UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE

Úvod do algebry

Valéria Švecová – Kitti Páleníková

2023

Úvod do algebry

Edícia Prírodovedec č. 814

Autori:

Doc. PhDr. PaedDr. Valéria Švecová, PhD.

RNDr. Kitti Páleníková, PhD.

Recenzenti:

doc. PaedDr. Dalibor Gonda, PhD.

doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.

Publikácie je podporená z projektu 001UKF-2-1/2022 Zvyšovanie kvality prípravy budúcich učiteľov matematiky, fyziky, chémie, informatiky, anglického jazyka, slovenského jazyka a techniky formou doplňujúceho pedagogického štúdia a rozširujúceho štúdia na UKF v Nitre.

ISBN 978-80-558-2036-1

Obsah

ÚVOD

Matematika má veľký vzdelávací a výchovný význam. Učí tvoriť presnými logickými úvahami platné závery. Preto je od najstarších čias podkladom vyučovania na všetkých typoch škôl. Abstraktnosť umožňuje matematike zachytiť veľké množstvo rozmanitých foriem reálnych javov a odkrývať príbuznosti medzi javmi zdanlivo vzdialenými.

Ako uvádza Kopka *„algebra vychádza zo zvláštneho javu nazývaného analógia – práca s písmenami je analógiou toho, čo sa deje s objektami*.“ Spočiatku sa zaoberala riešením rovníc- išlo teda o počítanie so znakmi. V tejto fáze bola algebra veľmi príbuzná jazyku. Túto línia neskôr prevzala matematická logika a špeciálne predikátová logika. Pod vplyvom teórie množín však algebra zmenila svoju náplň a do popredia sa dostalo štúdium štruktúr.

Predkladaná publikácia je určená pre študentov rozširujúceho štúdia pre budúcich učiteľov matematiky. Cieľom kurzu z matematiky v tomto študijnom programe je prehĺbiť stredoškolské poznatky z matematiky tak, aby študenti získali teoretické východiská pre rozvíjanie vedomostí z matematiky u žiakov nižšieho, ako aj vyššieho sekundárneho vzdelávania. Tento učebný text svojím obsahom pokrýva učivo z matematiky, ktoré sa vyučuje v prvom semestri uvedeného študijného programu. Cieľom výučby matematiky v prvom semestri je prehĺbenie a rozšírenie vedomostí z matematickej logiky a elementárnej teórie množín. Tieto vedomosti sú nevyhnutné pre štúdium matematických disciplín v ďalších semestroch.

Pri zostavovaní obsahu tejto publikácie sme zohľadňovali potreby študentov Učiteľstva akademických predmetov v kombinácií s matematikou a študentov rozširujúceho štúdia matematiky.

Obsah učebných textov je rozdelený do piatich kapitol. Prvá kapitola je venovaná základným pojmom výrokovej logiky. V druhej kapitole definujeme základné pojmy teórie množín. Tretia kapitola je venovaná karteziánskemu súčinu a binárnym reláciám. V štvrtej kapitole definujeme zobrazenie, a to ako špeciálny typ binárnej relácie. V piatej kapitole sa zaoberáme stavbou matematickej vety a uvádzame najpoužívanejšie dôkazy matematických viet, ktorými sú priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom, dôkaz matematickou indukciou a dôkaz preverením všetkých možností.

Každá kapitola obsahuje okrem základných pojmov a riešených príkladov aj cvičenia, ktoré môžu slúžiť k prehĺbeniu a pochopeniu teoretického učiva.

V zozname literatúry sme uviedli dostupnú literatúru, ktorá prípadným záujemcom umožní hlbšie preniknúť do študovanej problematiky.

Autorky touto cestou ďakujú recenzentom, za pozorné prečítanie textu a za pripomienky a podnety, ktoré pomohli odstrániť niektoré chyby a pomohli zlepšiť obsah a formu publikácie.

1 ZÁKLADNÉ POJMY VÝROKOVEJ LOGIKY

Výroková logika sa zaoberá štúdiom rôznych foriem myslenia i vyjadrovania a pravidlami správneho usudzovania. V tejto kapitole uvedieme základné pojmy výrokovej logiky a budeme ich ilustrovať na príkladoch. Poznatky z výrokovej logiky nám umožnia presne a logicky správne formulovať myšlienky. Základnými pojmami výrokovej logiky sú pojmy:

výrok,

výroková formula,

výroková forma.

1.1 Výrok

Výrokom rozumieme každú oznamovaciu vetu, pre ktorú nastane práve jedna z nasledujúcich dvoch možností – buď je pravdivá alebo nepravdivá. Príkladmi výrokov sú nasledujúce vety:

Súčet dvoch nepárnych čísel je párne číslo.

Martin Kukučín sa narodil 17. mája 1860 v Jasenovej.

Pre každé dve množiny *A*, *B* platí $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Pre ľubovoľné reálne čísla *a*, *b* platí $a \cdot b = b \cdot a$.

3 > 5

Praha je hlavné mesto Slovenskej republiky.

Prvé štyri výroky sú pravdivé, zatiaľ čo posledné dva výroky sú nepravdivé.

Výroky, ktorých pravdivostnú hodnotu nevieme určiť, nazývame hypotézy. Výrok „Na Marse existuje život.“ je hypotéza, pretože nevieme s istotou potvrdiť ani vyvrátiť toto tvrdenie.

Výroky sa označujú malými písmenami latinskej abecedy *p*, *q*, *r*, ...

Definícia: ***Negácia*** výroku je výrok opačnej pravdivostnej hodnoty ako pôvodný výrok. Negáciu výroku p označujeme p'. Výrok p' popiera to, čo tvrdí výrok p. Výroky p a p' majú vždy opačnú pravdivostnú hodnotu.

Príklad:

Vytvorte negáciu nasledujúcich výrokov.

Súčet vnútorných uhlov trojuholníka sa rovná 180°.

Štyri plus osem sa nerovná desiatim.

Riešenie:

Negujeme daný výrok: Nie je pravda, že súčet vnútorných uhlov trojuholníka sa rovná 180°. Skrátene zapisujeme negáciu výroku negovaním slovesa: Súčet vnútorných uhlov trojuholníka sa nerovná 180°.

Negujeme daný výrok: Nie je pravda, že štyri plus osem sa rovná desiatim.

Ak p, q sú výroky, tak pomocou logických spojok (tzv. operátorov výrokovej logiky) možno vytvoriť nové výroky, tzv. zložené výroky. Budeme používať nasledujúce logické spojky:

a) $\wedge$ - tzv. konjunkciu

b) $\vee$ - tzv. disjunkciu (alternatívu),

c) $\Rightarrow$ - tzv. implikáciu

d) $\Leftrightarrow$ - tzv. ekvivalenciu

Pomocou uvedených spojok dostávame tieto zložené výroky:

$p \wedge q$ - čítame „ *p* a *q*“ resp. „ *p* a zároveň *q*“,

b) $p \vee q$ - čítame „ *p* alebo *q*“,

c) $p \Rightarrow q$ - čítame „ *p* implikuje *q*“ resp. „z *p* vyplýva *q*“ resp. „ak platí *p*, potom platí aj *q*“,

d) $p \Leftrightarrow q$ - čítame „ *p* je ekvivalentné s *q*“ resp. „ *p* práve vtedy, keď *q*“ resp. „ *p* vtedy a len vtedy, keď *q*“,

Definícia: Zložený výrok „ *p* a zároveň *q*“, nazývame *konjunkcia* výrokov *p* a *q*. Zapisujeme ju formálne „ $p \wedge q$“.

Definícia: Zložený výrok „ *p* alebo *q*“ nazývame *disjunkcia* výrokov *p* alebo *q*. Zapisujeme ju formálne „ $p \vee q$“.

Poznámka: Logická spojka „alebo“ má v matematike odlišný význam ako v bežnej komunikácii. V bežnej reči má spojka „alebo“ vylučovací význam, t.j. platí práve jeden z výrokov, z ktorých je disjunkcia zložená. Napríklad, ak povieme „Príde Peter alebo Pavol.“, znamená to, že príde práve jeden z dvojice týchto chlapcov. V matematike sa spojka „alebo“ chápe v nevylučovacom význame, teda môžu platiť aj obidva výroky p, q, z ktorých je disjunkcia $p \vee q$ zložená. V niektorej literatúre sa medzi logickými spojkami uvádza aj spojka buď-alebo (t.j. spojka alebo vo vylučovacom význame). Zložený výrok „ p buď-alebo q“ nazývame ostrá disjunkcia výrokov p a q. Zapisujeme ju formálne „$p \veebar q$".

Definícia: Zložený výrok „ak p, potom q“ (alebo „ p implikuje q“) nazývame ***implikácia*** výrokov p a q. Zapisujeme ju formálne $p \Rightarrow q$. Výrok p nazývame predpokladom a výrok q záverom implikácie. Predpoklad p je postačujúca podmienka pre záver q. Záver q je nutná podmienka pre predpoklad p.

Definícia: Zložený výrok „ p vtedy a len vtedy, keď q“, alebo „ p práve vtedy, ak q (alebo „ p je nutnou a dostatočnou podmienkou q“) nazývame ***ekvivalencia*** výrokov p a q. Zapisujeme $p \Leftrightarrow q$. Môžeme ju zapísať ako konjunkciu dvoch implikácií:$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Príklad:

Dané sú výroky *p*: „Príde Eva.“ a *q*: „Príde Karol.“. Zapíšte pomocou matematickej symboliky nasledujúce výroky:

a) Z dvojice detí Eva a Karol príde aspoň jeden.

b) Z dvojice detí Eva a Karol príde najviac jeden.

c) Z dvojice detí Eva a Karol príde práve jeden.

d) Karol nepríde bez Evy.

e) Eva príde len vtedy, keď nepríde Karol.

f) Obidvaja neprídu.

g) Žiadny nepríde.

h) Aspoň jeden nepríde.

i) Ak príde Karol, príde aj Eva.

j) Eva príde, ale Karol nepríde.

k) Karol príde, keď Eva nepríde.

Riešenie:

a) $p \vee q$

b) $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q')$ resp. $(p \wedge q)'$

c) $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$

d) $p' \Rightarrow q'$

e) $p \Leftrightarrow q'$

f) $p' \wedge q'$

g) $p' \wedge q'$

h) $p' \vee q'$

i) $q \Rightarrow p$

j) $p \wedge q'$

k) $p' \Rightarrow q$

Každý výrok má pravdivostnú hodnotu. Pravdivostnú hodnotu pravdivého výroku budeme označovať 1 a pravdivostnú hodnotu nepravdivého výroku budeme označovať 0. Niekedy znakom 1 (resp. 0) označujeme ľubovoľný pravdivý (resp. nepravdivý) výrok. Pravdivostná hodnota zložených výrokov záleží od pravdivostných hodnôt výrokov, z ktorých sú zložené. Pravdivostná hodnota vyššie uvedených zložených výrokov je definovaná nasledovne:

Tabuľka 1. Pravdivostná hodnota zložených výrokov

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$	$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$	$\boldsymbol{p'}$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Z tabuľky 1 vyplýva, že

a) konjunkcia $p \wedge q$ výrokov *p*, *q* je pravdivá práve vtedy, keď sú pravdivé výroky *p*, *q*;

b) disjunkcia $p \vee q$ výrokov *p*, *q* je pravdivá práve vtedy, keď je pravdivý aspoň jeden z výrokov *p*, *q*; Ostrá disjunkcia výrokov p , q je pravdivá, ak je pravdivý práve jeden z výrokov p , q.

Poznámka: Ostrá disjunkcia výrokov p , q je pravdivá, ak je pravdivý práve jeden z výrokov p , q.

c) implikácia $p \Rightarrow q$ výrokov *p*, *q* je nepravdivá práve vtedy, keď výrok *p* je pravdivý a výrok *q* je nepravdivý;

d) ekvivalencia $p \Leftrightarrow q$ výrokov *p*, *q* je pravdivá práve vtedy, keď výroky *p*, *q* majú rovnakú pravdivostnú hodnotu;

e) výrok *p* je pravdivý práve vtedy, keď jeho negácia $p^{'}$ je nepravdivý výrok.

V tabuľke 1 symboly *p*, *q* nepredstavujú konkrétne výroky, ale za *p*, *q* môžeme zvoliť ľubovoľné výroky. Sú to tzv. výrokové premenné. Zápisy $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ a $p^{'}$ v tabuľke 1 sú príkladmi tzv. výrokových formúl.

