2 t.dt = \dots a^2.\left(\frac{\cos t.\sin t + t}{2}\right) + c =$$

$$= a^2.\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}.\sin t + t}{2}\right) + c \dots \left\| \begin{matrix} x = a.\sin t \\ \frac{x}{a} = \sin t \\ \arcsin\frac{x}{a} = t \end{matrix} \right\| \dots = a^2.\left(\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.\frac{x}{a}}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right) + c =$$

$$= a^2.\left(\frac{x}{2a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right) + c = \dots = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c.$$

V úlohách sa často vyskytujú integrály typu

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx,$$

definované na intervale I_x, kde pre každé $x \in I_x$: $f(x) \neq 0$. Zavedením substitúcie $t = f(x)$ integrál vypočítame pomerne ľahko. Platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \dots \left\| \begin{matrix} t = f(x) \\ dt = f'(x).dx \end{matrix} \right\| \dots = \int \frac{f'(x)}{t} . \frac{dt}{f'(x)} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c\,.$$

Príklad Vypočítajte $\int \frac{1}{x.\ln x} dx$.

Riešenie. Integrál najprv upravíme a následne k jeho výpočtu použijeme vyššie uvedený postup.

$$\int \frac{1}{x.\ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + c.$$

Príklad Vypočítajte $\int \tan x \, dx$.

Riešenie. Integrál opäť najprv upravíme a následne vypočítame.

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c.$$

Príklad Vypočítajte $\int \frac{x}{x^2 - x + 1} dx$.

Riešenie. Integrál upravíme tak, aby integrovaná funkcia mala v čitateli deriváciu menovateľa.

Keďže $(x^2 - x + 1)' = 2x - 1$, doplníme integrovanú funkciu nasledovne:

$$\int \frac{x}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2.x}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2.x - 1 + 1}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2.x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx.$$

Výpočet rozdelíme na určenie výsledkov dvoch integrálov. Kým prvý z nich určíme podľa vyššie uvedeného vzorca

$$\frac{1}{2} \int \frac{2.x - 1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 - x + 1| + c_1,$$

druhý vypočítame osobitnou metódou – tzv. „**doplnením na štvorec**“ a následnou substitúciou.

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = ?$$

Upravujeme takto[23]

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 - 2.\frac{1}{2}x + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 - 2.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\left(x^2 - 2.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4} + 1\right)} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx =$$

[23] Uvedený postup výpočtu odporúčame dobre preštudovať. V podstate ide o návod, ako vypočítať $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$. Integrály tohto typu sa vyskytujú v úlohách pomerne často.

$$= \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx \ldots \left\| \begin{matrix} x - \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{matrix} \right\|^{24} \ldots = \int \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.\mathrm{arc\,tan}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}.arc\tan\frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Čiastočné výsledky zlúčime do konečného výsledku:

$$\int \frac{x}{x^2 - x + 1} dx = \cdots = \frac{1}{2}\ln|x^2 - x + 1| + c_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + c_2.\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 - x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + c,$$

kde $c = c_1 + \frac{1}{2}c_2$.

9.3 Integrovanie niektorých racionálnych funkcií

Najprv definujeme racionálnu funkciu.

Definícia **Racionálnou funkciou** nazývame funkciu tvaru $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ sú polynómy premennej x a platí, že $Q(x)$ nie je nulový polynóm. Racionálna funkcia je definovaná pre všetky reálne čísla x, kde $Q(x) \neq 0$.

Ak stupeň polynómu $P(x)$ menší ako stupeň polynómu $Q(x)$, potom hovoríme, že funkcia $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je **rýdzo racionálna** funkcia.

Príkladmi racionálnych funkcií sú

$$y = \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x - 1}{x^3 + 2x + 1} \qquad y = \frac{x+1}{x+2} \qquad y = \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} \qquad y = \frac{2x+3}{(x+5)^3} \qquad y = \frac{1}{x}$$

Pre rýdzo racionálnu funkciu platí táto dôležitá veta o rýdzo racionálnych funkciách.

Veta *Každá rýdzo racionálna funkcia $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je súčtom rýdzo racionálnych funkcií tvaru*

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} \quad \textit{alebo} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

kde A, B, C, α, p, q sú reálne čísla, pričom:

a) n, m sú prirodzené čísla,
b) α je koreň polynómu $Q(x)$,
c) polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene a delí polynóm $Q(x)$ bez zvyšku.

Rýdzo racionálne funkcie v tvare $y = \frac{A}{(x-\alpha)^n}$, $y = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$ *nazývame* ***parciálne zlomky****.*

---

[24] Použijeme (v dôležitom príklade) odvodený vzorec $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}.arc\tan\frac{x}{a} + c$.

Rozklad rýdzo racionálnej funkcie $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ na parciálne zlomky závisí od reálnych koreňov funkcie

$$y = Q(x).$$

Ak $Q(x)$ je polynóm stupňa n, ktorý možno rozložiť na súčin koreňových činiteľov:

$$Q(x) = a_0.(x-\alpha_1)^{n_1}.(x-\alpha_2)^{n_2}.\dots.(x-\alpha_k)^{n_k}.\dots .$$
$$.(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}.(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}.\dots \ .(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

kde:

a) α_i je $n_i -$ násobný reálny koreň polynómu $Q(x)$ pre $i = 1,2,\dots,k$,
b) $p_j^2 - 4q_j < 0$ pre $j = 1,2,\dots,s$,
c) $n_1 + n_2 + \cdots n_k + 2(m_1 + m_2 + \cdots + m_s) = n$,

potom rýdzo racionálnu funkciu $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ možno jednoznačne rozložiť na parciálne zlomky a to nasledovne:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} =$$
$$= \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(x-\alpha_1)^{n_1}} +$$
$$+ \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2n_2}}{(x-\alpha_2)^{n_2}} +$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{A_{k1}}{x-\alpha_k} + \frac{A_{k2}}{(x-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{A_{kn_k}}{(x-\alpha_k)^{n_k}} +$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} +$$
$$+ \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \cdots + \frac{B_{2m_2}x + C_{2m_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}} +$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \cdots + \frac{B_{sm_s}x + C_{sm_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}.$$

Príklad Rozložte na parciálne zlomky funkciu $y = \frac{x^2+2x+2}{x^4+x}$.

Riešenie. Funkcia $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x) = x^2 + 2x + 2$, $Q(x) = x^4 + x$ je rýdzo racionálna a použijeme vetu o rozklade na parciálne zlomky. Pre polynóm $Q(x)$ odvodíme:

$$Q(x) = x^4 + x = x.(x+1)^3 = x.(x+1).(x^2-x+1)$$

Ak vypočítame diskriminant kvadratického člena

$$D = (-1)^2 - 4.1.1 = (-3) < 0,$$

potom je zrejmé, že kvadratický člen nemá reálne korene. Platí teda[25]:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2+2x+2}{x^4+x}=\frac{x^2+2x+2}{x.(x+1)^1.(x^2-x+1)^1}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

Upravíme rovnicu tak, že odstránime menovateľa

$$x^2+2x+2=A.(x+1).(x^2-x+1)+B.x.(x^2-x+1)+(Cx+D).x.(x+1).$$

Upravíme pravú stranu rovnosti

$$1.x^2+2.x+1=\cdots=(A+B+C).x^3+(-B+C+D).x^2+(B+D).x+A$$

a porovnáme koeficienty na oboch stranách. Zostavíme sústavu lineárnych rovníc

$$0.x^3+1.x^2+2.x+2=\cdots=(A+B+C).x^3+(-B+C+D).x^2+(B+D).x+A.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0=A+B+C$$
$$1=-B+C+D$$
$$2=B+D$$
$$2=A$$

Sústavu vyriešime a dostaneme

$$A=2,B=-\tfrac{1}{3},C=-\tfrac{5}{3},D=\tfrac{7}{3}.$$

Rozklad na parciálne zlomky je nasledovný:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2+2x+2}{x^4+x}=\frac{2}{x}+.\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}}{x^2-x+1}=\frac{2}{x}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{5x-7}{3(x^2-x+1)}.$$

Príklad Vypočítajte $\int\frac{x^2+2x+2}{x^4+x}dx$.

Riešenie. Funkciu $y=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2+2x+2}{x^4+x}$ rozložíme na parciálne zlomky (viď riešenie predchádzajúceho príkladu). Platí:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2+2x+2}{x^4+x}=\frac{2}{x}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{5x-7}{3(x^2-x+1)}$$

Integrujeme

$$\int\frac{x^2+2x+2}{x^4+x}dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{5x-7}{3(x^2-x+1)}\right)dx=2\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{5}{3}\int\frac{x}{x^2-x+1}dx+\frac{7}{3}\int\frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Integrály $\int\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2-x+1}}\boldsymbol{dx}$, $\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2-x+1}}$ sme už vypočítali (pozn. pod čiarou č. 23):

$$\int\frac{x}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+c_1,$$

$$\int\frac{1}{x^2-x+1}dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+c_2.$$

[25] Použijeme koeficienty bez indexov. Pri menšom počte koreňových činiteľov polynómu $Q(x)$ je to výhodné, pretože zápis je prehľadnejší.

Vypočítame teda výsledok:

$$\int \frac{x^2+2x+2}{x^4+x}dx = \cdots =$$

$$= 2.\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{5}{3}.\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) +$$

$$+\frac{7}{3}.\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + c =$$

$$= \ln x^2 - \ln\sqrt[3]{x+1} - \ln\sqrt[6]{|x^2-x+1|^5} - \frac{5\sqrt{3}}{9}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} +$$

$$+\frac{14\sqrt{3}}{9}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + c = \cdots =$$

$$= \ln\frac{x^2}{\sqrt[3]{|x+1|}.\sqrt[6]{|x^2-x+1|^5}} + \sqrt{3}.arc\tan\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + c.$$

Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií je algoritmický proces. Aplikácia vety o rozklade rýdzo racionálnej funkcie na parciálne zlomky umožní určiť integrovanú funkciu ako súčet rýdzo racionálnych funkcií.

Pre úplnosť, ak chceme úspešne používať túto metódu výpočtu, je potrebné poznať **rekuretné vzorce**[26] z nasledujúcich viet.

Veta *Ak označíme* $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}dx = I_k$, $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{k-1}}dx = I_{k-1}$ *pre* $k > 1$ $k \in N$, *potom*

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}dx = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} + \frac{x}{2(k-1).(x^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Príklad Vypočítajte $\int \frac{1}{(x^2+9)^2}dx$.

Riešenie. Podľa predchádzajúcej vety pre $a = 3, k = 2$ platí:

$$\int \frac{1}{(x^2+3^2)^2}dx = I_2$$

$$I_{2-1} = I_1 = \int \frac{1}{(x^2+3^2)^{2-1}}dx = \int \frac{1}{(x^2+3^2)^1}dx = \frac{1}{3}arc\tan\frac{x}{3} + c.$$

Použijeme vzorec z vety.

[26] Vzorce možno odvodiť pomocou substitučnej metódy a metódy per partes. Z úsporných dôvodov ich nebudeme dokazovať.

$$\int \frac{\mathbf{1}}{(x^2+3^2)^2}\boldsymbol{dx} = \frac{1}{9}.\left(\frac{2.2-3}{2.2-2}.\int \frac{1}{(x^2+3^2)^1}dx + \frac{x}{2(2-1).(x^2+3^2)^{2-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}.\int \frac{1}{x^2+9}dx + \frac{x}{2.(x^2+9)}\right) = \dots = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}arc\tan\frac{x}{3} + \frac{x}{x^2+9}\right) + c$$

Veta Pre $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$, kde $k > 1, k \in N$ platí:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = A\int \frac{t}{t^2+a^2}dt + \left(B - p\frac{A}{2}\right).\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt,$$

kde $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, $x + \frac{p}{2} = t$.

Príklad Vypočítajte $\int \frac{3x+1}{(x^2+2x+5)^2}dx$.