1.2 Výroková formula

Výrokovou formulou nazývame zápis, ktorý obsahuje výrokové premenné, logické spojky a zátvorky, pričom po dosadení ľubovoľných výrokov za výrokové premenné dostaneme výrok. Výrok môže nadobúdať len jednu pravdivostnú hodnotu, výroková formula môže nadobúdať rôzne pravdivostné hodnoty. Zátvorky vo výrokových formulách majú dôležitú úlohu, pretože určujú – rovnako ako aj všade inde v matematike – poradie operácií. Používajú sa zátvorky okrúhle ( ), hranaté [ ], lomené ⟨ ⟩ , množinové { }.

Príklady výrokových formúl sú nasledujúce zápisy:

$(p^{'} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q^{'})$, $(p^{'})^{'}$, $p \wedge p^{'}$, $(p^{'} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q^{'} \Rightarrow p)$, $(p \vee q)^{'} \Leftrightarrow (p^{'} \wedge q^{'})$, $(p \wedge q)^{'} \Leftrightarrow (p^{'} \vee q^{'})$.

Pomocou tzv. *tabuľky pravdivostného ohodnotenia výrokovej formuly* možno zistiť, pre ktoré pravdivostné hodnoty výrokových premenných vznikne z výrokovej formuly pravdivý (resp. nepravdivý) výrok. Tento proces sa nazýva pravdivostné ohodnotenie výrokovej formuly.

Príklad

Určte pravdivostného ohodnotenia výrokových formúl:

a) $(p^{'} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q^{'})$,
b) $(p^{'})^{'} \Leftrightarrow p$

Riešenie:

$$(p^{'} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q^{'})$$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p^{'}}$	$\boldsymbol{q^{'}}$	$\boldsymbol{p^{'} \Rightarrow q}$	$\boldsymbol{p \Rightarrow q^{'}}$	$\boldsymbol{(p^{'} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q^{'})}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1

0	0	1	1	0	1	0

Z tabuľky vyplýva, že výroková formula $(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$ sa stane pravdivým výrokom, ak za dvojicu premenných (p, q) dosadíme výroky s pravdivostnými hodnotami (1, 0) alebo (0, 1).

$$(p')' \Leftrightarrow p$$

p	p'	$(p')'$	$(p')' \Leftrightarrow p$
1	0	1	1
0	1	0	1

Z tabuľky vyplýva, že výroková formula $(p')' \Leftrightarrow p$ je po dosadení ľubovoľných výrokov za premennú p vždy pravdivý výrok.

Výrokové formuly možno z hľadiska ich pravdivostného ohodnotenia rozdeliť do troch skupín:

a) tautológie

b) kontradikcie

c) splniteľné výrokové formuly.

Tautológiou nazývame takú výrokovú formulu, z ktorej po dosadení ľubovoľných výrokov za výrokové premenné vznikne vždy pravdivý výrok.

Kontradikciou nazývame takú výrokovú formulu, z ktorej po dosadení ľubovoľných výrokov za výrokové premenné dostaneme vždy nepravdivý výrok. Príkladmi kontradikcie sú výrokové formuly $p \wedge p'$, $(p \Rightarrow p') \wedge (p' \Rightarrow p)$, $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p' \vee q')$.

Splniteľná výroková formula je výroková formula, ktorá nie je ani tautológiou ani kontradikciou. Príkladmi splniteľných výrokových formúl sú výrokové formuly $(p' \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$ a $(p')'$.

Jednotlivé druhy výrokových formúl spoznáme z tabuľky ich pravdivostného ohodnotenia: u tautológie sú v poslednom stĺpci samé jednotky, u kontradikcie samé nuly a u splniteľnej výrokovej formuly sú v poslednom stĺpci tabuľky jej pravdivostného ohodnotenia aj nuly aj jednotky.

Najdôležitejšie tautológie výrokovej logiky

Komutatívny zákon konjunkcie a disjunkcie:

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$; $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

Asociatívny zákon konjunkcie, disjunkcie:

$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$; $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

Distributívny zákon

$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$; $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

De Morganove pravidla

$(p \wedge q)' \Leftrightarrow (p' \vee q')$ - negácia konjunkcie

$(p \vee q)' \Leftrightarrow (p' \wedge q')$ - negácia disjunkcie

Negácia implikácie a ekvivalencie

$(p \Rightarrow q)' \Leftrightarrow (p \wedge q')$ využíva sa pri dôkaze sporom

$(p \Leftrightarrow q)' \Leftrightarrow [(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)]$

Vyjadrenie implikácie a ekvivalencie pomocou negácie, konjunkcie a disjunkcie

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p' \vee q) \wedge (q' \vee p)]$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p' \vee q')]$

Zákon negácie negácie

$(p')' \Leftrightarrow p$

Zákon vylúčenia tretieho

$p \vee p'$

Zákon sporu

$(p \wedge p')'$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$ - využíva sa pri nepriamom dôkaze

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ - využíva sa pri priamom dôkaze

Príklad

Určte pravdivostné hodnoty nasledujúcich implikácií a utvorte ich negácie.

a) $3 \cdot 5 = 10 \Rightarrow 4 \cdot 5 = 20$

b) $3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow 4 \cdot 5 = 20$

c) $3 \cdot 5 = 10 \Rightarrow 4 \cdot 5 = 30$

d) $3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow 4 \cdot 5 = 30$

e) $3 \cdot 5 = 30 \Rightarrow 4 \cdot 5 \neq 20$

f) $5 > 8 \Rightarrow 5 > 3$

g) $5 > 8 \Rightarrow 5 > 7$

h) $5 < 8 \Rightarrow 5 < 7$

i) $5 < 8 \Rightarrow 5 > 3$.

Riešenie:

Využijeme tabuľku 1, podľa ktorej je implikácia $p \Rightarrow q$ výrokov *p*, *q* nepravdivá práve vtedy, keď výrok *p* je pravdivý a výrok *q* je nepravdivý. Pri určovaní negácie danej implikácie využijeme tautológiu $(p \Rightarrow q)' \Leftrightarrow (p \wedge q')$.

a) Ide o implikáciu typu $0 \Rightarrow 1$, ktorá je pravdivým výrokom. Jej negáciou je výrok $3 \cdot 5 = 10 \wedge 4 \cdot 5 \neq 20$. Všimnime si, že tento výrok je pravdivý.

b) Je to implikácia typu $1 \Rightarrow 1$, ktorá je pravdivým výrokom. Jej negáciou je výrok $3 \cdot 5 = 15 \wedge 4 \cdot 5 \neq 20$. Tento výrok je nepravdivý.

c) Tento výrok je implikáciou typu $0 \Rightarrow 0$, čo je pravdivý výrok. Jej negáciou je nepravdivý výrok $3 \cdot 5 = 10 \wedge 4 \cdot 5 \neq 30$.

d) Je to implikácia typu $1 \Rightarrow 0$, ktorá je nepravdivým výrokom. Jej negáciou je pravdivý výrok $3 \cdot 5 = 15 \wedge 4 \cdot 5 \neq 30$.

e) Je to implikácia typu $0 \Rightarrow 0$, čo je pravdivý výrok. Jej negáciou je výrok $3 \cdot 5 = 30 \wedge 4 \cdot 5 = 20$, ktorý je nepravdivým výrokom.

f) Ide o implikáciu typu $0 \Rightarrow 1$, ktorá je pravdivým výrokom. Jej negáciou je výrok $5 > 8 \wedge 5 \leq 3$. Tento výrok je nepravdivý.

g) Ide o implikáciu typu $0 \Rightarrow 0$, ktorá je pravdivým výrokom. Jej negáciou je výrok $5 > 8 \wedge 5 \leq 7$. Tento výrok je nepravdivý.

h) Uvedená implikácia je implikácia typu $1 \Rightarrow 1$, čo je pravdivý výrok. Jeho negácia je výrok $5 < 8 \wedge 5 \geq 7$, ktorý je nepravdivým výrokom.

i) Je to implikácia typu $1 \Rightarrow 1$, čo je pravdivý výrok. Jeho negáciou dostaneme nepravdivý výrok $5 < 8 \wedge 5 \leq 3$.

Príklad.

Utvorte negácie nasledujúcich výrokov:

a) Mám mladšieho brata a staršiu sestru.

b) Budem čítať alebo pôjdem do kina.

c) Ak prší, je mokro.

d) Karol má kružidlo, ale nemá pravítko.

e) V nedeľu pôjdeme buď do kina alebo do divadla.

f) Alebo pôjdem do cirkusu alebo nepôjdem von.

g) Ak bude mať auto poruchu, neprídeme včas.

h) Peter ide sem, alebo mu nefunguje telefón.

i) Kúpim svojmu dievčaťu kvety alebo ju pozvem na obed.

j) Lavína sa uvoľnila práve vtedy, keď vstúpil do lavínového poľa.

k) Keď zatelefonuješ včas, poviem ti to.

l) Jana prácu nedokončila a odišla domov.

Riešenie:

Pomocou de Morganových pravidiel a tautológií 5. dostávame nasledujúce negácie daných výrokov:

a) Nemám mladšieho brata alebo nemám staršiu sestru.

b) Nebudem čítať a nepôjdem do kina.

c) Prší a nie je mokro.

d) Karol nemá kružidlo alebo má pravítko.

e) V nedeľu nepôjdeme do kina ani do divadla.

f) Nepôjdem do cirkusu a pôjdem von.

g) Auto bude mať poruchu a prídeme včas.

h) Peter sem nejde a telefón mu funguje.

i) Nekúpim svojmu dievčaťu kvety, ani ju nepozvem na obed.

j) Lavína sa uvoľnila a nevstúpil do lavínového poľa alebo sa lavína neuvoľnila a vstúpil do lavínového poľa.

k) Zatelefonuješ včas a ja ti to nepoviem.

l) Jana prácu dokončila alebo neodišla domov.

Tabuľky pravdivostného ohodnotenia výrokovej formuly sa používajú aj pri výrokovej analýze slovného textu, čo budeme ilustrovať na nasledujúcom príklade.

Príklad

Rozhodnite, ktorí žiaci zo štvorice *A*, *B*, *C*, *D* pôjdu na výlet, keď sa majú dodržať tieto podmienky:

a) Pôjde aspoň jeden z dvojice *B*, *D*.

b) Pôjde najviac jeden z dvojice *A*, *C*.

c) Pôjde aspoň jeden z dvojice *A*, *D*.

d) Pôjde najviac jeden z dvojice *B*, *C*.

e) *B* nepôjde bez *A*.

f) *C* pôjde vtedy, keď pôjde *D*.

Riešenie:

Ak označíme symbolom *p* výrok „Pôjde *A*.“, symbolom *q* výrok „Pôjde *B*.“, symbolom *r* výrok „Pôjde *C*.“ a symbolom *s* výrok „Pôjde *D*.“, potom podmienky, ktoré sa majú dodržať, môžeme zapísať takto:

a) $q \vee s$

b) $(p \wedge r)'$

c) $p \vee s$

d) $(q \wedge r)'$

e) $p' \Rightarrow q'$

f) $r \Leftrightarrow s$

Keďže všetky podmienky musia byť dodržané súčasne, musí platiť

$(q \vee s) \wedge (p \wedge r)' \wedge (p \vee s) \wedge (q \wedge r)' \wedge (p' \Rightarrow q') \wedge (r \Leftrightarrow s).$

Označme túto výrokovú formulu písmenom *v*. Pomocou tabuľky pravdivostného ohodnotenia výrokovej formuly *v* zistíme, pre ktoré pravdivostné hodnoty výrokov *p*, *q*, *r*, *s* dostaneme z výrokovej formuly *v* pravdivý výrok.

Pravdivostné ohodnotenie výrokovej formuly v

p	q	r	s	$q \vee s$	$(p \wedge r)'$	$p \vee s$	$(q \wedge r)'$	$p' \Rightarrow q'$	$r \Leftrightarrow s$	v
1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0

Z tabuľky vyplýva, že z výrokovej formuly *v* sa stane pravdivý výrok v týchto dvoch prípadoch:

výroky p, q sú pravdivé a výroky r, s sú nepravdivé;

výroky r, s sú pravdivé a výroky p, q sú nepravdivé.

To znamená, že keď sa majú dodržať uvedené podmienky, na výlet zo štvorice žiakov *A*, *B*, *C*, *D* pôjdu žiaci *A* a *B* alebo žiaci *C* a *D*.

1.3 Výrokové formy

Uvažujme vetu *„Číslo x je deliteľné tromi.“* Táto veta nie je výrokom, lebo existujú čísla, pre ktoré je táto veta pravdivá, ale aj čísla, pre ktoré je nepravdivá. Ak položíme napr. $x = 6$, dostaneme vetu „6 je deliteľné tromi.“ Dostávame pravdivý výrok. Naproti tomu pre $x = 1$ dostaneme nepravdivý výrok. Ak za *x* dosadzujeme prirodzené čísla, dostávame výroky. Tým je motivovaná nasledujúca definícia.

Definícia: *Výroková forma* je každý zápis obsahujúci premenné, ktorý nie je výrokom, pričom po dosadení vhodných konštánt za premenné dostaneme výrok. Výrokové formy budeme označovať nasledujúcim spôsobom:

$A(x), B(x), \ldots$ - výrokové formy s jednou premennou *x*,

$A(x, y), B(x, y), \ldots$ - výrokové formy s dvoma premennými *x*, *y*,

$A(x_1, x_2, \ldots, x_n), B(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ - výrokové formy s *n* premennými $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Príklady výrokových foriem:

$A(x)$: číslo 3 delí číslo *x*, $B(x)\colon x + 1 = 0$, $C(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1$. Výrokové formy $A(x)$ a $B(x)$ sú výrokové formy s jednou premennou *x* a výroková forma $C(x, y)$ je výroková forma s dvoma premennými *x*, *y*. V ďalšom sa budeme väčšinou zaoberať iba výrokovými formami s jednou premennou. S každou výrokovou formou úzko súvisia určité množiny, ktoré budeme v ďalšom definovať.

Obor premennej výrokovej formy $A(x)$ je množina všetkých objektov, ktorých názvy chceme do výrokovej formy $A(x)$ za premennú *x* dosadzovať. Označujeme ho *U*.

Definičný obor výrokovej formy $A(x)$ je množina všetkých tých prvkov z jej oboru premennej, ktoré po dosadení do výrokovej formy $A(x)$ za premennú *x* vytvoria z výrokovej formy $A(x)$ výrok. Definičný obor výrokovej formy $A(x)$ budeme označovať D_A.

Obor pravdivosti výrokovej formy $A(x)$ je množina všetkých tých prvkov z jej definičného oboru, ktoré po dosadení do výrokovej formy $A(x)$ za premennú *x* vytvoria z výrokovej formy $A(x)$ pravdivý výrok. Obor pravdivosti výrokovej formy $A(x)$ budeme označovať *A*. Čiže $A = \{x \in U; A(x)\}$.

Z uvedených definícií vyplýva, že pre každú výrokovú formu $A(x)$ platí vzťah $A \subset D_A \subset U$.

Analogicky sa predchádzajúce obory definujú aj pre výrokové formy s viacerými premennými.

Príklad

Sú dané výrokové formy

$A(x): 5x + 5 = 10$,

$B(x): x + 1 = 0$,

$C(x): x^2 + x + 1 > 10$

$D(x): \frac{6}{x-1} = 2$

s oborom premennej $U = \{1,2,3,\ldots,10\}$.

Určme definičné obory a obory pravdivosti týchto výrokových foriem.

Riešenie:

Pre definičné obory platí :

$D_A = U$,

$D_B = U$,

$D_C = U$,

D_D: Menovateľ zlomku nesmie byť rovný nule, preto číslo 1 musíme z definičného oboru vyradiť a teda $D_D = \{2,3,4,\ldots,10\}$.

Riešením rovníc a nerovníc určíme obory pravdivosti. Obormi pravdivosti jednotlivých výrokových foriem sú množiny

$A = \{x \in U; 5x + 5 = 10\} = \{1\}$,

$B = \{x \in U; x + 1 = 0\} = \varphi$,

$C = \{x \in U; x^2 + x + 1 > 10\} = \{3,4,5,\ldots,10\}$,

$D = \{x \in U; \dfrac{6}{x-1} = 2\} = \{4\}$.

Príklad

Určme definičné obory a obory pravdivosti nasledujúcich výrokových foriem:

a) $A(x)$: x delí 2, $x \in N$,

b) $B(x): \frac{3}{x-1} = 3, x \in R$,

c) $C(x): \frac{2}{x} = 4, x \in R$.

Riešenie

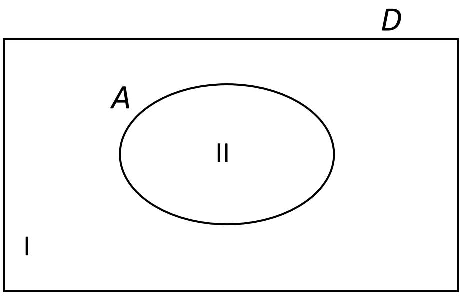
a) $D_A = N, A = \{x \in N;$ *x* delí 2 $\} = \{1; 2\}$,

b) $D_B = R - \{1\}, B = \{x \in R; \frac{3}{x-1} = 3\} = \{2\}$,

c) $D_C = R - \{0\}, C = \{x \in R; \frac{2}{x} = 4\} = \{0,5\}$.

Analogicky ako u výrokov môžeme pomocou logických spojok tvoriť z daných výrokových foriem nové (zložené) výrokové formy. V ďalšom nás bude zaujímať, aký je vzťah medzi oborom pravdivosti zloženej výrokovej formy a obormi pravdivosti výrokových foriem, z ktorých je zložená. Budeme pritom predpokladať, že uvažované výrokové formy majú rovnaký definičný obor, t.j. ak výrokové formy $A(x)$ a $B(x)$ majú definičný obor *D*, potom aj zložené výrokové formy $A'(x), A(x) \wedge B(x)$, $A(x) \vee B(x), A(x) \Rightarrow B(x), A(x) \Leftrightarrow B(x)$ majú definičný obor *D*.

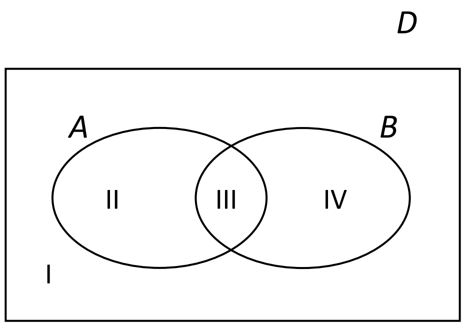
Najskôr nás bude zaujímať obor pravdivosti výrokovej formy $A'(x)$. Keďže predpokladáme, že definičným oborom výrokových foriem $A(x)$ a $A'(x)$ je množina *D*, pre obory pravdivosti výrokových foriem $A(x)$ a $A'(x)$ platí $A \subset D, A' \subset D$. Preto môžeme množinu *D* považovať za základnú množinu. Zostrojíme Vennov diagram množiny *A* a označíme elementárne polia.



Obr. 1.1. Vennov diagram

Budeme zisťovať, pre ktoré prvky $x \in D$ platí výroková forma $A'(x)$. Nech $x \in$ I. Potom pre *x* platí výroková forma $A'(x)$, lebo *x* nie je z oboru pravdivosti výrokovej formy $A(x)$. Preto ak $x \in$ I dosadíme do výrokovej formy $A'(x)$, dostaneme pravdivý výrok. Ak $x \in$ II, platí výroková forma $A(x)$ (lebo *x* je z jej oboru pravdivosti), a teda $A'(x)$ neplatí. Ak dosadíme $x \in$ II do výrokovej formy $A'(x)$, dostaneme nepravdivý výrok. Oborom pravdivosti výrokovej formy $A'(x)$ je množina prvkov elementárneho poľa I. Dostávame nasledujúci výsledok: $A' = \{x \in D; x \notin A\} = \{x \in D; A'(x)\}$.

Zistíme, aký je obor pravdivosti výrokovej formy $A(x) \wedge B(x)$. Podľa predpokladu je definičným oborom výrokových foriem $A(x)$ a $B(x)$ množina *D*, preto pre ich obory pravdivosti platí $A \subset D$, $B \subset D$. Množiny *A* a *B* znázorníme Vennovým diagramom (základnou množinou je množina *D*) a označíme jednotlivé elementárne polia.



Obr. 1.2 Vennov diagram

Budeme zisťovať, pre ktoré prvky $x \in D$ platí výroková forma $A(x) \wedge B(x)$. Nech $x \in$ I. Potom pre *x* neplatí výroková forma $A(x)$ (*x* nie je z oboru pravdivosti *A* výrokovej formy $A(x)$) ani výroková forma $B(x)$ (*x* nie je z oboru pravdivosti *B* výrokovej formy $B(x)$). Preto ak $x \in$ I dosadíme do výrokovej formy $A(x) \wedge B(x)$, dostaneme konjunkciu dvoch nepravdivých výrokov, teda nepravdivý výrok. Nech $x \in$ II. Potom pre *x* platí výroková forma $A(x)$ (*x* je z oboru pravdivosti *A* výrokovej formy $A(x)$) a neplatí výroková forma $B(x)$ (*x* nie je z oboru pravdivosti *B* výrokovej formy $B(x)$). Po dosadení prvku $x \in$ II do výrokovej formy $A(x) \wedge B(x)$ dostaneme výrok typu $1 \wedge 0$, ktorý je nepravdivým výrokom. Nech $x \in$ III. Potom pre *x* platí výroková forma $A(x)$ aj výroková forma $B(x)$, preto po dosadení prvku $x \in$ III do výrokovej formy $A(x) \wedge B(x)$ dostaneme výrok typu $1 \wedge 1$, ktorý je pravdivý. Nakoniec, nech $x \in$ IV. Potom pre *x* neplatí výroková forma $A(x)$ a platí výroková forma $B(x)$, teda ak *x* dosadíme do výrokovej formy $A(x) \wedge B(x)$ dostaneme výrok typu $0 \wedge 1$, ktorý je nepravdivým výrokom. Oborom pravdivosti výrokovej formy $A(x) \wedge B(x)$ je množina prvkov, pre ktoré platí výroková forma $A(x)$ a zároveň platí aj výroková forma $B(x)$. Je to množina prvkov elementárneho poľa III. Dostávame nasledujúci výsledok:

$$A \cap B = \{x \in D; x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in D; A(x) \wedge B(x)\}.$$

Uvažujme teraz výrokovú formu $A(x) \vee B(x)$. Z výrokovej formy $A(x) \vee B(x)$ dostaneme pravdivý výrok, ak do nej dosadíme prvok $x \in D$, pre ktorý platí aspoň jedna z výrokových foriem $A(x)$ a $B(x)$. Z Vennovho diagramu vidíme, že sú to prvky elementárnych polí II, III a IV. Preto oborom pravdivosti výrokovej formy $A(x) \vee B(x)$ je množina $A \cup B$. Môžeme písať

$$A \cup B = \{x \in D; x \in A \vee x \in B\} = \{x \in D; A(x) \vee B(x)\}.$$

Uvažujme výrokovú formu $A(x) \Rightarrow B(x)$. Zistíme, aký je jej obor pravdivosti. Ak využijeme tautológiu $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$ a predchádzajúce výsledky, dostávame

$$\{x \in D; A(x) \Rightarrow B(x)\} = \{x \in D; A'(x) \vee B(x)\} = A' \cup B.$$

Nakoniec zistíme, aký je obor pravdivosti výrokovej formy $A(x) \Leftrightarrow B(x)$. Na základe tautológií $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ a $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$ dostaneme, že obor pravdivosti výrokovej formy $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ sa rovná oboru pravdivosti výrokovej formy $(A'(x) \vee B(x)) \wedge (A(x) \vee B'(x))$. Dostávame nasledujúci výsledok:

$$\{x \in D; A(x) \Leftrightarrow B(x)\} = \left\{x \in D; \left(A'(x) \vee B(x)\right) \wedge \left(A(x) \vee B'(x)\right)\right\} =$$
$$= (A' \cup B) \cap (A \cup B').$$

Príklad

Dané sú výrokové formy $A(x): x^2 < 30$, $B(x): 2x > 5$, $C(x): x/12$ s oborom premennej $U = N$.

Nájdite ich obory pravdivosti a obory pravdivosti výrokových foriem $A'(x)$, $B'(x)$, $C'(x)$, $A(x) \wedge B(x)$, $A(x) \vee C(x)$, $B'(x) \wedge C'(x)$, $A(x) \Rightarrow C(x)$, $B(x) \Rightarrow C(x)$, $C(x) \Rightarrow A(x)$, $A(x) \Leftrightarrow C(x)$.