Riešenie. Ak označíme $A = 3, B = 1, p = 2, q = 5, k = 2$ potom

$$t = x + \frac{p}{2} = x + \frac{2}{2} = x + 1, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4} = 5 - \frac{4}{4} = 4, \quad B - p.\frac{A}{2} = 1 - 2.\frac{3}{2} = -2.$$

Platí:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+2x+5)^2}dx = 3\int \frac{t}{t^2+2^2}dt - 2\int \frac{1}{(t^2+2^2)^2}dt.$$

Vypočítame postupne (a použijeme aj rekurentný vzorec).

a) $\int \frac{t}{t^2+2^2}dt = \int \frac{2.t}{2.(t^2+2^2)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+2^2}dt \dots \left\| \begin{matrix} u = t^2+4 \\ du = 2t.dt \end{matrix} \right\| \dots = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{u}.\frac{du}{2t} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}.du = \frac{1}{2}.\ln|u| + c_1 = \ln\sqrt{|t^2+3|} + c_1 = \ln\sqrt{|(x+1)^2+3|} + c_1.$$

b) $\int \frac{1}{(t^2+2^2)^2}dt = \frac{1}{4}\left(\frac{2.2-3}{2.2-2}\int \frac{1}{(t^2+4)^{2-1}}dt + \frac{t}{2(2-1).(t^2+4)^{2-1}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+2^2}dt + \frac{t}{2.(t^2+4)}\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+4}dt + \frac{t}{2.(t^2+4)}\right) = \frac{1}{8}.\left(\frac{1}{2}.arc\tan\frac{t}{2} + \frac{t}{t^2+4}\right) + c_2 =$$

$$= \frac{1}{8}.\left(\frac{1}{2}.arc\tan\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\right) + c_2.$$

Čiastočné výsledky a), b) dosadíme do pôvodného výpočtu a odvodíme:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+2x+5)^2}dx = 3\int \frac{t}{t^2+2^2}dt - 2\int \frac{1}{(t^2+2^2)^2}dt = \dots =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\sqrt{|(x+1)^2+4|} - 2.\frac{1}{8}.\left(\frac{1}{2}.arc\tan\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\right) + c =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\sqrt{|(x+1)^2+4|} - \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}.arc\tan\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\right) + c.$$

Uviedli sme niekoľko postupov, ako vypočítať integrály pomocou rozkladu na parciálne zlomky. Treba si uvedomiť, že výpočet integrálu touto metódou je korektný len vtedy, ak integrovaná funkcia je **rýdzo racionálna.** Ak tomu tak nie je, je potrebné racionálnu funkciu najprv upraviť. Ukážeme na riešení nasledovného príkladu.

Príklad Vypočítajte $\int \frac{x^2+4x+6}{x^2+2x+5}dx$.

Riešenie. Funkcia $y = \frac{x^2+4x+6}{x^2+2x+5}$ je racionálna, ale **nie je rýdzo** racionálna. Riešenie rozdelíme do niekoľkých krokov.

1) Zistíme najprv, či je možný rozklad čitateľa a menovateľa na súčin koreňových činiteľov. Vypočítame:

$$x^2 + 4x + 6 = 0$$
$$D_1 = 4^2 - 4.1.6 = 16 - 24 = (-8).$$

Rovnica $x^2 + 4x + 6 = 0$ nemá reálne korene.

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$
$$D_2 = 2^2 - 4.1.5 = 4 - 20 = (-12).$$

Rovnica $x^2 + 2x + 5 = 0$ tiež nemá reálne korene.

Racionálnu funkciu nemožno upraviť rozkladom na súčin koreňových činiteľov.

2) Upravíme na tvar, v ktorom vystupuje rýdzo racionálna funkcia[27].

$$\frac{x^2+4x+6}{x^2+2x+5} = \frac{x^2+2x+2x+5+1}{x^2+2x+5} = \frac{x^2+2x+5}{x^2+2x+5} + \frac{2x+1}{x^2+2x+5} = 1 + \frac{2x+1}{x^2+2x+5}$$

3) Vypočítame integrál.

$$\int \frac{x^2+4x+6}{x^2+2x+5}dx = \int \left(1 + \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\right)dx = \int 1.dx + \int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}dx =$$
$$= x + \int \frac{2x+2-1}{x^2+2x+5}dx = x + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx =$$
$$= x + \ln|x^2+2x+5| + \int \frac{1}{x^2+2x+1+4}dx =$$
$$= x + \ln|x^2+2x+5| + \int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}dx =$$
$$= x + \ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}.arc\tan\frac{x+1}{2} + c.$$

9.4 Integrovanie goniometrických funkcií

Ak je integrovaná funkcia goniometrickou funkciou (môže byť aj zložená), zvyčajne používame univerzálnu substitúciu: $t = \tan\frac{x}{2}$ pre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

V takto zvolenej substitúcii odvodíme:

[27] Niekedy, v závislosti od stupňa jednotlivých polynómov, je vhodnejšie polynómy vydeliť.

$$x = 2\,arc\tan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

A pre samotné funkcie $y = \sin x$ alebo $y = \cos x$ platí:

$$\sin x = \sin 2.\frac{x}{2} = 2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} = \frac{2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{2t}{t^2+1} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \cos 2.\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Príklad Vypočítajte $\int \frac{1}{\sin x}dx$.

Riešenie. Použijeme substitúciu $t = \tan\frac{x}{2}$ a odvodíme:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx \ldots \left\| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ 2.\,arc\tan t = x \\ \frac{2}{1+t^2}dt = dx \end{array} \right\| \ldots = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}.\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

Aplikácia substitúcie $t = \tan\frac{x}{2}$ prevedie integrovanú goniometrickú funkciu na racionálnu funkciu. Ďalší postup riešenia je založený na vete o rozklade na parciálne zlomky. Aj keď ide o univerzálne použiteľnú substitúciu, jej nevýhodou je prácnosť výpočtu – menovateľ rýdzo racionálnej funkcie môže mať vysoký stupeň. Niekedy je účelné použiť iný typ substitúcie alebo vhodnú úpravu integrovanej funkcie.

Príklad Vypočítajte $\int(\tan x - \sin x)\,dx$.

Riešenie. Najprv upravíme integrovanú funkciu $y = \tan x - \sin x$.

$$\int(\tan x - \sin x)dx = \int\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x\right)dx = \int \sin x.\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)dx = \cdots \left\| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,.dx \end{array} \right\| \ldots$$

$$= \int \sin x\,.\left(\frac{1}{t} - 1\right).\frac{dt}{-\sin x} = \int\left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = t - \ln|t| + c = \cos x - \ln|\cos x| + c.$$

9.5 Integrovanie vybraných iracionálnych funkcií

Integrovať funkciu znamená určiť k nej primitívnu funkciu. V prípade iracionálnych funkcii je výpočet náročnejší. Ak dokážeme nájsť vhodnú substitúciu, integrovanú iracionálnu funkciu zväčša prevedieme na racionálnu funkciu.

Príklad Vypočítajte $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx.$

Riešenie. Počítame:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx \dots \left\| \begin{array}{c} \sqrt{x^2+2} = t \\ x^2+2 = t^2 \\ x^2 = t^2-2 \\ 2x.dx = 2t.dt \end{array} \right\| \dots = \int \frac{x^3}{t}.\frac{t}{x}.dt = \int x^2.dt = \int (t^2-2)dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - 2t + c = \frac{\sqrt{(x^2+2)^3}}{3} - 2\sqrt{x^2+2} + c.$$

Príklad * Vypočítajte $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx.$

Riešenie. Použijeme špeciálnu substitúciu.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx \dots \left\| \begin{array}{c} \sqrt{x^2+a^2} = t - x \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 \\ a^2 = t^2 - 2tx \\ \frac{t^2-a^2}{2t} = x \\ \frac{t^2+a^2}{2t^2}.dt = dx \end{array} \right\| \dots = \int \frac{1}{t-x}.\frac{t^2+a^2}{2t^2}.dt =$$

$$= \int \frac{1}{t - \frac{t^2-a^2}{2t}} \frac{t^2+a^2}{2t^2}.dt = \dots = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln\left|\sqrt{x^2+a^2} + x\right| + c.$$

Príklad Vypočítajte $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$

Riešenie. Upravíme výraz x^2+x+1 nasledovne:

$$x^2+x+1 = x^2 + 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Ak uvažujeme, že $a^2 = \frac{3}{4}$, položíme substitúciu $t = x + \frac{1}{2}$. Použijeme výsledok predchádzajúceho príkladu:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \dots = \ln\left|\sqrt{x^2+x+1} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\right| + c.$$

Existujú rôzne stratégie, ako vypočítať isté typy integrálov z iracionálnych funkcií. Uviedli sme len základné ukážky, preto doplníme tieto návody:

Tab. 9.1

Integrál	**Podmienky**	**Substitúcia**
$\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$	$a, b \in R$	$ax + b = t^n$
$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$	$a > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$
	$c \geq 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$
	$a.(x-x_1).(x-x_2) = 0,$ $x_1, x_2 \in R$ $a < 0$	$\sqrt{a.\dfrac{x-x_2}{x-x_1}} = t$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$	$x \in (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \infty)$	$\sqrt{x^2-a^2} = t + x$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$	$x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$	$x = \|a\|.\sin t$

9.6 Cvičenie

1. Zistite, či funkcie $y = -\ln|\cos x|$ a $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ sú primitívne funkcie k funkcii $y = \tan x$. Určte aj konštantu, o ktorú sa líšia.

2. Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $y = \ln x^2$, ktorá prechádza bodom $P[-1,0]$.

3. Vypočítajte integrál:

a) $\int \frac{1}{x^2}dx$ b) $\int x\sqrt{x}dx$ c) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$ d) $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

e) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$ f) $\int 3.2^x dx$ g) $\int \tan^2 x\, dx$ h) $\int \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx$

4. Vypočítajte metódou pre partes:

a) $\int x^2.e^x.dx$ b) $\int (x^2+x+2).\ln x.dx$ c) $\int x^2.\sin x.dx$ d) $\int arc\tan x.dx$

e) $\int \frac{arc\tan x}{1+x^2}dx$ f) $\int arc\tan\frac{x-1}{x+1}.dx$

5. Vypočítajte substitučnou metódou:

a) $\int \frac{dx}{1+16x^2}$ b) $\int e^{x^3}.x^2.dx$ c) $\int 3.e^x(1+e^x)^{\frac{1}{2}}dx$ d) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

e) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ f) $\int \frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}dx$ g) $\int e^{\sin x}.\cos x.dx$ h) $\int \frac{dx}{arc\sin x.\sqrt{1-x^2}}$

6. Vypočítajte použitím metód substitúcie a per partes:

a) $\int x^2 . e^{-\frac{x}{2}} . dx$ b) $\int x . \sin 3x . dx$ c) $\int arc \tan \sqrt{2x-1}$

Vypočítajte integrál z racionálnej funkcie:

a) $\int \frac{x}{(x-2)^2} dx$ b) $\int \frac{2+3x^2}{1+x^2} dx$ c) $\int \frac{2+3x^2}{1-x^2} dx$ d) $\int \frac{1}{x^2(1+3x)} dx$

e) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$ f) $\int \frac{5}{x^2-9x+14} dx$ g) $\int \frac{2x^3+5x^2+8}{2x^2+7x-15} dx$

7. Vypočítajte:

a) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ b) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$ c) $\int \frac{dx}{1+\tan x}$ d) $\int \sin^3 x . \cos^2 x \, dx$

8. Vypočítajte:

a) $\int \sqrt{2x+5} dx$ b) $\int \sqrt{1-x^2} dx$ c) $\int x\sqrt{x^2+2x+2} dx$ d) $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx$

10 Určitý integrál

Určitý integrál názvom nadväzuje na neurčitý integrál. Medzi uvedenými pojmami je však výrazný kvalitatívny rozdiel. Ukážeme, že existuje medzi nimi významné prepojenie – pojmové i obsahové.

10.1. Základné pojmy a geometrická interpretácia

Uvažujme interval $\langle a, b\rangle$, ktorý bude súčasťou definičného oboru funkcie $y = f(x)$. Zvoľme prirodzené číslo n. Vyberme postupnosť $(x_i)_{i=0}^{n}$ takých čísel z intervalu $\langle a, b\rangle$, aby platilo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Definícia Postupnosť $(x_i)_{i=0}^{n}, n \in N$, kde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

nazývame **delením *D* intervalu** $\langle a, b\rangle$ a zapisujeme

$$D := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}.$$

Čísla $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ nazývame deliacimi bodmi intervalu $\langle a, b\rangle$. Jednotlivé čiastkové intervaly $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, pre $i = 0,1, \dots, n-1$ majú dĺžku $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ a triviálne platí:

$$\sum_{i=0}^{n} \Delta x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Pre interval $\langle a, b\rangle$ existujú rôzne delenia, napr. pre $\langle 0,1\rangle$ môžeme uvažovať:

$D_1 := \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, kde pre dĺžky Δx_i čiastkových intervalov dostávame

$$\left\{\frac{1}{2} - 0, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, 1 - \frac{3}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}.$$

Ak by sme vzali delenie $D_2 := \{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\}$, potom dĺžky čiastkových intervalov sú postupne:

$$\left\{\frac{1}{10} - 0, \frac{2}{10} - \frac{1}{10}, \dots, 1 - \frac{9}{10}\right\} = \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10}\right\}.$$

Definícia **Normou delenia *D*** intervalu $\langle a, b\rangle$ nazývame maximum z dĺžok Δx_j, $j = 1, 2, \dots, n$ čiastkových intervalov $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ pre $i = 0,1, \dots, n-1$. Zapisujeme $\nu(D) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$.

Z ukážok konkrétnych delení intervalu $\langle 0,1\rangle$ vyššie uvedených vyplýva, že $\nu(D_1) = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{2}$ a analogicky $\nu(D_2) = \max\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10}\right\} = \frac{1}{10}$.

Interval $\langle a, b\rangle$ môžeme rozdeľovať ľubovoľne na nejaké vhodné delenia D_m, $m \in N$. Tým dostávame novú postupnosť $\left(D_j\right)_{j=1}^{m}$ – postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$ a každé delenie D_j má svoju normu $\nu\left(D_j\right)$, pre $j = 1, 2, \dots, m$.