Riešenie:

Definičným oborom výrokových foriem $A(x), B(x)$ a $C(x)$ je množina *N*. Hľadané obory pravdivosti sú nasledujúce množiny:

$A = \{x \in N; A(x)\} = \{x \in N; x^2 < 30\} = \{1,2,3,4,5\}$,

$B = \{x \in N; B(x)\} = \{x \in N; 2x > 5\} = \{3,4,5,\dots\}$,

$C = \{x \in N; C(x)\} = \{x \in N; x\,/12\} = \{1,2,3,4,6,12\}$,

$A' = \{x \in N; A'(x)\} = \{x \in N; x^2 \geq 30\} = \{6,7,8,\dots\}$,

$B' = \{x \in N; B'(x)\} = \{x \in N; 2x \leq 5\} = \{1,2\}$,

$C' = \{x \in N; C'(x)\} = \{x \in N; x\ nedelí\ 12\} = N - \{1,2,3,4,6,12\}$,

$A \cap B = \{x \in N; A(x) \wedge B(x)\} = \{x \in N; x^2 < 30 \wedge 2x > 5\} = \{3,4,5\}$,

$A \cup C = \{x \in N; A(x) \vee C(x)\} = \{x \in N; x^2 < 30 \vee x/12\} = \{1,2,3,4,5,6,12\}$,

$B^{'} \cap C^{'} = \{x \in N; B^{'}(x) \wedge C^{'}(x)\} = \{x \in N; 2x \leq 5 \wedge x\ nedelí\ 12\}$=$\emptyset$,

$\{x \in N; A(x) \Rightarrow C(x)\} = \{x \in N; A^{'}(x) \vee C(x)\} = \{x \in N; x^2 \geq 30 \vee x/12\}$=$N - \{5\}$,

$\{x \in N; B(x) \Rightarrow C(x)\} = \{x \in N; B^{'}(x) \vee C(x)\} = \{x \in N; 2x \leq 5 \vee x/12\}$
= $\{1,2,3,4,6,12\}$,

$\{x \in N; C(x) \Rightarrow A(x)\} = \{x \in N; C^{'}(x) \vee A(x)\} = \{x \in N; x\ nedelí\ 12 \vee x^2 < 30\}$
$= N - \{6,12\}$,

$\{x \in N; A(x) \Leftrightarrow C(x)\} = \{x \in N; A(x) \Rightarrow C(x)\} \cap \{x \in N; C(x) \Rightarrow A(x)\}$ = $N - \{6,12\}$.

1.4 Kvantifikované výroky

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali výrokovými formami. Vieme, že samotné výrokové formy nemajú pravdivostnú hodnotu. Ak však dosadzujeme do výrokovej formy za premennú prvky jej definičného oboru, dostávame z výrokovej formy výrok. Pritom môžu nastať nasledujúce tri prípady:

a) Všetky výroky sú pravdivé.

b) Niektoré, ale nie všetky výroky sú pravdivé.

c) Všetky výroky sú nepravdivé.

Definícia: Výroky, v ktorých tvrdíme, že existuje objekt istých vlastností alebo že všetky objekty istej množiny majú istú vlastnosť, nazývame **kvantifikovanými výrokmi**. Pri zápise takýchto výrokov používame kvantifikátory.

Príklad

Daná je výroková forma $A(x): x^2 \geq 0$ s oborom premennej $U = R$. Potom aj jej definičný obor je množina *R*. Ak vo výrokovej forme $A(x)$ dosadíme za *x* ľubovoľné reálne číslo, dostaneme vždy pravdivý výrok, lebo druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporné číslo. Túto skutočnosť môžeme formulovať niekoľkými spôsobmi:

„Pre každé reálne číslo *x* platí $A(x)$." resp.

„Pre všetky reálne čísla *x* platí $A(x)$." resp.

„Pre ľubovoľné reálne číslo *x* platí $A(x)$."

Symbolicky to budeme zapisovať nasledujúcim spôsobom:

$$\forall x \in R: x^2 \geq 0.$$

Symbol $\forall$ nazývame ***všeobecný kvantifikátor*** a výrok $\forall x \in D: A(x)$ nazývame ***všeobecný výrok***.

Príklad

Uvažujme výrokovú formu $B(x): x^2 + 1 = (x + 1)^2$ s oborom premennej $U = R$. Jej definičným oborom je množina *R*. Rovnosť $x^2 + 1 = (x + 1)^2$ zrejme neplatí pre všetky reálne čísla *x*. Ak vo výrokovej forme $B(x)$ dosadíme za *x* napríklad číslo 1, dostaneme nepravdivý výrok. Ale existuje také reálne číslo, ktoré vytvorí z výrokovej formy $B(x)$ pravdivý výrok. Stačí položiť $x = 0$. Túto skutočnosť môžeme vyjadriť nasledovne:

„Existuje reálne číslo *x*, pre ktoré platí $B(x)$." resp.

„Existuje aspoň jedno reálne číslo *x*, pre ktoré platí $B(x)$."

Tento výrok budeme symbolicky zapisovať takto:

$$\exists x \in R: x^2 + 1 = (x + 1)^2.$$

Symbol $\exists$ nazývame ***existenčný kvantifikátor*** a výrok $\exists x \in D: A(x)$ nazývame ***existenčný výrok*.**

Všeobecné a existenčné výroky sú tzv. *kvantifikované výroky*. Z predchádzajúceho vyplýva, že každú výrokovú formu možno pomocou kvantifikátorov kvantifikovať. Keď stojí pred výrokovou formou kvantifikátor, vzniká z výrokovej formy výrok. To znamená, že z výrokovej formy $A(x)$ môžeme tvoriť výroky dvoma spôsobmi: dosadzovaním prvkov z jej definičného oboru za premennú *x* alebo kvantifikáciou premennej *x*. Predchádzajúce kvantifikované výroky obsahovali jednu premennú. V takomto prípade hovoríme o jednoduchých všeobecných resp. existenčných výrokoch. Existujú aj kvantifikované výroky s viacerými premennými. Ak chceme z výrokovej formy s viacerými premennými utvoriť výrok, musíme v nej ku každej premennej priradiť kvantifikátor. Uvažujme napríklad výrok „Rozdiel dvoch celých čísel je celé číslo." Tento výrok môžeme symbolicky zapísať takto: $\forall x \in Z, \forall y \in Z, \exists z \in Z: x - y = z$.

Príklad

Sformulujte nasledujúce výroky pomocou kvantifikátorov a zapíšte ich symbolicky:

a) Niektoré prirodzené čísla sú väčšie ako 10^{20}.

b) Je možné nájsť racionálne číslo medzi číslami $\frac{1}{98}$ a $\frac{1}{97}$.

c) Všetky reálne čísla majú nezáporné druhé mocniny.

d) Pre ľubovoľné reálne číslo *x* je $x^2 - 10x + 101 > 0$.

e) Žiadne racionálne číslo nemá druhú mocninu rovnú 10.

f) Nerovnici $x^2 - 20x + 120 < 0$ nevyhovuje žiadne reálne číslo.

g) Sústava rovníc $x + y = 1, \qquad 2x + y = 4$ má riešenie v množine *Z*.

Riešenie:

a) $\exists x \in N: x > 10^{20}$

b) $\exists x \in Q: \frac{1}{98} < x < \frac{1}{97}$

c) $\forall x \in R: x^2 \geq 0$

d) $\forall x \in R: x^2 - 10x + 101 > 0$

e) $\forall x \in Q: x^2 \neq 10$

f) $\forall x \in R: x^2 - 20x + 120 \geq 0$

g) $\exists x \in Z, \exists y \in Z: x + y = 1 \wedge 2x + y = 4$

Príklad

Rozhodnite o pravdivostnej hodnote nasledujúcich kvantifikovaných výrokov:

a) $\forall x \in N: 2x > 1$

b) $\exists x \in R: x^3 < 0$

c) $\exists x \in N: 3 + x = 2$.

Riešenie:

a) Výrok $\forall x \in N: 2x > 1$ je pravdivý, lebo dvojnásobok každého prirodzeného čísla je číslo väčšie ako 1.

b) Výrok $\exists x \in R: x^3 < 0$ je pravdivý, pretože napríklad pre $x = -1$ platí $(-1)^3 < 0$.

c) Výrok $\exists x \in N: 3 + x = 2$ je nepravdivý. Neexistuje také prirodzené číslo *x*, aby $3 + x = 2$.

Keďže kvantifikované výroky sú výroky, môžeme ich negovať. Uvažujme výrok $\forall x \in R: x^2 \geq 0$. Tento výrok je pravdivý, takže jeho negácia je nepravdivý výrok. Negáciou tohto výroku je výrok „Nie je pravda, že pre každé reálne číslo *x* platí $x^2 \geq 0$." alebo, čo je to isté, výrok „Nie pre každé reálne číslo *x* platí $x^2 \geq 0$." Ale taký istý význam ako predchádzajúce dva výroky má výrok „Existuje reálne číslo *x*, pre ktoré platí $x^2 < 0$." Tento výrok môžeme symbolicky zapísať nasledovne: $\exists x \in R: x^2 < 0$. Teda negáciou výroku $\forall x \in R: x^2 \geq 0$ je výrok $\exists x \in R: x^2 < 0$.

Nájdime teraz negáciu výroku $\exists x \in R: x^3 < 0$. Dostaneme výrok „Nie je pravda, že existuje reálne číslo *x*, pre ktoré platí$x^3 < 0$." alebo výrok „Neexistuje reálne číslo *x* také, že $x^3 < 0$." Ale to je to isté ako výrok „Pre každé reálne číslo *x* platí$x^3 \geq 0$." Symbolicky môžeme tento výrok zapísať takto: $\forall x \in R: x^3 \geq 0$. To znamená, že negácia výroku $\exists x \in R: x^3 < 0$ je výrok $\forall x \in R: x^3 \geq 0$.

Analogicky by sme zistili, že negáciou výroku $\exists x \in N: 3 + x = 2$ je výrok $\forall x \in N: 3 + x \neq 2$.

Z predchádzajúcich príkladov vidíme, že negáciu kvantifikovaného výroku dostaneme tak, že namiesto všeobecného (existenčného) kvantifikátora píšeme existenčný (všeobecný) kvantifikátor a namiesto výrokovej formy píšeme jej negáciu. Odvodili sme nasledujúce pravidlá pre negáciu kvantifikovaných výrokov:

$$(\forall x \in D: A(x))' \Leftrightarrow \exists x \in D: A'(x)$$

$$(\exists x \in D: A(x))' \Leftrightarrow \forall x \in D: A'(x).$$

Doteraz sme predpokladali, že množina *D*, ktorej prvky dosadzujeme do uvažovanej výrokovej formy, je neprázdna. Predpokladajme teraz, že *D* =φ a uvažujme výroky $\exists x \in D: A(x)$ a $\exists x \in D: A'(x)$. Tieto výroky sú nepravdivé, lebo neexistuje taký prvok, ktorý by patril prázdnej množine. Potom však ich negácie musia byť pravdivé výroky. Takže výroky $\forall x \in \emptyset : A(x)$ a $\forall x \in \emptyset: A'(x)$ sú pravdivé pre každú výrokovú formu $A(x)$.

Príklad

Rozhodnite o pravdivostnej hodnote nasledujúcich výrokov a utvorte ich negácie:

a) $\exists x \in N: x + 5 = 4$

b) $\exists x \in N: x^3 = 8$

c) $\forall x \in N: x^2 > 1$

d) $\exists x \in N: 5x = 8$

e) $\exists x \in N: 2x + 1 = 5 \wedge x < 3$

f) $\forall x \in N: x^2 = 4 \vee x > 1$

g) $\forall x \in R: x^2 + 1 > 0$

h) $\exists x \in Z: x^2 - 9 = 0$

i) $\forall x \in Z$: ak *x* je párne, potom aj $x + 2$ je párne.

j) $\exists x \in Z: x^2 + 5 = 0.$

Riešenie:

a) Daný výrok je nepravdivý. Jeho negácia je nasledujúci pravdivý výrok:

$\forall x \in N: x + 5 \neq 4.$

b) Tento výrok je pravdivý (stačí položiť $x = 2$). Jeho negácia je nepravdivý výrok $\forall x \in N: x^3 \neq 8.$

c) Je to nepravdivý výrok, jeho negácia je nasledujúci pravdivý výrok:

$\exists x \in N: x^2 \leq 1.$

d) Daný výrok je nepravdivý. Jeho negácia je pravdivý výrok $\forall x \in N: 5x \neq 8.$

e) Tento výrok je pravdivý (stačí položiť $x = 2$). Jeho negáciu dostaneme pomocou de Morganovho zákona. Je to nepravdivý výrok $\forall x \in N: 2x + 1 \neq 5 \vee x \geq 3.$

f) Je to nepravdivý výrok, pomocou de Morganovho zákona – tautológie 9. dostaneme jeho negáciu: $\exists x \in N: x^2 \neq 4 \wedge x \leq 1$. Tento výrok je pravdivý (stačí položiť $x = 1$).

g) Daný výrok je pravdivý. Jeho negácia je nepravdivý výrok $\exists x \in R: x^2 + 1 \leq 0.$

h) Tento výrok je pravdivý (stačí položiť $x = 3$). Jeho negácia je nepravdivý výrok $\forall x \in Z: x^2 - 9 \neq 0.$

i) Ide o pravdivý výrok, ktorého negáciu dostaneme pomocou tautológie: $\exists x \in Z$: *x* je párne a zároveň $x + 2$ je nepárne. Také celé číslo neexistuje, tento výrok je nepravdivý.

j) Také celé číslo neexistuje, daný výrok je nepravdivý. Jeho negácia je pravdivý výrok $\forall x \in Z: x^2 + 5 \neq 0.$

Na vyjadrenie vlastností viacerých objektov sa používajú aj slová: aspoň, práve, najviac, žiadny (***žiadny*** znamená 0 a nie viac; ***aspoň*** dva znamená 2 a viac; ***najviac*** tri znamená 0, 1, 2, 3 a nie viac, ***práve*** 2 znamená nie menej ako 2 a nie viac ako 2.). Negácie výrokov s údajom o počte uvádzame v tabuľke 2.:

Tabuľka 2: Negácie výrokov

Výrok	**Negácia**
„Každý ... je ...“	„Aspoň jeden ... nie je ....“
„Aspoň jeden ... je ....“	„Každý ... nie je ...“
„Aspoň *n*... je ...“ (n >1)	„Najviac (n - 1) ... je ...“
„Najviac *n* ... je ...“ ($n \geq 1$)	„Aspoň (n +1) .... je ...“
„Práve *n* ... je ...“	„Najviac (n -1) alebo aspoň (n + 1) ... je ...“

Príklad

Vytvorte negácie výrokov:

Aspoň dvaja návštevníci zostali do konca.