Definícia Hovoríme, že postupnosť $\left(D_j\right)_{j=1}^{m}$ delení D_j intervalu $\langle a, b\rangle$ je **normálna**, ak limita noriem jednotlivých delení sa rovná 0, t.j.

$$\lim_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0.$$

Vytvorme takú normálnu postupnosť delení $\left(D_j\right)_{j=1}^{m}$ pre interval $\langle a, b\rangle$. Sú dve možnosti:

a) Uvažujme, že interval $\langle a, b\rangle$ rozdelíme na $n, n \in N$ (a je pevne zvolené) rovnako dlhých čiastkových intervalov.
Ak položíme $x_0 = a, x_n = b$, potom pre dĺžku čiastkového intervalu Δx_i platí:
$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}.$$
Ide o delenie, ktorého body sú členy **aritmetickej postupnosti**.
$$D_n := \left\{a = x_0, a + 1.\frac{b-a}{n}, a + 2.\frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1).\frac{b-a}{n}, a + n.\frac{b-a}{n} = b\right\}.$$
Norma delenia $\nu(D_n)$ je závislá od čísla n, pretože
$$\nu(D_n) = \max\{\Delta x_i\} = \max\ \{x_{i+1} - x_i\} = \max\left\{a + (i+1).\frac{b-a}{n} - a + i.\frac{b-a}{n}\right\} = \frac{b-a}{n}$$
a platí
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0.$$
Ak delíme interval $\langle a, b\rangle$ číslami, ktoré sú členmi aritmetických postupností s diferenciou $\frac{b-a}{n}$, máme normálnu postupnosť delení $\left(D_j\right)_{j=1}^{m}$.

b) Uvažujme o n deliacich bodoch x_i intervalu $\langle a, b\rangle$ ako o členoch konečnej **geometrickej postupnosti** s kvocientom q. Ak
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
potom
$$x_0 = a.q^0, x_1 = a.q^1, x_2 = a.q^2, \dots, x_{n-1} = a.q^{n-1}, x_n = a.q^n = b$$
a pre kvocient q odvodíme[28] $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.
V tomto prípade je norma delenia $\nu(D_n)$:
$$\nu(D_n) = \max\{\Delta x_i\} = \max\ \{x_{i+1} - x_i\} = \max\{a.q^{i+1} - a.q^i\} = a.q = a.\sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$
a platí
$$\lim_{n\to\infty} a.\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = a.\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = a.0 = 0.$$
Opäť sme získali normálnu postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Normálne postupnosti delení sú dôležité. Vďaka tomu, že limita postupnosti noriem ich delení sa rovná 0, zabezpečíme s hodnotou $n \to \infty$ stále „jemnejšie“ delenie intervalu $\langle a, b\rangle$.

Majme teraz jedno delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$.

V každom čiastkovom intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle, i = 0,1,2, \dots, n-1$ zvoľme číslo $\xi_j, j = 1,2, \dots, n$. [29]

---

[28] Výraz $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ musí byť definovaný.

[29] ξ čítame „ksí“.

Ak $y = f(x)$ je funkcia daná určitým predpisom a vieme určiť hodnoty $y_i = f(\xi_i)$, pre $i = 0,1,2,\dots,n$, potom dokážeme vypočítať aj takýto súčet:

$$f(\xi_1).(x_1 - x_0) + f(\xi_2).(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n).(x_n - x_{n-1}) = S_f(D).$$

Definícia Číslo $S_f(D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$ nazývame **integrálnym súčtom** funkcie $y = f(x)$ pre delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ pre danú voľbu čísel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, kde $\xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle, i = 0,1,2,\dots,n$.

Na obr. 10.1a) je znázornená funkcia $y = x^2$.

Ak uvažujeme interval $\langle 0,1\rangle$ s delením $D_4 := \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right\}$ a zvolíme stredy ξ_i, $i = 1,2,3,4$ čiastkových intervalov, ako hodnoty postupne sa rovnajúce $\left\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right\}$, potom príslušný integrálny súčet $S_f(D_4)$ sa rovná:

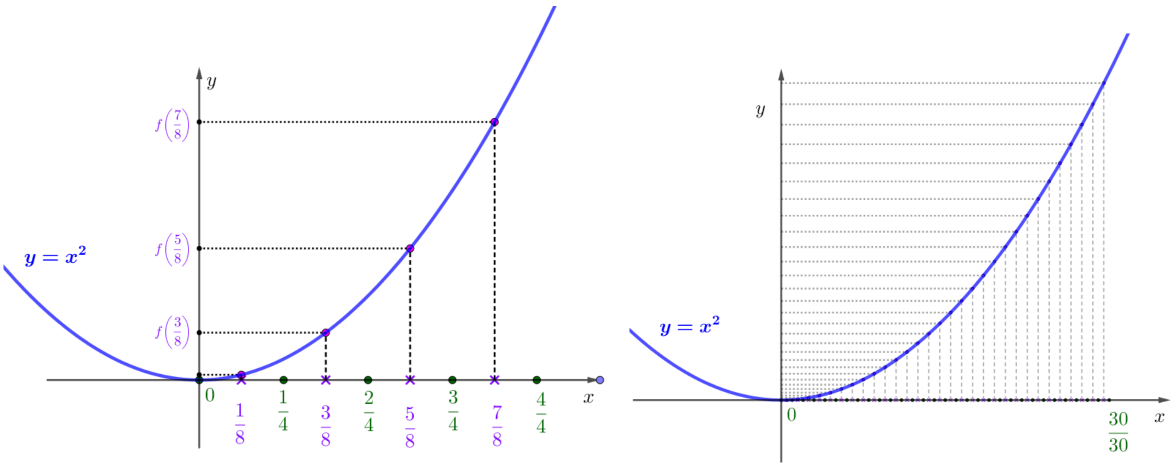
$$S_f(D_4) = f\left(\frac{1}{8}\right).\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{8}\right).\frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{8}\right).\frac{1}{4} + f\left(\frac{7}{8}\right).\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\left(\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2\right) = \frac{39}{128}$$
$$\approx 0{,}30468.$$

Analogicky,:

a) ak zvolíme delenie intervalu na $n = 30$ (obr. 10.1b) a uvažujeme opäť stredy príslušných čiastkových intervalov, potom vypočítame integrálny súčet

$$S_f(D_{30}) = \cdots \approx 0{,}35018,$$

b) pre $n = 80$ vypočítame $S_f(D_{80}) = \cdots \approx 0{,}33960.$

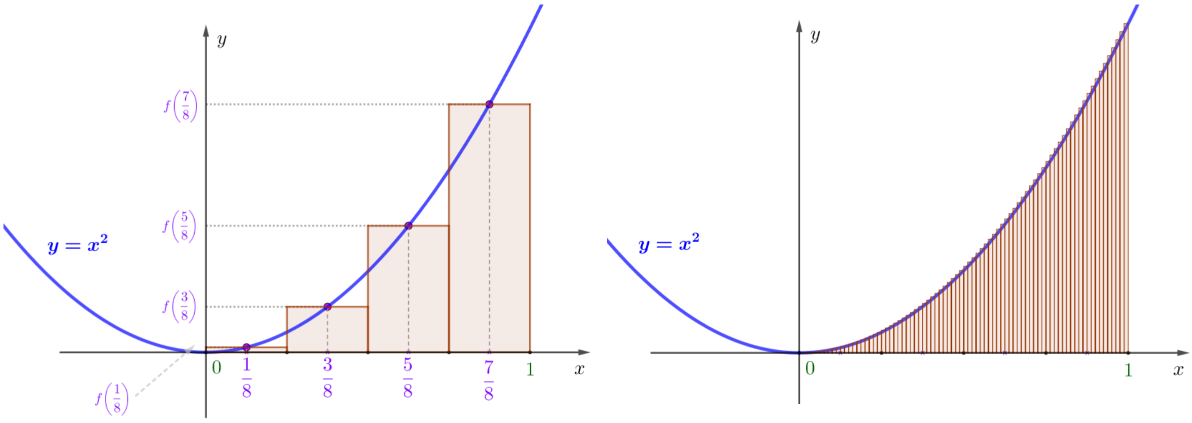


Obr. 10. 1a, b

Poukážeme na **geometrickú interpretáciu** integrálneho súčtu $S_f(D_n)$ funkcie $y = f(x)$ pri istom vybranom delení D_n intervalu $\langle a, b\rangle$.

Súčin $f(\xi_i).\Delta x_i = f(\xi_i).(x_{i+1} - x_i)$ geometricky predstavuje **obsah** jedného **obdĺžnika** so stranami $f(\xi_i)$ a Δx_i, ak ide o nezápornú funkciu $y = f(x)$ definovanú na $\langle a, b\rangle$.

Súčet všetkých súčinov $f(\xi_i).\Delta x_i$ je obsahom útvaru zloženého z n obdĺžnikov odpovedajúcich rozmerov (obr. 10. 2).



Obr. 10. 2 a, b

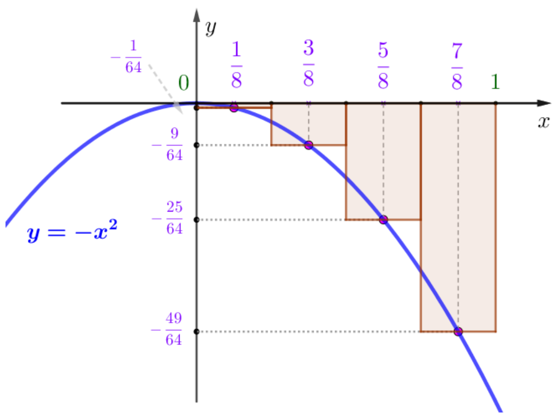
Čím menšia bude norma delenia $\nu(D_n)$, resp. $n \to \infty$, tým väčší počet „úzkych" obdĺžnikov bude pokrývať **plochu medzi osou x** a **grafom funkcie** $y = f(x)$. Napr., na obr. 10.2b) je pre funkciu $y = x^2$ na intervale $\langle 0,1 \rangle$ znázornených $n = 80$ obdĺžnikov.

Integrálny súčet $S_f(D_n)$ funkcie $y = f(x)$ pri delení D_n intervalu $\langle a, b \rangle$ predstavuje obsah plochy medzi osou x a grafom funkcie. Táto plocha je **orientovaná**[30].

Ak pre každé x z intervalu $\langle a, b \rangle$ platí, že $f(x) < 0$, potom následne aj pre $\xi_i \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ je $f(\xi_i) < 0$ a súčin $f(\xi_i).\Delta x_i < 0$. Výsledný integrálny súčet $S_f(D_n)$ je súčtom len záporných hodnôt a nutne je taktiež záporný.

Napr. pre funkciu $y = -x^2$ na interval $\langle 0,1 \rangle$ s delením $D_4 := \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right\}$, kde ξ_i, $i = 1,2,3,4$ sú stredy čiastkových intervalov, ako hodnoty postupne sa rovnajúce $\left\{-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{5}{8}, \frac{-7}{8}\right\}$, potom príslušný integrálny súčet $S_f(D_4)$ sa rovná:

$$S_f(D_4) = f\left(\frac{1}{8}\right).\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{8}\right).\frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{8}\right).\frac{1}{4} + f\left(\frac{7}{8}\right).\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\left(-\left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{7}{8}\right)^2\right) = -\frac{39}{128}$$



Obr. 10. 3

[30] Z definície obsah určitej plochy vyplýva, že obsah danej plochy je kladné (nezáporné) reálne číslo. Ak úloha vyžaduje určiť priamo obsah orientovanej plochy, uvažujeme vypočítané číslo v absolútnej hodnote.

Ak máme pevne zvolenú funkciu $y = f(x)$, interval $\langle a, b\rangle$ s delením D_n, hodnota integrálneho súčtu $S_f(D_n)$ závisí najmä od výberu bodov ξ_i. Každému deleniu D_n intervalu $\langle a, b\rangle$ môžeme priradiť nekonečne veľa integrálnych súčtov.

Definícia Ak $(D_j)_{j=1}^{n}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$ pre funkciu $y = f(x)$, potom postupnosť integrálnych súčtov $\left(S_f(D_j)\right)_{j=1}^{n}$ pre ľubovoľnú voľbu ξ_i v súčtoch $S_f(D_j)$ nazývame **prípustnou postupnosťou** integrálnych súčtov funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$.

Pri zjednodušenej predstave môžeme interpretovať definíciu nasledovne:

Nech máme konkrétnu funkciu $y = f(x)$ definovanú na intervale $\langle a, b\rangle$ a normálnu postupnosť delení $(D_j)_{j=1}^{n}$.

1)

a) Vyberieme normálne delenie D_1 intervalu $\langle a, b\rangle$,

b) zvolíme ľubovoľne body ξ_i^1 z čiastkových intervalov $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$,

c) vypočítame integrálny súčet $S_f^1(D_1)$.

d) Zvolíme si iné ľubovoľné body ξ_i^2 z čiastkových intervalov $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$

e) a opäť vypočítame odpovedajúci integrálny súčet $S_f^2(D_1)$.

f) Takto s výberom bodov ξ_i^j a výpočtom príslušného $S_f^j(D_1)$ postupujeme ďalej, teoreticky „donekonečna“ , pričom dostávame číselnú – prípustnú postupnosť integrálnych súčtov:

$$\left(S_f^1(D_1), S_f^2(D_1), \dots, S_f^j(D_1), \dots\right)$$

2)

a) Vyberieme (ďalšie v poradí) normálne delenie D_2 intervalu $\langle a, b\rangle$,

b) zvolíme ľubovoľne body ξ_i^2 z čiastkových intervalov $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$,

c) a vypočítame integrálny súčet $S_f^1(D_2)$, ... procesy opakujeme, a tak zostrojíme číselné - prípustné postupnosti integrálnych súčtov:

$$\left(S_f^1(D_2), S_f^2(D_2), \dots, S_f^j(D_2), \dots\right)$$
$$\vdots$$
$$\left(S_f^1(D_n), S_f^2(D_n), \dots, S_f^j(D_n), \dots\right)$$

Prípustné postupnosti sú postupnosťami, ktoré môžu i nemusia konvergovať. Ak majú limity, ich limity sa môžu navzájom rovnať.

Definícia **Určitým integrálom** funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$ nazývame reálne číslo I, pre ktoré platí, že pre každú prípustnú postupnosť integrálnych súčtov $\left(S_f(D_j)\right)_{j=1}^{n}$ na $\langle a, b\rangle$ platí

$$\lim_{n\to\infty} S_f(D_n) = I.$$

Zapisujeme symbolom

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Uzavretý interval $\langle a, b\rangle$ nazývame **integračným oborom**, číslo a je **dolná hranica** integrálu, číslo b **horná hranica** integrálu. Integrovaná funkcia $y = f(x)$ sa niekedy nazýva aj **integrand**, jej premennú x nazývame **integračná premenná**.

Ak existuje určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$ funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$, hovoríme, že funkcia je (riemannovsky) **integrovateľná** na intervale $\langle a, b\rangle$.

Určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$ je **spoločná limita**[31] všetkých prípustných postupností integrálnych súčtov funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$. To má rôzne využitie v matematike a v ďalších prírodných vedách.

Veta *Ak je funkcia $y = f(x)$ integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, potom je na intervale $\langle a, b\rangle$ ohraničená.*

Vetu uvádzame bez dôkazu, avšak upozorňujeme, že ju nemožno obrátiť. Existujú funkcie, ktoré sú ohraničené, ale nemožno ich integrovať[32].

10.2 Dolný a horný integrálny súčet

Významnými integrálnymi súčtami budú tie, pre ktoré môže $f(\xi_i)$ byť na čiastkovom intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ napr. **infimom** m_i alebo **suprémom** M_i[33] a to vždy pre určitú postupnosť delení $(D_j)_{j=1}^{n}$.

Definícia Ak $y = f(x)$ je ohraničená funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$ s delením D, potom reálne číslo

$$\underline{S}_f(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i . \Delta x_i,$$

kde $m_i = \underset{x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle}{\inf f(x)}$ je infimum na čiastkovom intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, sa nazýva **dolný integrálny súčet** funkcie $y = f(x)$ pre delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$.

Analogicky:

Definícia Ak $y = f(x)$ je ohraničená funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$ s delením D, potom reálne číslo

$$\bar{S}_f(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i . \Delta x_i,$$

kde $m_i = \underset{x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle}{\sup f(x)}$ je suprémum na čiastkovom intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, sa nazýva **horný integrálny súčet** funkcie $y = f(x)$ pre delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$.

Ak je funkcia $y = f(x)$ **spojitá**, dolný a horný integrálny súčet sú špeciálne prípady integrálnych súčtov funkcie $y = f(x)$. Infimum je v prípade spojitej funkcie minimálna hodnota na čiastkovom intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$; suprémum zase maximum na $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$.

---

[31] Samozrejme, ak táto limita existuje. Naviac, t*reba si uvedomiť, že určitý* ***integrál je číslo****, ktoré je výsledkom limity „viazanej“ na interval $\langle a, b\rangle$ a funkčný predpis $y = f(x)$. Neurčitý integrál je množina primitívnych funkcií $y = F(x) + c$ na intervale (a, b). Ide teda o rôzne pojmy.*

[32] Príkladom je Dirichletova funkcia $y = \begin{cases} 1, ak\ x\ je\ racionálne\ číslo \\ 0, ak\ x\ je\ iracionálne\ číslo \end{cases}$.

[33] V prípade ohraničenej funkcie $y = f(x)$ na uzavretom intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ infimum a suprémum vždy existujú, aj keď funkcia $y = f(x)$ nie je spojitá.

Ak zafixujeme delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$, potom existuje nekonečne mnoho integrálnych súčtov, ale dolný integrálny súčet je vždy len jeden; obdobne to platí aj pre horný integrálny súčet. Takže platí

$$\underline{S}_f(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i . \Delta x_i \leq S_f(D) \leq \bar{S}_f(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i . \Delta x_i .$$

pretože $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ pre každé $i \epsilon N$.

Dá sa dokázať, že pre ohraničenú funkciu $y = f(x)$ definovanú na intervale $\langle a, b\rangle$:

a) je dolný integrálny súčet vždy menší alebo rovný hornému integrálnemu súčtu a to bez ohľadu na to, či sa jedná o rovnaké alebo rôzne delenia D_1, D_2.

b) Ak zvolíme normálnu postupnosť delení $(D_j)_{j=1}^{n}$, potom existujú limity postupností im odpovedajúcich dolných a horných integrálnych súčtov a platí

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_f(D_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{S}_f(D_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ide dokonca o nutnú a postačujúcu podmienku integrovateľnosti funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$.

c) Spojité funkcie definované na uzavretom intervale sú vždy integrovateľné.

d) Ak má na intervale $\langle a, b\rangle$ funkcia $y = f(x)$ konečný počet bodov nespojitosti, potom je na $\langle a, b\rangle$ integrovateľná.

Príklad Vypočítajte dolný a horný integrálny súčet funkcie $y = x^2$ pre normálnu postupnosť delení intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Riešenie. Funkcia $y = x^2$ je na intervale $\langle 0,1\rangle$ spojitá a rastúca. Ak zvolíme aritmetickú normálnu postupnosť delení, potom $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ a funkcia na čiastkovom intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ nadobúda minimum v bode x_i; maximum v bode x_{i+1}, pričom

$$x_i = 0 + i.\frac{1-0}{n} = i \cdot \frac{1}{n}; \qquad x_{i+1} = 0 + (i+1)\cdot\frac{1}{n} = (i+1)\frac{1}{n}.$$

Vypočítame dolný integrálny súčet[34].

$$\underline{S}_f(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i . \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} . \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

a odvodíme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_f(D) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}n.(n+1).(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{6} . \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Pre horný integrálny súčet $\bar{S}_f(D)$ je situácia obdobná.

$$\bar{S}_f(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i . \Delta x_i = = \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left((i+1)\cdot\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

[34] Matematickou indukciou možno dokázať, že platí vzorec: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n.(n+1).(2n+1)$.

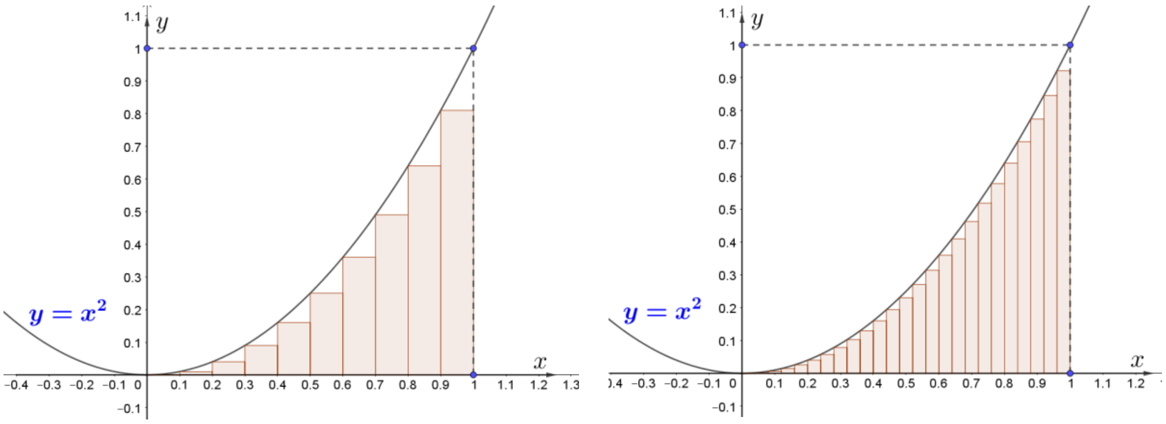
$$= \frac{1}{n^3} . \sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{S}_f(D) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}(n+1).(n+2).(2(n+1)+1)}{n^3} = \cdots = \frac{1}{3}.$$

Platí:

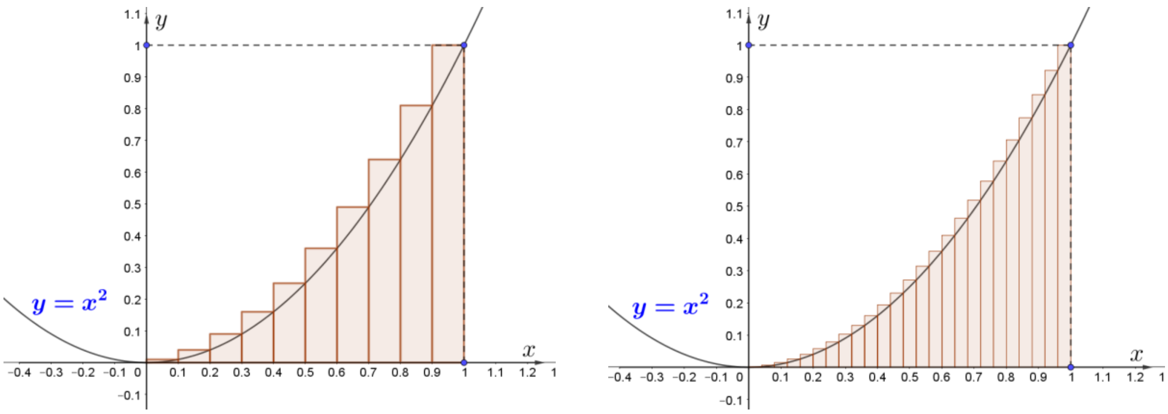
$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_f(D_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{S}_f(D_n) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Na obr. 10. 4a) je geometrická interpretácia dolného integrálneho súčtu pre $n = 10$, kde $\underline{S}_f(D_{10}) \approx 0.29$, na obr. 10.4b) pre $n = 25$ s hodnotou $\underline{S}_f(D_{25}) \approx 0.31$.



Obr. 10. 4 a, b

Geometrická interpretácia odpovedajúcich horných integrálnych súčtov je na obr. 10.5a,b s hodnotami $\bar{S}_f(D_{10}) \approx 0.38$ a $\bar{S}_f(D_{25}) \approx 0.35$.



Obr. 10. 5a, b

10.3 Základné vlastnosti určitého integrálu

Základné vlastnosti určitého integrálu určujú nasledovné vety.

Veta *Ak sú funkcie $y = f(x)$ a $y = g(x)$ integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$, potom je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ aj funkcia $y = f(x) + g(x)$ a platí:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Dôkaz. Uvažujme delenie $D := \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Ak predpokladáme, že funkcie$y = f(x), y = g(x)$ sú integrovateľné, znamená to, že existujú integrálne súčty

$S_f(D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$ a $S_g(D) = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i).\Delta x_i$ pre ľubovoľnú postupnosť hodnôt $\xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$. Môžeme teda uvažovať aj o osobitných deleniach intervalu $\langle a, b\rangle$, napr. tak, že vyberieme normálnu postupnosť delení $(D_j)_{j=1}^{n}$.

Ak vyberieme normálnu postupnosť delení $(D_j)_{j=1}^{n}$, potom podľa predpokladov existujú integrály

$$\lim_{n\to\infty} S_f(D_n) = \int_a^b f(x)dx\,, \qquad \lim_{n\to\infty} S_g(D_n) = \int_a^b g(x)dx\,.$$

Uvažujme o integrálnom súčte funkcie $y = f(x) + g(x)$ pre uvedenú normálnu postupnosť delení $(D_j)_{j=1}^{n}$. Platí:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \lim_{n\to\infty} S_{f+g}(D_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f+g)(\xi_i).\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i) + g(\xi_i)\big).\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i).\Delta x_i = S_f(D_n) + S_g(D_n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

■

Podobným spôsobom možno dokázať aj vety:

Veta *Ak je funkcia $y = f(x)$ integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, potom je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ aj funkcia $y = c.f(x)$. kde $c \in R$ a platí:*

$$c\int_a^b f(x)dxdx = \int_a^b c.f(x)dx.$$

Veta *Ak je funkcia $y = f(x)$ integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, potom platí:*

$$\int_a^b f(x)dxdx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Veta *Ak je funkcia $y = f(x)$ integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, potom pre $c \in \langle a, b\rangle$ platí:*

$$\int_a^b f(x)dxdx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

10.4 Geometrická a fyzikálna interpretácia určitého integrálu

Podľa uvedeného je **geometrická interpretácia** určitého integrálu z funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$ taká, že **vyjadruje plošný obsah útvaru S**, ktorý na intervale $\langle a, b\rangle$ ohraničuje graf funkcie a os x –ová, pričom platí:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Tento plošný obsah S je kladný, ak je funkcia nezáporná.