V skladbe bolo použitých ***najviac 5*** motívov.

Nikto zo spolužiakov neprišiel.

Požičal si ***práve dve*** knihy.

Riešenie:

Najviac jeden návštevník zostal do konca.

V skladbe bolo použitých ***aspoň 6*** motívov.

Aspoň jeden zo spolužiakov prišiel.

Požičal si ***najviac jednu*** knihu ***alebo aspoň tri****.*

Poznámka: U výrokových foriem používame tie isté logické spojky ako u výrokov. Výrokovými formami a operáciami s nimi sa zaoberá tzv. predikátová logika.

1.5 Cvičenia

1. Rozhodnite, či je dané tvrdenie výrok

Uhlopriečky kosoštvorca sú navzájom kolmé.	Pytagorova veta.
Narysuj ľubovoľný štvoruholník!	Potraviny.
Prší?	9x+3=0

Súčet vnútorných uhlov každého trojuholníka je menší ako 180°. Praha je hlavné mesto Slovenska.	Dobrý deň!

2. Vytvorte negáciu výrokov

Trojuholník je pravouhlý.	Janko hovorí slovensky.
Dnes mám dobrú náladu.	Eva má blond vlasy.
Dávid má doma chladničku.	Dnes prší.
Spojnica dvoch rôznych bodov je priamka.	3+7=9
Učím deti matematiku.	Pero píše namodro.

3. Dané sú výroky:

   $p: 2 \cdot 3 = 6$, q: Dnes je sobota. r: 10 je deliteľné 3 ($3|10$).

   Napíšte nasledujúce výroky a rozhodnite o ich pravdivosti:

   $p',\ q',\ r',\ p \wedge q,\ p \vee q,\ p \Rightarrow q, r \Leftrightarrow p,\ q' \Longrightarrow p',\ r \Longrightarrow (p \wedge q),\ q' \Longrightarrow (r \vee q)$

4. V dielni sú tri stroje A, B, C, ktoré pracujú podľa podmienok:

   ak pracuje stroj A, tak pracuje aj stroj B,

   pracuje stroj B alebo pracuje stroj C,

   keď nepracuje stroj A , tak nepracuje ani stroj C.

   Aké sú možnosti pre zabezpečenie chodu dielne?

5. Utvorte negáciu nasledujúcich výrokov:

   Trojuholník je pravouhlý a rovnoramenný.

   Janko hovorí slovensky alebo anglicky.

   Dnes mám dobrú náladu.

Eva má hnedé oči a blond vlasy.

Dávid má doma chladničku a bicykel.

Rožky sú dobré práve vtedy, keď sú čerstvé.

Ak ma dnes večer bude bolieť hlava, zajtra nepôjdem na tréning.

6. Sú nasledujúce výroky ekvivalentné?

   Dnes prší a zajtra bude svietiť slnko alebo pozajtra bude svietiť slnko.

   Dnes prší a zajtra bude svietiť slnko alebo dnes prší a pozajtra bude svietiť slnko.

7. Zistite, či sú nasledujúce výroky tautológie:
   a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
   b) $(p \wedge q')'$
   c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$
   d) [p∧(q∨r)]⇔[(p∧q)∨(q∧r)]

8. Určte definičný obor a obor pravdivosti výrokových foriem, ak obor premennej je $U = \{1,2,3,\ldots,10\}$:

   a) $A(x): x^2 = 10$ c) $C(x): \frac{x+3}{x-2} = 2$

   b) $B(x): x + 3 = 5$ d) $D(x): \sqrt{x-4} = 3$

9. Nech $U = \{1,2,3,\ldots,20\}$ a sú dané výrokové formy $A(x): x|12$, $B(x): x^2 + 1 < 20$. Určte obory pravdivosti nasledujúcich výrokových foriem:
   a) $A(x) \wedge B(x)$,
   b) $A'(x) \wedge B(x)$,
   c) $A(x) \Rightarrow B'(x)$,
   d) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$

10. Určte definičný obor a obor pravdivosti výrokových foriem, ak obor premennej je $U = N$:

    a) $A(x): x > 1$ c) $C(x): \frac{x}{x-3} > 5$

    $B(x): 1 < x^2 < 50$

11. Určte definičný obor a obor pravdivosti výrokových foriem, ak obor premennej je $U = R$:
    a) $A(x): \frac{13}{x^2-3x+2} \leq 0$
    b) $B(x): \sqrt{1-x} \,.\, \sqrt{x+1} = -1$
    c) $C(x): x^2 - 5x + 6 = 0$

12. Nech $U = \{1,2,,\ldots,10\}$. Rozhodnite o pravdivosti alebo nepravdivosti nasledujúcich výrokov a utvorte ich negácie:

    a) $\forall x \in U: x - 1 > 1$
    b) $\exists x \in U: x$je prvočíslo
    c) $\forall x \in U: (x^2 = 6) \vee (x > 1)$
    d) $\exists x \in U: (2x + 1 = 5) \wedge (x < 3)$

13. Zapíšte symbolicky nasledovné výroky, rozhodnite o ich pravdivosti a utvorte ich negácie:

    Existuje trojuholník, v ktorom sa súčet uhlov rovná 180°.

    Neexistuje trojuholník, v ktorom sa súčet uhlov rovná 180°.

    Neexistuje trojuholník, v ktorom súčet uhlov nie je 180°.

    Pre všetky trojuholníky sa súčet uhlov rovná 180°.

    Pre všetky trojuholníky neplatí, že sa súčet uhlov rovná 180°.

    Neexistuje trojuholník, v ktorom je súčet uhlov rôzny od 180°.

14. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich výrokov vyjadrujú charakteristiku rovnakého počasia:

    Každý deň pršalo.

    Najviac šesť dní pršalo.

    Práve sedem dní pršalo.

    Aspoň jeden deň nepršalo.

    Nie každý deň pršalo.

15. Sformulujte nasledujúce výroky pomocou kvantifikátorov a zapíšte ich symbolicky a znegujte:

    Každé prirodzené číslo n je väčšie nanajvýš rovné jednej.

    Existuje také kladné číslo x, ktoré je riešením rovnice $x + \frac{1}{x} = 2$.

    Pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí, že ak $n^2 + 2$ je deliteľné číslom 3, potom číslo n nie je deliteľné číslom 3.

    Niektoré celé čísla sú záporné.

    Je možné nájsť prirodzené číslo medzi číslami 3 a 4.

    Všetky reálne čísla majú nezáporné druhé mocniny.

    Pre ľubovoľné reálne číslo x je $x^2 - 5x + 6 < 0$.

    Žiadne racionálne číslo nemá tretiu mocninu rovnú 7.

    Nerovnici $x^2 - 20x + 120 > 0$ nevyhovuje žiadne reálne číslo.

    Sústava rovníc 4x + y = 2, 4x +3 y = 4 má riešenie v množine celých čísel.

16. Rozhodnite o pravdivostnej hodnote nasledujúcich výrokov a utvorte ich negácie a sformulujte výroky slovne:

    $\exists\, x \in N: x + 7 = 3$

    $\exists\, x \in N: x^3 = 27$

    $\forall\, x \in R: x^2 \geq 0$

    $\exists\, x \in Z: 5x = -4$

    $\exists\, x \in N: 3x + 4 = 22 \;\; \wedge \;\; x < 15$

    $\forall\, x \in N: x^2 = 81 \;\vee\; x > 5$

    $\forall\, x \in R: x^2 + 1 > 0$

    $\exists\, x \in Z: x^2 - 64 = 0$

    $\forall\, x \in Z: ak\ x\ je\ párne, potom\ \ x + 1\ je\ nepárne$

    $\exists\, x \in Z: x^2 + 17 = 0$

17. Utvorte negáciu výrokov:

    Všetky násobky čísla 8 sú párne čísla.

Niektoré násobky čísla 7 sú násobkami čísla 5.

Žiadne prvočíslo nie je párne číslo.

Dané priamky môžu mať najviac jeden spoločný bod.

Táto posádka kozmickej lode lietala aspoň 82 dní.

2 ZÁKLADNÉ POJMY TEÓRIE MNOŽÍN

Pojem množina je jedným z kľúčových pojmov súčasnej matematiky. Zakladateľ teórie množín George Cantor (1871) charakterizoval tento pojem takto: „Množinou sa rozumie každý súhrn dobre rozlíšiteľných predmetov našej mysle alebo intuície, ktorý chápeme ako celok.“ Uvedená formulácia však nemohla byť základom matematickej teórie množín. Je totiž natoľko všeobecná, že pripúšťa aj možnosť existencie takých množín, ako je množina všetkých množín. Dá sa však ukázať, že existencia takejto množiny by viedla k logickým sporom.

V súčasnej matematike sa teória množín, rovnako ako aj ďalšie matematické disciplíny, buduje pomocou axiomatickej metódy. Táto metóda vychádza z istých tvrdení (tzv. axióm), ktoré sa prehlásia za pravdivé a priori a z nich sa potom odvodzujú ďalšie poznatky pomocou prípustných logických prostriedkov. V axiómach sú sformulované určité vlastnosti základných pojmov. Základné pojmy pritom nedefinujeme. Základnými pojmami teórie množín sú pojmy množina a prvok množiny. Ako všetky základné pojmy v matematike, ani tieto pojmy nedefinujeme. Neexistujú totiž žiadne jednoduchšie pojmy, pomocou ktorých by sme mohli tieto pojmy popísať. Vzhľadom k tomu, že v ďalšom texte budeme používať terminológiu teórie množín, táto kapitola bude venovaná základom tejto teórie. Vznikla koncom 19. a začiatkom 20. storočia a predstavuje východisko a základ na budovanie pojmu čísla a operácií s číslami.

2.1 Množina a prvok množiny

V školskej matematike pri budovaní základných pojmov postupujeme nasledujúcim spôsobom.

1. Daný pojem ilustrujeme na príkladoch.

2. Poukážeme na najdôležitejšie vlastnosti daného pojmu.

Tento postup použijeme aj pri zavádzaní pojmu množina. Uvedieme najskôr niekoľko príkladov množín:

množina obyvateľov hlavného mesta SR,

množina študentov prvého ročníka na UKF v Nitre v roku 2023,

množina ľudí žijúcich na planéte Venuša,

- množina všetkých bodov v rovine,

- množina všetkých reálnych čísel.

Každá množina musí mať nasledujúcu vlastnosť: pre každý objekt nastane práve jedna z dvoch možností – buď do uvažovanej množiny patrí alebo nepatrí.

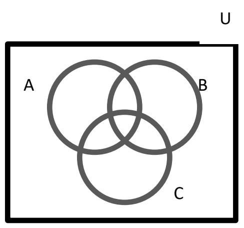
Množiny budeme označovať veľkými písmenami latinskej abecedy *A*, *B*, *C*,..., prípadne špeciálnymi symbolmi.

Objekty, ktoré patria do množiny, nazývame jej prvkami. Označujeme ich zvyčajne malými písmenami *a*, *b*, *c*,.... Pretože aj množiny môžu byť prvkami iných množín, v takýchto prípadoch ich zvykneme označovať aj veľkými písmenami. Skutočnosť, že objekt *a* je prvkom množiny *A*, zapisujeme $a \in A$. Ak objekt *a* nie je prvkom množiny *A*, píšeme $a \notin A$.