Na obr. 10.4a), b) , resp. obr. 10.5a), b) sme ukázali geometrický význam horného a dolného integrálneho súčtu pre funkciu $y = x^2$ na intervale $\langle 0,1\rangle$. Taktiež sme v riešení odvodili, že $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

F**yzikálna interpretácia:** $\int_a^b f(x)dx$ určuje **prácu** sily $F = f(x)$, účinkom ktorej sa hmotný bod presunie po osi $x -$ ovej z bodu a do bodu b.

10.5 Leibnitzov – Newtonov vzorec

Všetky predchádzajúce úvahy o určitých integráloch mohli pôsobiť trochu nesúrodo. Na jednej strane to bol neurčitý integrál ako množina primitívnych funkcií. Išlo o učivo, ku ktorému bolo potrebné zvládnuť viaceré spôsoby, ako tento integrál vypočítať. Na druhej strane bol zavedený pojem určitého integrálu ako výsledok limity (číslo) postupnosti integrálnych súčtov prislúchajúcich normálnej postupnosti delení istého intervalu. Ukážeme, že medzi neurčitým a určitým integrálom je úzka súvislosť, ktorú špecifikuje tzv. Leibnitzov-Newtonov vzorec.

Veta (dôležitá) *Ak je funkcia $y = f(x)$ integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a funkcia $y = F(x)$ jej jej primitívna funkcia na intervale $a, b)$, ktorá je spojitá,*

potom platí

$$\int_a^b f(x)dxdx = F(b) - F(a).$$

Dôkaz. Ak je funkcia $y = f(x)$ integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a funkcia $y = F(x)$ je jej primitívna funkcia, potom pre každé $x \in (a, b)$ platí: $F'(x) = f(x)$.

Ak má teda funkcia $y = F(x)$ deriváciu pre každé $x \in (a, b)$, potom je funkcia $y = F(x)$ na tomto intervale aj spojitá. Môžeme uvažovať tak, že v bode a je spojitá sprava a v bode b zase spojitá zľava.

Ak uvažujeme normálnu postupnosť delení $\left(D_j\right)_{j=1}^{n}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, potom pre funkciu $y = F(x)$ na každom čiastkovom intervale $\langle x_i x_{i+1}\rangle$ sú splnené predpoklady Lagrangeovej vety. Existuje teda také číslo c_i z každého čiastkového intervalu $\langle x_i x_{i+1}\rangle$, že platí:

$$F'(c_i) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\Delta x_i},$$

kde $F'(c_i) = f(c_i)$. Odvodíme teda

$$f(c_i).\Delta x_i = F(x_{i+1}) - F(x_i).$$

Pre integrálny súčet $S_f(D_n)$ odvodíme:

$$S_f(D_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} F(x_{i+1}) - F(x_i) =$$

$$= \big(F(x_1) - F(x_0)\big) + \big(F(x_2) - F(x_1)\big) + \cdots + F\big((x_n) - F(x_{n-1})\big) =$$

$$F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Odtiaľ vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} S_f(D_n) = \lim_{n\to\infty}\big(F(b)-F(a)\big) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

Býva zvykom zapisovať

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).}$$

Táto dôležitá veta dovoľuje počítať určité integrály tak, že určíme najprv primitívnu funkciu $y = F(x)$ k integrovanej funkcii $y = f(x)$ a vypočítame rozdiel funkčných hodnôt primitívnej funkcie v krajných bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$.

Príklad Vypočítajte $\int_0^1 x^2 dx$ a porovnajte s výsledkom riešenia predchádzajúceho príkladu.

Riešenie. Vypočítame

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in R.$$

Podľa Leibnitzovho- Newtonovho vzorca dostaneme výsledok:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Výsledok je rovnaký, ako pri výpočte horného a dolného integrálneho súčtu funkcie $y = x^2$ pre normálnu (aritmetickú) postupnosť delení intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Príklad Vypočítajte obsah plochy medzi grafom funkcie $y = \sin^2 x$ a osou x na intervale $\langle 0, \pi\rangle$.

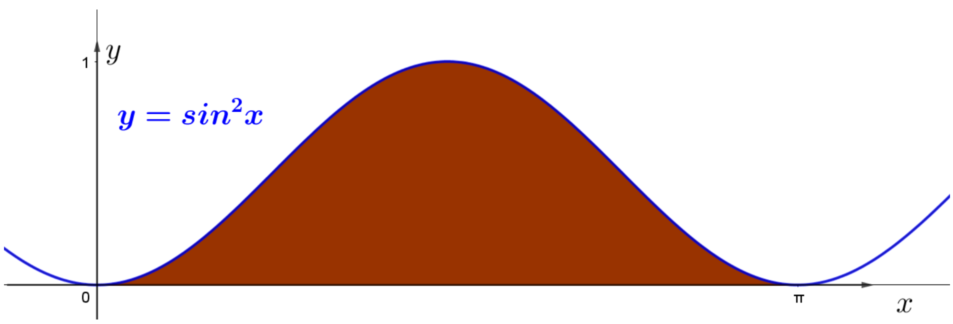
Riešenie. V kapitole o použití metódy per partes sme odvodili:

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x - \sin x.\cos x}{2} + c.$$

Aplikujeme Leibnitzov- Newtonov vzorec a vypočítame:

$$S = \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \left[\frac{x - \sin x.\cos x}{2}\right]_0^\pi = \left(\frac{\pi - \sin\pi.\cos\pi}{2}\right) - \left(\frac{0 - \sin 0.\cos 0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Obsah uvažovanej plochy je $\frac{\pi}{2} j^2$.



Obr. 10.6

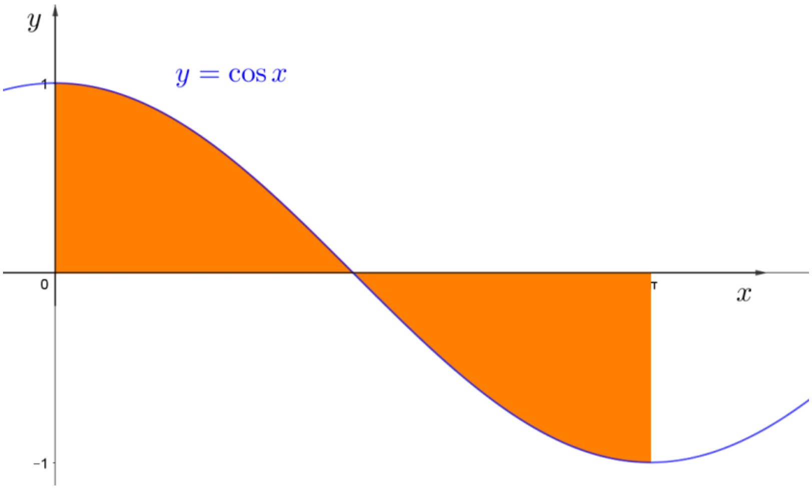
Príklad Vypočítajte obsah plochy medzi grafom funkcie $y = \cos x$ a osou x na intervale $\langle 0, \pi \rangle$.

Riešenie: Najprv vypočítame neurčitý integrál $\int \cos x \, dx = \sin x + c$ a následne použijeme vzorec:

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0.$$

Výpočtom sme dostali prekvapivý výsledok. Integrál je nulový, hoci na obr. 10.7 má vyznačená plocha istý nenulový obsah.

Ide o to, ako interpretujeme obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x.



Obr. 10.7

Funkcia $y = \cos x$ na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ nadobúda kladné funkčné hodnoty, zatiaľ čo pre $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ sú funkčné hodnoty záporné. Ak nás zaujíma obsah plochy v geometrickom zmysle (kladné číslo), potom vzhľadom na stredovú súmernosť so stredom v bode $\left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$, obsah vyznačenej plochy na obr. 10.7 je

$$S = 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.\left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2.(1 - 0) = 2.$$

Príklad Vypočítajte obsah plochy ohraničenej grafmi funkcií $y = x^3$ a $y = \sqrt{x}$.

Riešenie: Na obr. 10. 8a,b sú postupne znázornené grafy oboch funkcií, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Určíme súradnice priesečníkov.

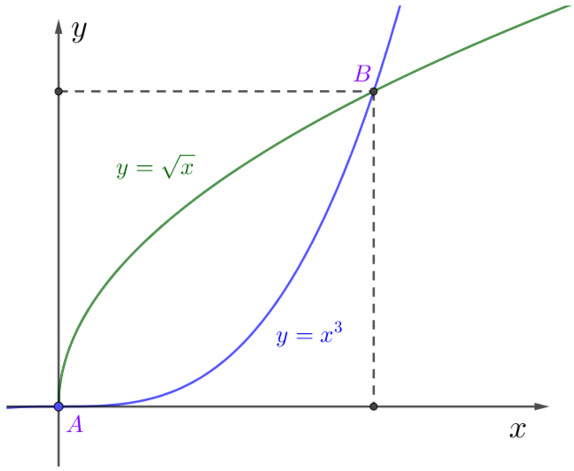
Priesečníky sú spoločné body oboch grafov, preto ich súradnice vyhovujú obom funkčným predpisom. Z toho vyplýva, že

$$x^3 = \sqrt{x} \qquad /^2$$

$$x^6 = x$$

$$x^6 - x = 0$$

$$x(x^5 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \; \wedge \; x_2 = 1.$$



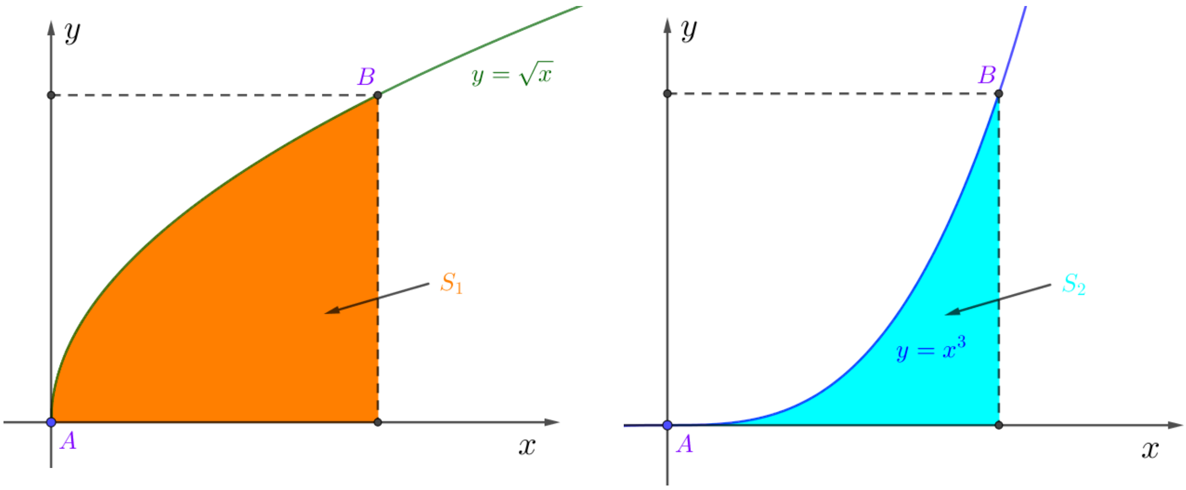
Obr. 10. 8a

Integračný interval je teda $\langle 0,1 \rangle$. Z toho vyplýva, že na intervale $\langle 0,1 \rangle$:

a) integrál $\int_0^1 \sqrt{x}dx$ určuje plochu S_1 medzi osou x a grafom funkcie $y = \sqrt{x}$ (obr. 10.8b),

b) integrál $\int_0^1 x^3 dx$ určuje plochu S_2 medzi osou x a grafom funkcie $y = x^3$ (obr. 10.8c),

c) Plocha S ohraničená grafmi je ich rozdielom $S = S_1 - S_2$.



Obr. 10. 8b, c

Počítame:

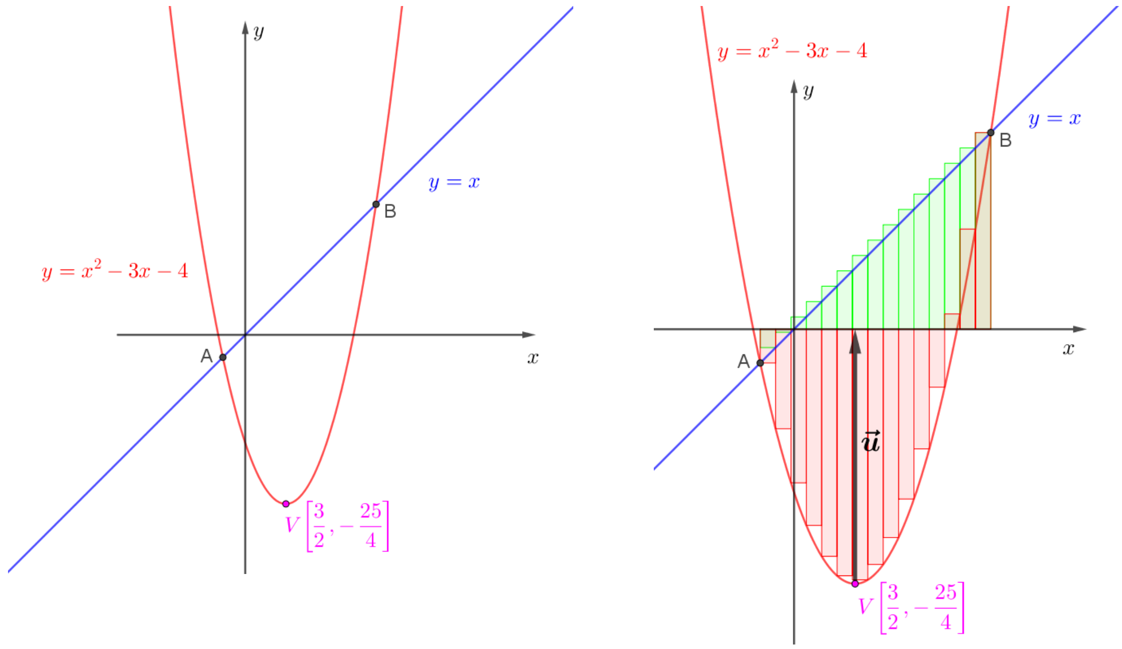
$$\int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^3\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \cdots = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Príklad Vypočítajte obsah plochy ohraničenej grafmi funkcií $y = x^2 - 3x - 4$ a $y = x$.

Riešenie. Na obr. 10. 9a) sú postupne znázornené grafy oboch funkcií, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Na obr. 10.9b) sú znázornené horné integrálne súčty pre obe funkcie a to pre aritmetickú normálnu postupnosť delenia intervalu $\langle x_A, x_B \rangle$. Plocha ohraničená grafmi funkcií sa „skladá z častí pod a nad osou x“.

Z toho vyplýva, že obsah plochy určenej grafmi oboch funkcií je mierne problematický. V predchádzajúcich príkladoch sme určovali obsah plochu pre prípady, keď funkcie boli nezáporné (grafy “nad osou x“). Posunieme teda oba grafy s vektorom posunutia $\vec{u} = \left(0, \frac{25}{4}\right)$ o dĺžku $\frac{25}{4}$ v smere osi y.

Posunutím oboch grafov sa zmení situácia (obr. 10.9 c). Vrchol posunutej paraboly sa dotkne osi x v bode $V'\left[\frac{3}{2}, 0\right]$.



Obr. 10. 9a, b

Príslušný obsah vypočítame obdobným spôsobom ako v predchádzajúcom príklade[35]. Funkčné predpisy sú po posunutí nasledovné:

$$y = x^2 - 3x - 4 + \frac{25}{4} = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$

$$y = x + \frac{25}{4}.$$

Priesečníky A', B' posunutých grafov majú súradnice:

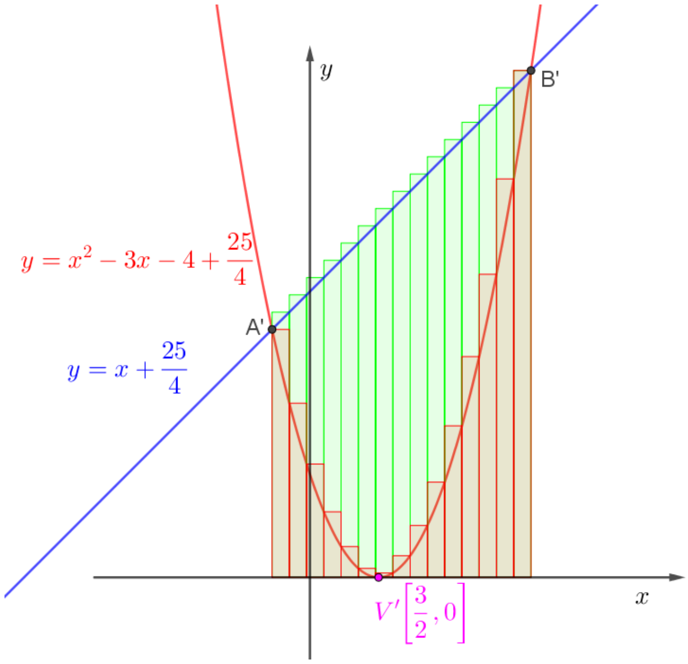
$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = x + \frac{25}{4}$$
$$\vdots$$
$$x^2 - 4x - 4 = 0$$
$$D = (-4)^2 - 4.1.(-4) = 32$$
$$\vdots$$
$$x_{A,B} = 2.\left(1 \mp \sqrt{2}\right).$$

Integračný interval je $\langle 2\left(1 - \sqrt{2}\right), 2\left(1 + \sqrt{2}\right)\rangle$. Obsah S plochy určenej grafmi funkcií vypočítame:

[35] Posunutím sa obsah a tvar plochy nezmenil. Posunutie treba realizovať tak, aby posunuté grafy zodpovedali nezáporným funkciám.

$$S=\int_{2(1-\sqrt{2})}^{2(1+\sqrt{2})}\left(x+\frac{25}{4}\right)dx-\int_{2(1-\sqrt{2})}^{2(1+\sqrt{2})}\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)dx=\int_{2(1-\sqrt{2})}^{2(1+\sqrt{2})}(-x^2+4x+4)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}+4x\right]_{2(1-\sqrt{2})}^{2(1+\sqrt{2})}=\cdots\approx 29.96.$$



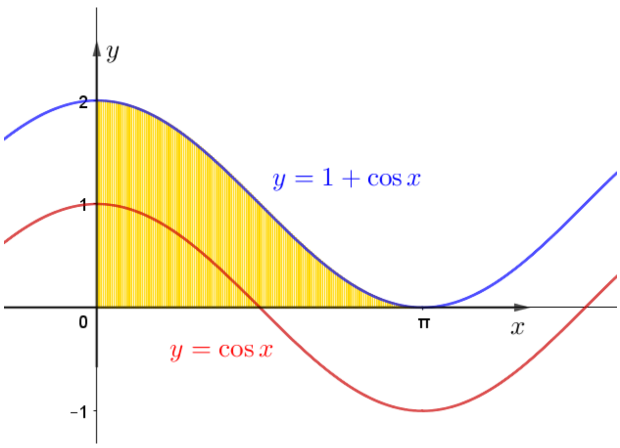
Obr. 10. 9c

Ukázali sme spôsob, ako vypočítať plochu určenú grafmi funkcie a osou x pomocou vhodného posunutia v smere osi y. Ide o účelný postup, pokiaľ nejde o funkcie osobitných vlastností, napr. ako párna funkcia $y=\cos x$ na intervale $\langle 0,\pi\rangle$ (obr. 10.7).

Ak posunieme graf funkcie s vektorom $\vec{u}=(0,1)$, potom na $\langle 0,\pi\rangle$ integrálom $\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx$ vypočítame, že obsah plochy medzi grafom funkcie a osou x sa rovná:

$$\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx=[x+\sin x]_0^{\pi}=(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)=\pi,$$

pretože s vektorom $\vec{u}$ sa zmenil tvar uvažovanej plochy (elementárneho útvaru).



Obr. 10. 10

10.6 Substitučná metóda pre určitý integrál

V kapitole 9.2 Integrovanie substitučnou metódou sme uviedli základné vety a spôsoby, ako postupovať pri výpočte neurčitého integrálu. Použitie substitučnej metódy pre určité integrály je založené na nasledujúcich dvoch vetách, ktoré uvedieme bez dôkazov.

Veta *Ak je funkcia $y = f(x)$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a funkcia $x = \varphi(t)$ spĺňa podmienky:*

a) má spojitú deriváciu $x' = \varphi'(t)$ na intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$,
b) $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$,
c) pre každé $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ je $x = \varphi(t) \in \langle a, b\rangle$,

potom

$$\int_a^b f(x)dxdx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big).\varphi'(t)dt.$$

Upozorňujeme, že praktické použitie vety je podmienené overením predpokladov vety.

Veta *Ak na intervale $\langle a, b\rangle$ možno integrovanú funkciu vyjadriť :*

a) v tvare $y = f\big(\varphi(x)\big).\varphi'(x)$, kde $t = \varphi(x), t' = \varphi'(x)$ sú spojité funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$
b) a súčasne je funkcia $y = f(t)$ v každom bode $t = \varphi(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$,
potom

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big).\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Príklad Vypočítajte $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

Riešenie. Ak položíme substitúciu $t = e^x$, potom $x = \varphi(t) = \ln t$, kde $t \in (0, \infty)$. Vzhľadom k tomu, že $\langle a, b\rangle = \langle 0,1\rangle$, potom pre:

a) $x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1 = \alpha$,
b) $x = 1 \Rightarrow t = e^1 = e = \beta$.

Počítame

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \dots \left\| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x.dx = dt \\ t \in \langle 1, e\rangle \end{matrix} \right\| \dots = \int_1^e \frac{e^x}{1+t^2}.\frac{dt}{e^x} = \int_1^e \frac{1}{1+t^2}dt = [arc\tan t]_1^e =$$

$$= arc\tan e - arc\tan 1 = arc\tan e - \frac{\pi}{4} \approx 0.43$$

10.7 Poznámka k metóde per partes pre určitý integrál

Použitie metódy per partes pre neurčité integrály bolo detailne vysvetlené v kapitole 9.1. Uvedenú metódu možno aplikovať aj pre výpočet určitého integrálu, pretože platí:

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx,$$

kde funkcie $y = f(x), y = g(x)$ majú na intervale $\langle a, b\rangle$ spojité derivácie.

Nie vždy je nutné priamo aplikovať uvedený vzorec. Niekedy postačí vypočítať primitívnu funkciu k integrovanej funkcii a následne použiť Leibnitz- Newtonov vzorec.

Príklad Vypočítajte $\int_1^e \ln x\, dx$.

Riešenie. Metódou per partes možno odvodiť, že

$$\int \ln x\, dx = x.\,ln\, x - x + c, \quad c \in R.$$

Ak použijeme vyššie uvedený vzorec, dostaneme:

$$\int_1^e \ln x\, dx = [x.\,ln\, x - x]_1^e = (e.\ln e - e) - (1.\ln 1 - 1) = e.1 - e - 1.0 + 1 = 1.$$

10.8 Určitý integrál s hornou hranicou

Medzi základné vlastnosti integrálu (neurčitého, aj určitého) patrí skutočnosť, že na označení integračnej premennej nezáleží, napr. platí rovnosť:

$$\int_a^b f(x).\,dx = \int_a^b f(t).\,dt = \int_a^b f(u).\,du = \ \ldots$$

Taktiež sme vysvetlili, že pre integrovateľnú funkciu $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$ platí:

$$\int_a^b f(x).\,dx = \int_a^c f(x).\,dx + \int_c^b f(x).\,dx,$$

kde $c \in \langle a, b\rangle$.

Uvažujme teraz, že číslo $c \in \langle a, b\rangle$ „prebieha postupne cez všetky hodnoty/nadobúda" z intervalu $\langle a, b\rangle$. Skúsme najprv krajné hodnoty.

a) Ak $c = a$, potom $\int_a^c f(x).\,dx = \int_a^a f(x).\,dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$,
b) ak $c = b$, potom $\int_a^c f(x).\,dx = \int_a^b f(x).\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$,

kde $y = F(x)$ je jedna z primitívnych funkcií k funkcii $y = f(x)$ (ak existuje).

Ak je c ľubovoľné číslo z intervalu $\langle a, b\rangle$, príslušný určitý integrál je hodnota:

$$\int_a^c f(x).\,dx = [F(x)]_a^c = F(c) - F(a)$$

a môžeme povedať, že ľubovoľnému $c \in \langle a, b\rangle$ sme priradili číslo $F(c) - F(a)$.

Príklad Vypočítajte $\int_0^1 x^2 dx$. Súčasne zistite príslušné hodnoty integrálov $\int_0^c x^2 dx$, kde

$$c \in \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, 1\right\}.$$

Riešenie. Vypočítame:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ak za hornú hranicu dosadzujeme postupne hodnoty c, vypočítame

c	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}=1$
$\int_0^c x^2 dx$	0	$\frac{1}{3000}$	$\frac{8}{3000}$	$\frac{27}{3000}$	$\frac{64}{3000}$	$\frac{125}{3000}$	$\frac{216}{3000}$	$\frac{343}{3000}$	$\frac{512}{3000}$	$\frac{729}{3000}$	$\frac{1000}{3000}=\frac{1}{3}$

Riešenie príkladu je ukážkou, ako pomocou istej hodnoty $c \in \langle a, b\rangle$ definujeme určitú funkciu, ktorej funkčné hodnoty stanovujeme prostredníctvom $\int_a^c f(t).dt$.