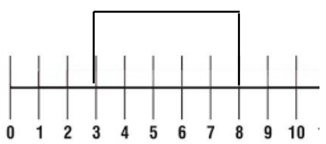
Množinu určíme presným vymedzením objektov, ktoré do nej patria. Množiny môžu byť určené:

a) vymenovaním prvkov alebo charakteristickou vlastnosťou. V prvom prípade sa vymenujú alebo zapíšu všetky prvky, ktoré do množiny patria. Napríklad, ak množina *A* obsahuje čísla 1,2,3,4, potom napíšeme $A = \{1,2,3,4\}$.
b) charakteristickou vlastnosťou, napr. množinu R^+ kladných reálnych čísel môžeme zapísať nasledujúcim spôsobom: $R^+ = \{x \in R; x > 0\}$. (Tento zápis čítame takto: $R^{\div}$ je množina všetkých reálnych čísel *x*, pre ktoré platí $x > 0$.) Množinu *B* prirodzených čísel menších ako 19 môžeme zapísať takto: $B = \{x \in N; x < 19\}$.
c) graficky, napr. Vennove diagramy, číselná os ...

Príklad Vennovho diagramu



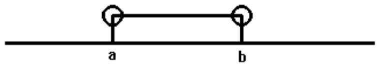
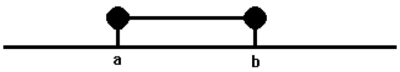
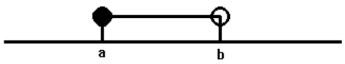
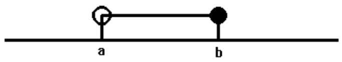
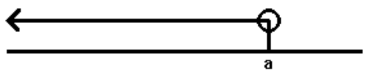
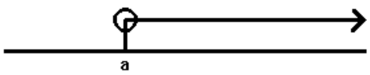
Číselná os

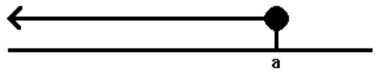
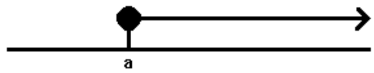


Na Vennovom diagrame obdĺžnik predstavuje množinu, ktorej prvkami sú všetky objekty, ktoré v danej situácii uvažujeme. Táto množina sa nazýva základná (univerzálna) množina a označuje sa písmenom *U*. Množiny sa vo Vennových diagramoch znázorňujú uzavretými čiarami (v našom prípade kružnicami). Tieto čiary rozdelia obdĺžnik na určité podmnožiny množiny *U*. Nazývame ich elementárne polia. Vo Vennovom diagrame pre jednu množinu sú dve elementárne polia, v diagrame pre dve množiny sú štyri elementárne polia a vo Vennovom diagrame pre tri množiny je osem elementárnych polí.

d) intervalom. Rozoznávame 8 druhov intervalov.

Nech $a, b \in R, a < b$. Čísla a, b nazývame koncovými bodmi intervalu. Lomenou zátvorkou v zápise intervalu vyjadríme, že koncový bod patrí do intervalu a na obrázku ho označíme plným krúžkom. Ak koncový bod nepatrí do intervalu, vyjadríme to okrúhlou zátvorkou v zápise intervalu a na obrázku ho označíme prázdnym krúžkom.

Ohraničené intervaly	***Grafické znázornenie*** na číselnej osi
otvorený: $(a;\ b)$ $(a; b) = \{x \in R: a < x < b\}$ Koncové body a, b nepatria do množiny danej intervalom.	
uzavretý: $\langle a;\ b \rangle$ $\langle a; b \rangle = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$ Koncové body a, b patria do množiny danej intervalom.	
polouzavretý zľava, (sprava otvorený, zľava uzavretý): $\langle a;\ b)$ $\langle a;b) = \{x \in R: a \leq x < b\}$ Koncový bod a patrí, koncový bod b nepatrí do množiny danej intervalom.	
polouzavretý sprava (sprava uzavretý, zľava otvorený: $(a;\ b\rangle$ $(a;b\rangle = \{x \in R: a < x \leq b\}$ Koncový bod a nepatrí, koncový bod b patrí do množiny danej intervalom.	
Neohraničené intervaly: ak je jeden koncový bod rovný ∞ alebo -∞. Pri koncovom bode ∞, resp. $-\infty$ je interval vždy otvorený.	
otvorený: $(-\infty;\ a)$ $(-\infty; a) = \{x \in R: x < a\}$ Koncový bod a nepatrí do množiny danej intervalom.	
otvorený: $(a;\ \infty)$ $(a; \infty) = \{x \in R: x > a\}$ Koncový bod a nepatrí do množiny danej intervalom.	

sprava uzavretý: $(-\infty;\quad a\rangle$ $(-\infty;a\rangle = \{x \in R: x \leq a\}$  Koncový bod a patrí do množiny danej intervalom.
zľava uzavretý: $\langle a;\ \infty)$ $\langle a;\infty) = \{x \in R: x \geq a\}$  Koncový bod a patrí do množiny danej intervalom.

Množina, ktorá má konečný počet prvkov, sa nazýva konečná množina. Počet prvkov konečnej množiny A označujeme $|A|$. Ak je počet prvkov množiny rovný prirodzenému číslu, nazývame toto číslo kardinálnym číslom množiny . Počet prvkov množiny sa označuje ja pojmom mohutnosť množiny.

Množina, ktorá má nekonečný počet prvkov, sa nazýva nekonečná množina. Mohutnosť množiny prirodzených čísel je definovaná ako $\aleph_0$ (alef 0).

Špeciálne postavenie medzi množinami má množina, ktorá neobsahuje žiadne prvky. Táto množina sa nazýva prázdna množina a označuje sa symbolom $\emptyset$.

Príklad

Nech $U = \{1,2,3,\ldots,15\}$, $A = \{x \in U; x^2 < 15\}$, $B = \{x \in U; x \text{je prvočíslo}\}$, $C = \{x \in U; x \text{je deliteľné tromi}\}$.

Riešenie:

Množiny *A*, *B*, *C* sú určené charakteristickou vlastnosťou. Môžeme ich určiť aj vymenovaním prvkov: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,5,7,11,13\}$, $C = \{3,6,9,12,15\}$.

Príklad

Vymenujte všetky prvky nasledujúcich množín

$A = \{x \in N;\ x \leq 5\}$, $\qquad B = \{x \in Z;\ -5 \leq\ x < 5\}$,

$C = \{x \in Q;\ 3x + 1 = x + 5\}$, $\qquad D =\ \{x \in N;\ \ x^2 < 17\}$,

$E = \{x \in Z;\ -2 <\ x \leq 2\}$, $\qquad F = \{x \in Q;\ 3x =\ 5\}$,

$G = \{x \in Z;\ 3x =\ 5\}$, $\qquad H = \{x \in N;\ 2\ /\ x \wedge x \leq 16\}$

Riešenie:

$A = \{x \in N;\ x \leq 5\} = \{1,2,3,4,5\}$,

$B = \{x \in Z;\ -5 \leq\ x < 5\} =\ \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$,

$C = \{x \in Q;\ 3x + 1 = x + 5\} = \{2\}$,

$D = \{x \in N;\ \ x^2 < 17\} = \{1,2,3,4\}$,

$E = \{x \in Z;\ -2 < \ x \leq 2\} = \ \{-1,0,1,2\}$,

$F = \{x \in Q;\ 3x = \ 5\} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$,

$G = \{x \in Z;\ 3x = \ 5\} = \ \emptyset$,

$H = \{x \in N;\ 2\ /\ x \wedge x \leq 16\} = \{2,4,8,10,12,14,16\}$

Príklad

Dané množiny zapíšte ako intervaly $A = \{x \in R;\ -1{,}5 < x \leq 6\}$,

$B = \{x \in R; |x| \leq 3\}, C = \{x \in R; 0{,}5 \leq x \leq 1{,}5\}$,

$D = \{x \in R; x < 4\}, E = \{x \in R; x > -2\}, F = \{x \in R; |x| \geq 2\}$,

$G = \{x \in R; x \leq 0\}$

Riešenie:

$A = \{x \in R;\ -1{,}5 < x \leq 6\} = (1{,}5; 6\rangle$

$B = \{x \in R; |x| \leq 3\} = \ \langle -3, 3\rangle$

$C = \{x \in R; 0{,}5 \leq x \leq 1{,}5\} = \ \langle 0{,}5; 1{,}5\rangle$,

$D = \{x \in R; x < 4\} = (-\infty{,}4)$,

$E = \{x \in R; x > -2\} = (-2{,}\infty)$,

$F = \{x \in R; |x| \geq 2\} = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2{,}\infty)$,

$G = \{x \in R; x \leq 0\} = (-\infty, 0\rangle$

2.2 Číselné obory

Číslo je základným pojmom matematiky. Pojem číslo sa v histórii neustále rozširoval. Prirodzené čísla (udávali počet predmetov a v rôznych formách existujú od nepamäti) sa zavádzaním operácií s nimi rozšírili na celé čísla, zavádzaním operácií s celými číslami sa rozšíril ich obor na racionálne čísla, potom reálne čísla a nakoniec okolo roku 1550 sa začalo počítať s komplexnými číslami, i keď ich presné zavedenie prislúcha Carlovi Friedrichovi Gaussovi (1777-1855).

Využívame nasledovné označenia:

$\mathbb{N}$	množina ***prirodzených*** čísel, $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{N}_\mathbf{0}$	množina prirodzených čísel zjednotená s 0, $\mathbb{N}_\mathbf{0} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}$	množina ***celých*** čísel, $\mathbb{Z} = \{\dots;\ -3;\ -2;\ -1; 0;\ 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	množina celých kladných čísel, $\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	množina celých záporných čísel $\mathbb{Z}^- = \{\dots; -3; -2; -1\}$
$\mathbb{Q}$	množina ***racionálnych*** čísel, množina všetkých čísel, ktoré sa sajú zapísať v tvare zlomku, ktorého čitateľ je celé číslo a menovateľ prirodzených čísel
$\mathbb{Q}^+$	množina kladných racionálnych čísel
$\mathbb{Q}^-$	množina záporných racionálnych čísel
$\mathbb{I}$	množina ***iracionálnych*** čísel – desatinné čísla s neukončeným desatinným rozvojom a zároveň neperiodické, napr. $\sqrt{2}, \pi, e$, ...
$\mathbb{R}$	množina ***reálnych*** čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálnych čísel
$\mathbb{R}^-$	množina záporných reálnych čísel
$\mathbb{C}$	množiny ***komplexných*** čísel, čísla v tvare $a + b.i$, kde a, b sú reálne čísla a i je imaginárna jednotka

2.3 Rovnosť množín a relácia inklúzie množín

Definícia: Budeme hovoriť, že množina *A* sa rovná množine *B* práve vtedy, ak množina *A* obsahuje tie isté prvky ako množina *B*. Zapisujeme *A* = *B*. Ak sa množiny *A* a *B* nerovnajú, hovoríme, že sú rôzne a píšeme $A \neq B$.

Napríklad, množiny $\{x \in N; x < 19\}$ a $\{1,2,3,\ldots,18\}$ sa rovnajú, lebo obsahujú tie isté prvky. Nezáleží na tom, akým spôsobom sú množiny zapísané, ani na tom, v akom poradí sú vymenované prvky množín. Množiny $A = \{1,2,3,4\}$ a $B = \{2,3,4,1\}$ sa rovnajú, lebo obsahujú tie isté prvky. Ak sú množiny určené charakteristickou vlastnosťou, niekedy nebýva celkom zrejmé, či sa rovnajú alebo nerovnajú. Uvažujme napríklad množiny $A = \emptyset$ a $B = \{x \in R; x^2 < 0\}$. Pretože neexistuje reálne číslo, ktorého druhá mocnina je záporné číslo, množina *B* neobsahuje žiadne prvky, teda je to prázdna množina. Platí *A* = *B*. Dá sa nahliadnuť, že aj množiny $Z^+ = \{x \in Z; x > 0\}$a $N = \{1,2,3,\ldots\}$ sa rovnajú. Naproti tomu množiny $A = \{x \in N; x + 1 = 0\}$ a $B = \{x \in Z; x + 1 = 0\}$ sú rôzne, lebo $A =$ a $B = \{-1\}$.

Definícia: Hovoríme, že množina *A* je podmnožinou množiny *B* práve vtedy, ak každý prvok množiny *A* je aj prvkom množiny *B*. Zapisujeme $A \subset B$.