Definícia Ak je funkcia $y = f(t)$ integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, potom funkcia $y = h(x)$ definovaná vzťahom

$$h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

pre $x \in \langle a, b\rangle$ sa nazýva **integrál s premenlivou hornou hranicou.**

Integrál s premenlivou hornou hranicou je funkcia premennej x, ak za hodnotu x nebudeme stanovovať konkrétne $c \in \langle a, b\rangle$.

Príklad Určte integrál premenlivej hornej hranice pre funkciu $y = \frac{1}{t}$, pre $t > 1$.

Riešenie. Vypočítame:

$$h(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_1^x = \ln|x| - \ln|1| = \ln|x| - 0 = \ln x,$$

pretože pre $x \geq 1$ platí $|x| = x$.

Na ukážke riešenia príkladu vidíme, že pomocou integrálu s premenlivou hornou hranicou vieme definovať ďalšie funkcie. Mnohé z nich užitočné vlastnosti, neraz s presahom do iných oblastí matematiky, napr. v teórii pravdepodobnosti sa definuje *funkcia hustoty* alebo aj *Laplaceova funkcia*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

10.9 Poznámka k nevlastným integrálom

Definovali sme určitý integrál funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$, pričom sme uvažovali o splnení dvoch predpokladov:

a) interval $\langle a, b\rangle$ má konečnú dĺžku,
b) integrovaná funkcia je na intervale $\langle a, b\rangle$ ohraničená.

V tejto kapitole zovšeobecníme oba prípady.

Definícia Ak definičný obor funkcie $y = f(x)$ je interval $\langle a, \infty)$ a pre každé reálne číslo $b > a$ je na intervale $\langle a, b\rangle$ funkcia integrovateľná, potom vlastnú limitu

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

nazývame **nevlastný integrál** funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a,\infty)$ a zapisujeme

$$\int_a^{\infty} f(x).dx.$$

Ak $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ existuje (je vlastná), potom hovoríme, že nevlastný integrál **konverguje**. Ak je limita $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ nevlastná alebo neexistuje, potom hovoríme, že nevlastný integrál **diverguje.**

Príklad Ukážte, že nevlastný integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$ konverguje a výsledok interpretujte geometricky.

Riešenie. Definičný obor $D(f)$ funkcie $y = \frac{1}{x^2+x}$ je $D(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,\infty)$. Overíme konvergenciu na intervale $\langle 1,\infty)$.

Vypočítame najprv primitívnu funkciu neurčitého integrálu $\int \frac{1}{x^2+x} dx$. Integrovaná funkcia je rýdzo racionálna funkcia, preto urobíme rozklad na parciálne zlomky.

$$\int \frac{1}{x^2+x} dx = \int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x+1} dx.$$

Porovnaním polynómov odvodíme:

$$\begin{gathered} 1 = A(x+1) + B.x \\ 0.x + 1 = (A+B).x + A.1 \\ \Downarrow \\ 0 = A + B \\ 1 = A \ \wedge B = -1 \end{gathered}$$

Vypočítame[36]:

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx = \ln|x| - \ln|x+1| + c = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c.$$

Keď sme určili primitívnu funkciu, použijeme Leibnitzov- Newtonov vzorec a definíciu nevlastného integrálu. Počítame limitu:

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2+x} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left|\frac{b}{b+1}\right| - \ln\left|\frac{1}{1+1}\right|\right) = \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left|\frac{b}{b+1}\right| - \ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{\frac{b}{b+1}}{\frac{1}{2}}\right| = \lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{2b}{b+1}\right|.$$

Limitu $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{2b}{b+1}$ je typu $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, aplikujeme L' Hospitalovo pravidlo[37]:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{2b}{b+1} = \lim_{b\to\infty} \frac{2}{1} = 2.$$

Nevlastný integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$ konverguje a platí:

---

[36] Platí: $\log_a X - \log_a Y = \log_a \frac{X}{Y}$ pre $a > 0, a \neq 1$.

[37] Derivujeme podľa premennej b.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx = \ln 2.$$

Ak hodnota určitého integrálu $\int_a^b f(x)\, dx$ na intervale $\langle a, b\rangle$ predstavuje obsah orientovanej plochy medzi grafom funkcie a osou x, potom obsah plochy medzi grafom funkcie $y = \frac{1}{x^2+x}$ a osou x na nekonečnom intervale $\langle 1,\infty)$ sa rovná $\ln 2$.

Príklad Ukážte, že nevlastný integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverguje.

Riešenie. Definičný obor $D(f)$ funkcie $y = \frac{1}{x}$ je $D(f) = R - \{0\}$. Počítame:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} [\ln|x|]_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty} (\ln b - 0) = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

Výsledná limita je nevlastná, integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ na intervale $\langle 1, \infty)$ diverguje.

Analogicky, ako sme zaviedli nevlastný integrál na intervale $\langle a, \infty)$, možno definovať aj nevlastný integrál na intervale $(-\infty, a\rangle$.

$$\lim_{b\to -\infty} \int_b^a f(x) dx.$$

Naviac, vieme definovať aj nevlastný integrál na intervale $(-\infty, \infty)$ a to pomocou dvoch limít.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{c} f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{b\to -\infty} \int_b^c f(x) dx + \lim_{a\to\infty} \int_c^a f(x) dx,$$

pre ľubovoľné[38] $c \in D(f)$.

Ak **niektorá** z limít $\lim_{b\to -\infty} \int_b^c f(x) dx$, $\lim_{a\to\infty} \int_c^a f(x) dx$ **je nevlastná alebo neexistuje**, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ **diverguje**.

Príklad Zistite, či nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$ konverguje.

Riešenie. Definičný obor $D(f)$ funkcie $y = \frac{2x}{x^2+1}$ je $D(f) = R$. Počítajme teda dve limity:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx = \lim_{b\to -\infty} \int_b^0 \frac{2x}{x^2+1} dx + \lim_{a\to \infty} \int_0^a \frac{2x}{x^2+1} dx.$$

Ak jedna z uvažovaných limít diverguje, potom diverguje aj nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$.

Vypočítame najprv primitívnu funkciu k funkcii $y = \frac{2x}{x^2+1}$ a to pomocou metódy substitúcie.

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \dots \left\| \begin{matrix} x^2+1 = t \\ 2x.dx = dt \end{matrix} \right\| \dots = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x^2+1| + c.$$

Ďalej odvodíme:

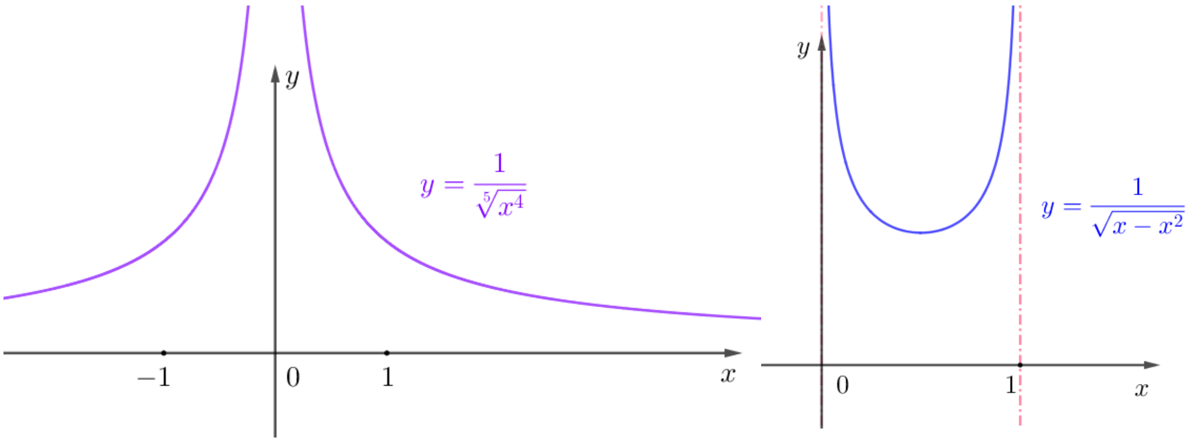
[38] Stále uvažujeme prípad, že funkcia $y = f(x)$ je na danom intervale integrovateľná.

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{2x}{x^2+1}dx = \lim_{a\to\infty}[\ln|x^2+1|]_0^a = \lim_{a\to\infty}(\ln|a^2+1| - \ln|0^2+1|) = \lim_{a\to\infty}\ln|a^2+1| = \infty.$$

Výsledok je postačujúci k záveru, že nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx$ diverguje.

Naznačili sme, že výpočet nevlastného integrálu na intervale $(-\infty,\infty)$ sa môže rozdeliť na viaceré čiastkové výpočty. Situácia sa mierne zmení, ak funkcia nie je definovaná v každom bode daného intervalu.

Napr. funkcia $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$ nie je definovaná pre $x=0$ a v okolí tohto bodu je neohraničená (obr. 10.11a).



Obr. 10.11a, b

Definícia Ak funkcia $y=f(x)$ je definovaná na intervale $(a,b\rangle$ tak, že:

a) v okolí bodu a je neohraničená,
b) je integrovateľná na každom intervale $\langle a+\varepsilon, b\rangle$, kde $\varepsilon>0, a+\varepsilon<b$,
c) existuje vlastná limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

potom túto limitu nazývame **nevlastný integrál** funkcie $y=f(x)$ na intervale $\langle a,b\rangle$ a zapisujeme

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ak $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ nevlastná alebo neexistuje, potom hovoríme, že nevlastný integrál **diverguje.** V niektorých situáciách môže nastať prípad, že funkcia je neohraničená v okolí vnútorného bodu intervalu $\langle a,b\rangle$, prípadne je neohraničená v jeho krajných bodoch, napr. funkcia $y=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ je neohraničená v krajných bodoch definičného oboru pre $x=0$ a $x=1$ (obr. 10.11 b).

Príklad Vypočítajte integrál $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}dx$.

Riešenie. Definičný obor $D(f)$ funkcie $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$ je $D(f)=R-\{0\}$ a ide o výpočet nevlastného integrálu. V okolí bodu $x=0$ je funkcia neohraničená (obr. 10.11) a podľa definície budeme počítať dve limity:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx + \lim_{\mu \to 0} \int_{0+\mu}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx.$$

Vypočítame najprv primitívnu funkciu.

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx = \int x^{-\frac{4}{5}} dx = \frac{x^{-\frac{4}{5}+1}}{-\frac{4}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} + c = 5\sqrt[5]{x} + c.$$

Počítame:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx + \lim_{\mu \to 0} \int_{0+\mu}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[5\sqrt[5]{x}\right]_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\mu \to 0} \left[5\sqrt[5]{x}\right]_{\mu}^{1} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(5\sqrt[5]{\varepsilon} - 5\sqrt[5]{-1}\right) + \lim_{\mu \to 0} \left(5\sqrt[5]{1} - 5\sqrt[5]{\mu}\right) = \cdots = 5 + 5 = 10.$$

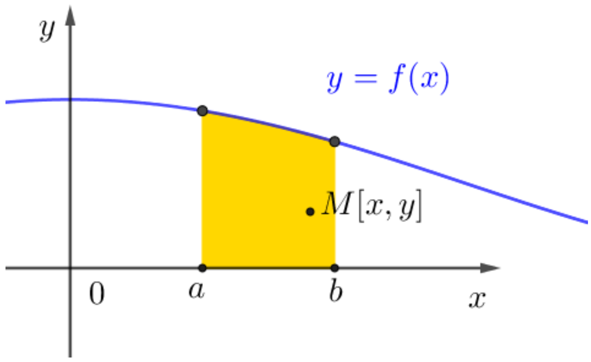
Existujú obe vlastné limity, integrál $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx$ na intervale $\langle -1,1 \rangle$ konverguje, hoci funkcia $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$ je v okolí bodu $x = 0$ neohraničená, resp. nedefinovaná.

10.10 Ďalšie geometrické aplikácie

Ukázali sme, že určitý integrál definovaný z nezápornej funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ je číslo, ktoré predstavuje obsah plochy tzv. **elementárneho útvaru** – plochy ohraničenej grafom funkcie a osou x na intervale $\langle a, b \rangle$.