Ak $A \subset B$, niekedy tiež hovoríme, že množina *B* je nadmnožinou množiny *A*. Dá sa dokázať, že prázdna množina je podmnožinou každej množiny. V prípade, že $A \subset B$ a zároveň $A \neq B$, množina *A* je tzv. pravá alebo vlastná podmnožina množiny *B*. Z predchádzajúceho vyplýva, že pre každé dve množiny *A*, *B* platí: *A* = *B* práve vtedy, keď $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.

Nech je daná $n - prvkov$á množina $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Existuje 2^n podmnožín množiny A. Každá množina má dve ***triviálne podmnožiny*** – samu seba a prázdnu množinu $\emptyset$.

Poznámka: Prázdna množina $\emptyset$ má jedinú podmnožinu, a to samu seba.

Príklad

Nájdite inklúzie a rovnosti medzi množinami:

$A = \{2, 5, 9\}$	$C = \{3, 5, 9\}$	$E = \{5, 9, 2\}$	$G = \{5\}$
$B = \{0, 3, 6, 7, 9\}$	$D = \{0, 6, 9\}$	$F = \{3, 6, 7, 9\}$	$H = \emptyset$

Riešenie:

Medzi danými množinami existuje iba jedna rovnosť: $A = E$.

Inklúzie:

$A \subset A$, $A \subset E$

$B \subset B$

$C \subset C$

$D \subset D$, $D \subset B$

$E \subset E$, $E \subset A$

$F \subset F$, $F \subset B$

$G \subset G$, $G \subset A$, $G \subset C$, $G \subset E$

$H \subset A$, $H \subset B$, $H \subset C$, $H \subset D$, $H \subset E$, $H \subset F$, $H \subset G$, $H \subset H$

Príklad

Určte množinu *X*, ktorá spĺňa súčasne nasledujúce podmienky:

a) $\{2,5\} \subset X, X \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, X \subset \{2,5,8,11\}$,

b) $\{3,8,13\} \subset X, \{1,2,3\} \subset X, X \subset \{1,2,3,5,6,7,8,12,13,14\}$,

c) $X \subset \{2,4,6,8,10\}, X \subset \{6,10,14,18\}, \{6\} \subset X$.

Riešenie:

a) Uvedeným podmienkam vyhovujú dve množiny, množina $X_1 = \{2,5\}$ a množina $X_2 = \{2,5,8\}$.

b) Uvedeným podmienkam vyhovuje množina $X = \{1,2,3,8,13\}$ a niekoľko ďalších množín, napr. množina $X' = \{1,2,3,5,8,13\}$.

c) Podmienkam tejto úlohy vyhovujú dve množiny, množina $X_1 = \{6\}$ a množina $X_2 = \{6,10\}$.

Príklad

Nech $A = \{a\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{a,b,c,\{a,c\}\}$, $D = \{\{a,c\}, \emptyset\}$, $E = \{a,c\}$. Rozhodnite, aké sú vzájomné vzťahy medzi uvedenými množinami.

Riešenie:

Keďže prvok *a*, ktorý je jediným prvkom množiny *A*, je prvkom množín *B*, *C* a *E*, platí *A* ⊂ *B*, *A* ⊂ *C* a *A* ⊂ *E*. Všetky prvky množiny *E* sú aj prvkami množín *B* a *C*, preto platí *E* ⊂ *B* a *E* ⊂ *C*. Zároveň vidíme, že množina *E* je prvkom množín *C* a *D*, teda môžeme písať $E \in C$ a $E \in D$.

Všimnime si, že prvkami množiny D z predchádzajúceho príkladu sú množiny. Takéto množiny, teda množiny, prvkami ktorých sú množiny, nazývame systémy množín. Množina D je systém množín. Aj množina $S = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \emptyset\}$ je systém množín. Jej prvkami sú všetky podmnožiny množiny $E = \{a, c\}$. Systém všetkých podmnožín množiny *A* sa nazýva potenčný systém množiny *A*. Označujeme ho symbolom $P(A)$.

Príklad

Nech $A = \emptyset$, $B = \{a, b, c\}$. Nájdite potenčné systémy daných množín.

Riešenie:

$P(A) = \{\emptyset\}$, $P(B) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$.

Poznámka: Je potrebné uvedomiť si, že $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, lebo množina $\emptyset$ je prázdna, a teda neobsahuje žiadne prvky a množina $\{\emptyset\}$ je jednoprvková množina. Jej prvkom je prázdna množina.

2.4 Riešenie slovných úloh pomocou množín

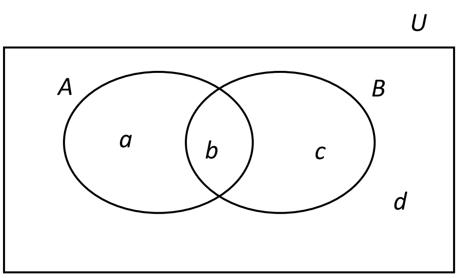
Slovné úlohy v tomto prípade riešime pomocou princípu *inklúzie a exklúzie.* V príkladoch sa zameriame na dve množiny, prípadne tri množiny s neprázdnym prienikom - množina A a množina B, ktoré sú podmnožinami základnej množiny U. Nech x je počet prvkov množiny A, nech y je počet prvkov množiny B a nech z je počet prvkov základnej množiny U. Ďalej, nech a je počet prvkov, ktoré patria iba do množiny A, nech b je počet prvkov, ktoré patria iba do množiny B a nech c je počet prvkov, ktoré patria súčasne do množín A aj B. Označme d počet prvkov, ktoré nepatria ani do množiny A, ani do množiny B. Pri riešení budeme využívať Vennove diagramy.

Príklad

Z 28 žiakov v triede má 18 žiakov zamestnanú matku, 21 žiakov sa stravuje v školskej jedálni a 23 žiakov má zamestnanú matku alebo sa stravuje v školskej jedálni. Treba zistiť, koľko žiakov, ktorých matka je zamestnaná, sa stravuje v školskej jedálni.

Riešenie:

Pri riešení úlohy pomôže grafické znázornenie situácie množinovým diagramom. Na Vennovom diagrame na obrázku *U* označuje množinu všetkých žiakov v triede, *A* označuje množinu všetkých žiakov v triede, ktorých matka je zamestnaná a *B* označuje množinu všetkých žiakov v triede, ktorí sa stravujú v školskej jedálni. Písmená *a*, *b*, *c*, *d* označujú počet prvkov príslušného elementárneho poľa.



Z podmienok úlohy vyplývajú nasledujúce rovnosti:

$$a + b + c + d = 28,$$

$$a + b = 18,$$

$$b + c = 21$$

$$a + b + c = 23.$$

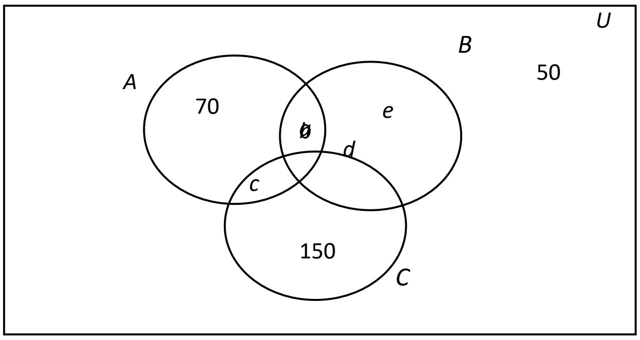
Vidíme, že je potrebné vyriešiť sústavu štyroch lineárnych rovníc o štyroch neznámych *a*, *b*, *c*, *d*. Použijeme dosadzovaciu metódu. Ak skombinujeme posledné dve rovnosti, dostávame, že a = 2. Z druhej rovnosti potom vyplýva, že b = 16. Po dosadení týchto hodnôt do tretej rovnosti dostávame, že c = 5. Z prvej rovnosti vypočítame, že d = 5. To znamená, že v školskej jedálni sa stravuje 16 žiakov, ktorých matka je zamestnaná.

Príklad

Zo 400 zamestnancov firmy používa k ceste do zamestnania 350 zamestnancov tieto dopravné prostriedky: autobus, vlak, električka. Iba električkou jazdí do zamestnania 150 zamestnancov, iba autobusom 70 zamestnancov. Autobus používa celkom 120 zamestnancov, vlak 100 zamestnancov a električku 275 zamestnancov. Aspoň dva z uvedených dopravných prostriedkov používa 130 zamestnancov. Električku aj vlak používa 95 zamestnancov. Treba zistiť, koľko zamestnancov používa práve dva z uvedených dopravných prostriedkov a koľko zamestnancov jazdí do zamestnania iba vlakom.

Riešenie:

Po prvom prečítaní zadania úlohy sa situácia zdá dosť neprehľadná. Pri riešení úlohy pomôže jej grafické znázornenie množinovým diagramom. Na Vennovom diagrame na obrázku 1.4 *U* označuje množinu všetkých zamestnancov firmy, *A* označuje množinu všetkých zamestnancov firmy používajúcich k ceste do zamestnania autobus, *B* označuje množinu všetkých zamestnancov firmy používajúcich vlak a *C* označuje množinu všetkých zamestnancov firmy používajúcich električku. Písmená *a*, *b*, *c*, *d*, *e* označujú počet prvkov príslušného elementárneho poľa. Do ďalších elementárnych polí sme zapísali počty ich prvkov, ktoré vyplývajú z podmienok úlohy.



Z podmienok úlohy vyplývajú nasledujúce rovnosti:

$$a + b + c + 70 = 120$$

$$a + b + d + e = 100$$

$$a + c + d + 150 = 275$$

$$a + d = 95$$

$$a + b + c + d = 130.$$

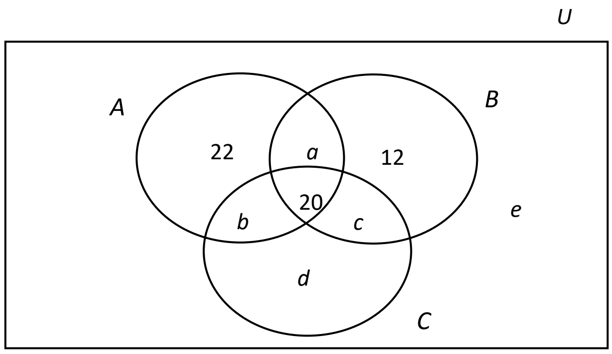
Je potrebné vypočítať, čomu sa rovná $b + c + d$ a e. Použijeme dosadzovaciu metódu. Ak skombinujeme prvú a poslednú rovnosť, dostávame, že d = 80. Z predposlednej rovnosti potom vyplýva, že a = 15. Dosadením vypočítaných hodnôt do tretej rovnosti dostávame, že c = 30. Z poslednej rovnosti vyplýva, že b = 5. Ak dosadíme vypočítané hodnoty do tretej rovnosti, dostávame, že e = 0. To znamená, že práve dva z uvedených dopravných prostriedkov používa $b + c + d = 115$ zamestnancov a iba vlakom nejazdí nik zo zamestnancov.

Príklad

Študenti sa mali podrobiť trom ťažkým skúškam za sebou. Zo 124 študentov zložilo iba prvú skúšku 22 študentov, prvú a druhú skúšku zložilo 28, druhú a tretiu 52, iba druhú skúšku 12, prvú alebo tretiu (t.j. aspoň jednu z nich) 96 študentov, všetky skúšky zložilo 20 študentov, 30 študentov nezložilo ani prvú ani druhú skúšku. Koľko študentov nezložilo ani jednu skúšku a koľko ich ešte bude robiť jednotlivé skúšky?

Riešenie:

Zavedieme nasledujúce označenie: U označuje množinu všetkých 124 študentov, A označuje množinu všetkých študentov, ktorí urobili prvú skúšku, B označuje množinu všetkých študentov, ktorí urobili druhú skúšku a C označuje množinu všetkých študentov, ktorí urobili tretiu skúšku. Zostrojíme Vennov diagram pre množiny *A*, *B* a *C* a písmenami *a*, *b*, *c*, *d*, *e* označíme počet prvkov príslušného elementárneho poľa. Do ďalších elementárnych polí zapíšeme počty ich prvkov, ktoré vyplývajú z podmienok úlohy.