Elementárny útvar U môžeme zapísať ako množinu bodov M so súradnicami $[x, y]$, kde:

$$U = \{M[x, y]; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$



Obr. 10.12

Možno dokázať, že **objem telesa**, ktoré vznikne rotáciou elementárneho útvaru U okolo osi x, vypočítame podľa vzorca

$$V = \pi \int_{a}^{b} f^2(x) dx.$$

Príklad Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárneho útvaru

$$U = \{[x, y]; 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}.$$

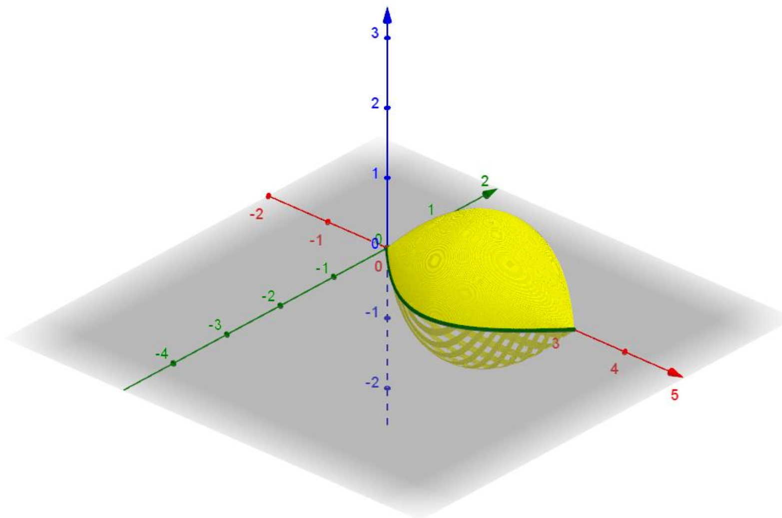
Riešenie. Objem uvažovaného rotačného telesa vypočítame ako integrál

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx.$$

Platí[39], že $\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x . \cos x}{2} + c.$

Z toho vyplýva:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \pi \left[\frac{x - \sin x . \cos x}{2}\right]_0^\pi = \pi \left(\frac{\pi - \sin \pi . \cos \pi}{2} - \frac{0 - \sin 0 . \cos 0}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$



Obr. 10.13

Príklad Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárneho útvaru ohraničeného funkciami $y = \sqrt{x}$ a $y = x^3$ okolo osi x.

Riešenie. Najprv zistíme integračný interval[40]. Grafy funkcií $y = \sqrt{x}$ a $y = x^3$ sa pretínajú v dvoch bodoch $A[0,0], B[1,1]$.

Rotáciou grafu funkcie $y = \sqrt{x}$ okolo osi vznikne rotačné teleso, ktorého objem V_1 vpočítame:

$$V_1 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \cdots = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

Ak okolo osi x rotuje graf funkcie $y = x^3$, potom na intervale $\langle 0,1 \rangle$ vytvorí rotačné teleso s objemom V_2 a platí:

$$V_2 = \pi \int_0^1 (x^3)^2 \, dx = \cdots = \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \cdots = \frac{\pi}{7}.$$

Pre výsledné teleso a jeho objem V odvodíme: $V = V_1 - V_2 = V_1 = \pi \frac{5}{14}.$

[39] Primitívna funkcia je detailne vypočítaná v kapitole 9.1 Metóda integrovania per partes.
[40] Detailné riešenie je súčasťou príkladu viazaného na obr. 10.8a).

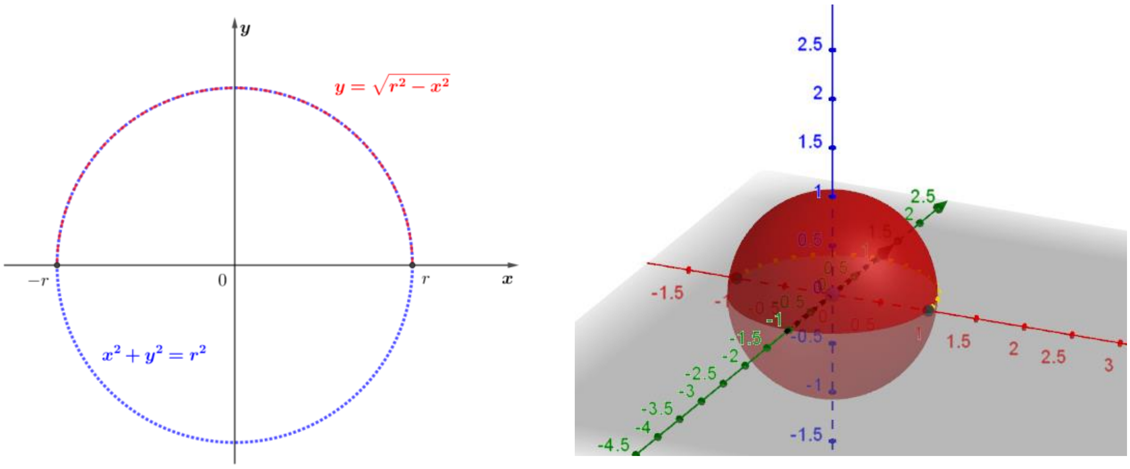
Príklad Odvoďte vzorec na výpočet objemu gule s polomerom r.

Riešenie. Rovnica kružnice k so stredom $S[0,0]$ a polomerom r je v tvare:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ak na intervale $\langle -r, r \rangle$ necháme rotovať polkružnicu $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ okolo osi x, vznikne guľová plocha ohraničujúca guľu. Pre objem gule odvodíme:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \cdots = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \cdots = \frac{4}{3} \pi r^3$$



Obr. 10.14 a, b

Ďalšou významnou aplikáciou určitého integrálu v geometrii je výpočet **dĺžky d krivky**, ktorá je na intervale $\langle a, b \rangle$ bodovo totožná s grafom funkcie $y = f(x)$. Platí:

$$d = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

kde $f'(x)$ je derivácia funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$.

Príklad Odvoďte vzorec na výpočet obvodu kružnice s polomerom r.

Riešenie. Kružnica k so stredom $S[0,0]$ a polomerom r má rovnicu[41] $x^2 + y^2 = r^2$.

Polkružnica $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ predstavuje na intervale $\langle -r, r \rangle$ funkciu $y = f(x)$ (obr. 10.14a), ktorú použijeme. Postupne vypočítame:

$$y' = \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

[41] Stredová rovnica kružnice predstavuje krivku, ktorej graf nie je grafom funkcie.

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$d=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx.$$

Odvodený integrál z iracionálnej funkcie vypočítame substitúciou.[42] Platí:

$$\int\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx\ldots\left\|\begin{matrix}x=r.\sin t\\ dx=r.\cos t.dt\end{matrix}\right\|\ldots=\int\frac{r.\cos t.dt}{\sqrt{r^2-(r.\sin t)^2}}=\int\frac{r.\cos t.dt}{\sqrt{r^2-r^2.\sin^2 t}}=$$

$$=\int\frac{r.\cos t.dt}{r.\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\frac{\cos t.dt}{\cos t}=\int dt=t+c=arc\sin\frac{x}{r}+c.$$

Použijeme výsledok.

$$d=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\cdots=r.\left[arc\sin\frac{x}{r}\right]_{-r}^{r}=r.\left(arc\sin\frac{r}{r}-arc\sin\frac{-r}{r}\right)=$$

$$=r.(arc\sin(1)-arc\sin(-1))=r.\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi.r$$

Dĺžka oblúka polkružnice je $d=\pi.r$, obvod kružnice je $o=2\pi r$.

Posledná aplikácia určitého integrálu, ktorú uvedieme, je vzorec na výpočet **povrchu** P **rotačnej plochy**, ktorá vznikne rotáciou elementárneho útvaru určeného funkciou $y=f(x)$ a osou x na intervale $\langle a,b\rangle$. Platí:

$$P=2\pi\int_a^b f(x).\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Príklad Odvoďte vzorec na výpočet povrchu guľovej plochy s polomerom r.

Riešenie. Kružnica k so stredom $S[0,0]$ a polomerom r má rovnicu $x^2+y^2=r^2$.

Polkružnica $y=\sqrt{r^2-x^2}$ predstavuje na intervale $\langle -r,r\rangle$ funkciu $y=f(x)$ (obr. 10.14a). V predchádzajúcom príklade sme odvodili:

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Počítame:

$$P=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}.\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=2\pi r\int_{-r}^{r}1.dx=2\pi r[x]_{-r}^{r}=2\pi r(r-(-r))=4\pi r^2.$$

Povrch guľovej plochy s polomerom r sa vypočíta podľa vzorca $P=4\pi r^2$.

---

[42] Substitúcia je naznačená v tab. 9.1, posledný riadok. Ďalej platí, že $\frac{x}{r}=\sin t \Rightarrow arc\sin\frac{x}{r}=t$.

10.11 Cvičenie

1. Vypočítajte integrálny súčet pre funkciu $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$, ak:
   a) $y = 1 + x, \langle 1,10\rangle$ b) $y = 2^x, \langle 0,10\rangle$ c) $y = x^2, \langle -2,1\rangle$.
2. Vypočítajte:
   a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ b) $\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t^3}$ c) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$ d) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy$
   e) $\int_0^{-3} \frac{dt}{\sqrt{25+3t}}$ f) $\int_{-2}^{-3} \frac{du}{u^2-1}$ g) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2} dx$ h) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$
   i) $\int_0^1 \frac{z^2}{\sqrt{z^6+4}} dz$ j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx$ k) $\int_e^{e^2} \frac{dt}{t.\ln t}$ l) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$
3. Vypočítajte metódou substitúcie:
   a) $\int_1^3 \sqrt{1+x} dx$ b) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ c) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^x} \, dx$ d) $\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\sin t}$
4. Vypočítajte metódou per partes:
   a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x \, dx$ b) $\int_0^{\pi} e^x.\sin x \, dx$ c) $\int_0^1 x^2.e^{-x} \, dx$
5. Vypočítajte integrál s hornou (dolnou) hranicou:
   a) $\int_0^x e^{-t} dt$ b) $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ c) $\int_x^0 \sin t \, dt$
6. Vypočítajte nevlastné integrály:
   a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ b) $\int_0^{\infty} \sin^2 x . dx$ c) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1}$ d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx$
   e) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx$ f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x.\ln x} dx$ g) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ h) $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$
7. Vypočítajte obsah plochy určenej:
   a) osou x a grafom funkcie $y = \ln x$ a priamkou $x = e$,
   b) osou x a grafom funkcie $y = x(x-1)(x-2)$,
   c) grafmi funkcií $y = 2x - x^2$, $y = y = -x$,
   d) grafmi funkcií $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2x$,
   e) grafmi funkcií $y = \frac{x^2}{3}, y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.
8. Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie $y = f(x)$ na danom intervale $\langle a, b\rangle$:
   a) $y = 1 - x, \langle 0,10\rangle$ b) $y = \frac{1}{x}; \langle 1,2\rangle$ c) $y = -x^2; \langle -1,3\rangle$ d) $y = \sin\frac{x}{2}; \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$
9. Odvoďte vzorec na výpočet objemu rotačného kužeľa s výškou v, ktorého podstava má polomer r.
10. Vypočítajte dĺžku krivky ležiacej na grafe funkcie $y = f(x)$, ak:
    a) $y = x^3; x \in \langle -1,1\rangle$ b) $y = \sin x ; x \in \langle 0, \pi\rangle$
11. Vypočítajte povrch rotačnej plochy, ak elementárny útvar je určený:
    a) $U = \{[x, y], 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x + 1\}$,
    b) $U = \left\{[x, y], 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}\right\}$.

Zoznam použitej a odporúčanej literatúry

[1] Vidermannová, K. a kol. 2013. *Základy matematiky 1*, FPV UKF v Nitre

[2] Polák, J. 1991. *Přehled středoškolské matematiky*. SPN Praha

[3] Čermák, P., Červinková, P. 2004. *Zmaturuj z matematiky*. Didaktis, Bratislava

[4] Ivan, J. 1983. *Matematika 1.* Alfa, Bratislava

[5] Fulier, J., Vrábel, P. 1997. *Diferenciálny počet*, FPV UKF v Nitre, Nitra

[6] Fulier, J., Vrábel, P. 2015. *Integrálny počet.* FPV UKF v Nitre, Nitra

[7] Vallo, D. 2006. *Matematika pre chemikov – pracovné listy z vybraných kapitol*. FPV UKF v Nitre, Nitra

[8] Hlaváček, A. 1965. *Sbírka řešených příkladu z vyšší matematiky*. SPN, Praha

[9] Jirásek, F. a kol. 1982. *Sbírka řešených příkladů z matematiky I*, SNTL, Praha

[10] Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J. 1979. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 2*, Alfa SVTL, Bratislava

[11] Demidovič, B. P. a kol. 1978. *Zadači I upražnenia po matematičeskomu analyzu dľa vtuzov*. (rusky). Nauka, Moskva

[12] Larson, R. E., Edwards, B. H. 1991. *Finite Mathematics with Calculus*. D.C. heath and Company. Lexington. Massachusetts Toronto.

[13] Šalát, T. a kol. 1981. *Malá encyklopédia matematiky*. Obzor, Bratislava

[14] Kaenders, R., & Schmidt, R. 2011. *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen*. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden.

[15] www.geogebra.org [Dostupné online: 26. júna 2023]

Názov: **Matematická analýza pre učiteľov - rozširujúce štúdium**

Podnázov: Diferenciálny a integrálny počet

Autori: Dušan Vallo

Vydavateľ: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Edícia: Prírodovedec č. 820

Návrh obálky: Dušan Vallo

Formát: A4

Rok vydania: 2023

Miesto vydania: Nitra

Počet strán: 110

DOI: XXXXXXXXXXXXXXXXXX

ISBN 978-80-558-2042-2

9 788055 820422