Z podmienok úlohy dostávame nasledujúcu sústavu piatich rovníc o piatich neznámych:

$$22 + a + b + 20 + 12 + c + d + e = 124$$

$$a + 20 = 28$$

$$20 + c = 52$$

$$22 + a + b + 20 + c + d = 96$$

$$e + d = 30$$

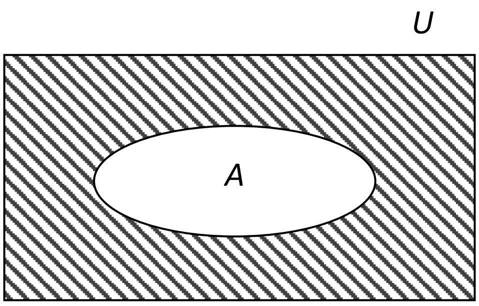
Vidíme, že *a* = 8, *c* = 32. Po dosadení týchto hodnôt dostávame, že $b + d + e = 30$ a $b + d = 14$, odkiaľ vyplýva, že $e = 16$. Z poslednej rovnosti potom dostávame, že *d* = 14, a teda *b* = 0. Takže ani jednu skúšku nezložilo $e = 16$ študentov. Prvú skúšku bude ešte robiť $12 + c + d + e = 74$ študentov, druhú bude ešte robiť $22 + b + e + d = 52$ študentov a tretiu skúšku bude ešte robiť $22 + a + 12 + e = 58$ študentov.

2.5 Množinové operácie

Základnými množinovými operáciami sú doplnok množiny, zjednotenie, prienik a rozdiel množín. Uvedieme ich definície a budeme ich ilustrovať na príkladoch.

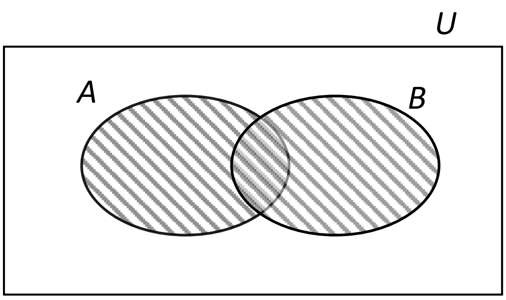
Nech základnou množinou je neprázdna množina *U* a nech množiny *A*, *B* sú jej ľubovoľné podmnožiny.

a) ***Doplnkom*** (resp. komplementom) množiny *A* (vzhľadom k množine *U*) nazývame množinu všetkých prvkov množiny *U*, ktoré nepatria do množiny *A*. Doplnok množiny *A* budeme označovať symbolom $\boldsymbol{A'}$.



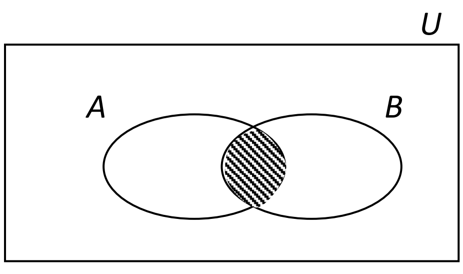
Obr. 2.1 $A' = \{x \in U; x \notin A\}$

b) ***Zjednotením*** množín A, B nazývame množinu všetkých prvkov množiny U, ktoré patria aspoň do jednej z množín A a B. Označujeme ju symbolom $A \cup B$.



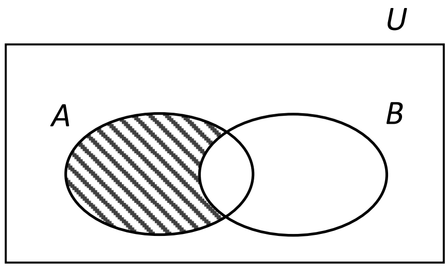
Obr. 2.2. $A \cup B = \{x \in U; x \in A$ alebo $x \in B\}$

c) ***Prienikom*** množín *A*, *B* nazývame množinu všetkých prvkov množiny *U*, ktoré patria do množiny *A* a zároveň do množiny *B*. Označujeme ju symbolom $A \cap B$.



Obr. 2.3. $A \cap B = \{x \in U; x \in A$ a zároveň $x \in B\}$

d) ***Rozdielom*** množín A, B nazývame množinu všetkých prvkov množiny U, ktoré patria do množiny A a zároveň nepatria do množiny B. Označujeme ju symbolom $A - B$. Z definície vyplýva, že $A - B = A \cap B'$.



Obr. 2.4. $A - B = \{x \in U; x \in A$ a zároveň $x \notin B\}$

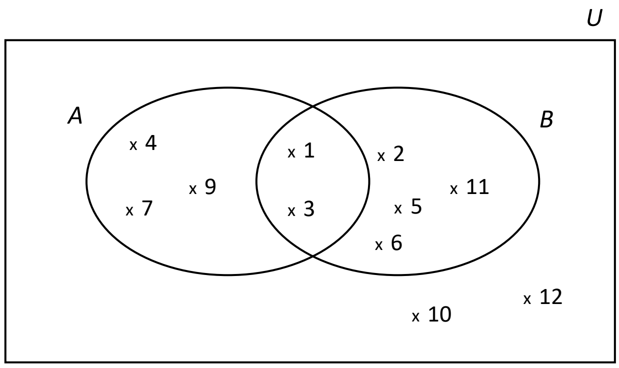
Príklad

Nech základnou množinou je množina $U = \{1,2,3,\ldots,12\}$. Vennovým diagramom znázornite jej podmnožiny $A = \{1,3,4,7,9\}$, $B = \{1,2,3,5,6,11\}$. Zapíšte vymenovaním prvkov množiny

$A^{\prime}, B^{\prime}, A \cup B, A \cap B, A - B, A^{\prime} \cup B, A^{\prime} \cap B^{\prime}$.

Riešenie:

Množiny *A*, *B* sú znázornené Vennovým diagramom pre dve množiny na nasledujúcom obrázku.



$A' = \{2,5,6,10,11,12\}$, $B' = [4,7,9,10,12]$,

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,9,11\}$, $A \cap B = \{1,3\}$, $A - B = \{4,7,9\}$,

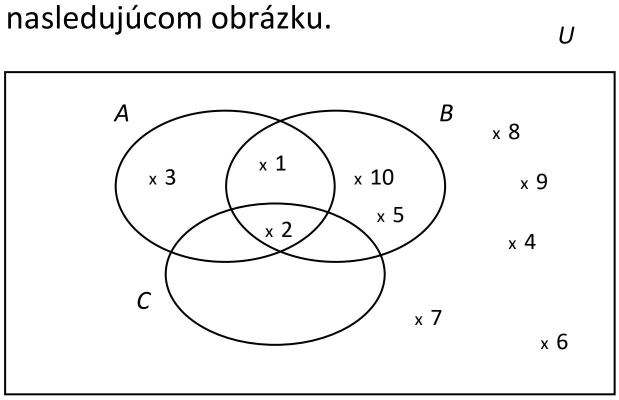
$A' \cup B = \{1,2,3,5,6,10,11,12\}$, $A' \cap B' = \{10,12\}$.

Príklad

Nech $U = \{1,2,3,\ldots,10\}$, $A = \{x \in U; x < 4\}$, $B = \{x \in U; x$ je deliteľom čísla 10$\}$, $C = \{x \in U; x^2 + 1 = 5\}$. Množiny *A*, *B*, *C* sú určené charakteristickou vlastnosťou. Zapíšte ich vymenovaním prvkov a znázornite Vennovým diagramom. Určte oboma spôsobmi množiny $A^{\prime}, B^{\prime}, C^{\prime}, A \cup B, A \cap B, A \cap C, A - B, A^{\prime} \cup B, A^{\prime} \cap B^{\prime}, A - C$.

Riešenie:

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,5,10\}$, $C = \{2\}$. Množiny A, B, C sú znázornené Vennovým diagramom na nasledujúcom obrázku.



$A' = \{x \in U; x \notin A\} = \{x \in U; x \geq 4\} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$,

$B' = \{x \in U; x \notin B\} = \{x \in U; x$ nedelí 10$\}= \{3,4,6,7,8,9\}$,

$C' = \{x \in U; x \notin C\} = \{x \in U; x^2 + 1 \neq 5\} = \{1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

$A \cup B = \{x \in U; x < 4$ alebo x je deliteľom 10$\}= \{1,2,3,5,10\}$,

$A \cap B = \{x \in U; x < 4$ a zároveň x je deliteľom 10$\}= \{1,2\}$,

$A \cap C = \{x \in U; x < 4$ a zároveň $x^2 + 1 = 5\} = \{2\}$,

$A - B = \{x \in U; x < 4$ a zároveň x nedelí 10$\}= \{3\}$,

$A' \cup B = \{x \in U; x \geq 4$ alebo x je deliteľom 10$\}= \{1,2,4,5,6,7,8,9,10\}$,

$A' \cap B' = \{x \in U; x \geq 4$a zároveň x nedelí 10$\}= \{4,6,7,8,9\}$,

$A - C$ =$\{x \in U; x < 4$ a zároveň $x^2 + 1 \neq 5\} = \{1,3\}$.

Vlastnosti množinových operácií.

1. Pre každú podmnožinu A základnej množiny U platí:

$A \cup U = U \qquad A \cap U = A$

$A \cup \emptyset = A \qquad A \cup A = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cap A = A$

$A \cup A' = U \qquad A \cap A' = \emptyset$

2. Pre každé dve množiny A, B platí:

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$

3. Pre každé tri množiny A, B, C platí:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Ak $A \neq B$, potom $A - B \neq B - A$.
5. Ak $A \subset B$, potom $A - B = \emptyset$

Pre každé dve disjunktné množiny A, B platí:

$A - B = A \qquad\qquad B - A = B.$

Poznámka. Množiny A, B sa nazývajú disjunktné, ak nemajú spoločné prvky, t.j. ak $A \cap B = \emptyset$.

Príklad

Dokážte, že pre každé dve množiny $A, B \subset U$ platí $A \cup B = B \cup A$.

Riešenie:

$\forall x \in U: x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow (x \in B \vee x \in A) \Leftrightarrow x \in B \cup A$,

odkiaľ vyplýva, že $A \cup B = B \cup A$. Využili sme definíciu zjednotenia množín a komutatívny zákon z výrokovej logiky.

Príklad

Pomocou vlastností množinových operácií dokážte, že pre každé dve množiny *A*, *B* platí $(A \cup B) \cap B' = A \cap B'$.

Riešenie:

Ak využijeme rovnosť $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (tzv. distributívny zákon), ktorá vyplýva z vlastností v bodoch 2. a 3., tak podľa vlastností množinových operácií v bode 1. dostávame

$(A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = (A \cap B') \cup \emptyset = A \cap B'$.

V nasledujúcom príklade uvedieme metódu overenia rovnosti množín, ktorá je prístupná pre žiakov základnej školy.

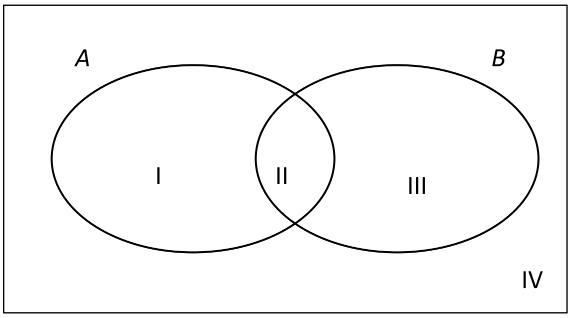
Príklad

Overte, že pre ľubovoľné množiny $A, B \subset U$ platí:

a) $(A \cup B) \cap B' = A \cap B'$, b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Riešenie:

a) Množiny *A*, *B* znázorníme Vennovým diagramom a očíslujeme elementárne polia.



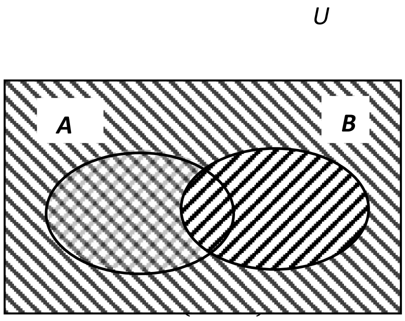
Do tabuľky budeme písať jednotky a nuly nasledujúcim spôsobom: ak pre prvok *x* uvažovaného elementárneho poľa platí zápis v prvom riadku, potom do príslušného políčka zapíšeme 1, v opačnom prípade zapíšeme 0.

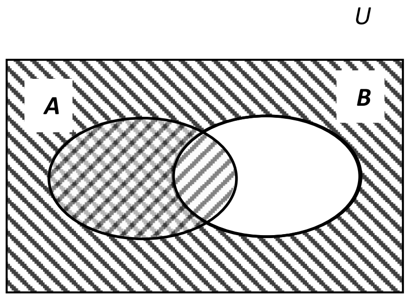
Tabuľka: Overenie rovnosti množín $(A \cup B) \cap B'$ a $A \cap B'$

Pole	$\boldsymbol{x \in A}$	$\boldsymbol{x \in B}$	$\boldsymbol{x \in (A \cup B)}$	$\boldsymbol{x \in B'}$	$\boldsymbol{x \in (A \cup B) \cap B'}$	$\boldsymbol{x \in A \cap B'}$
I	1	0	1	1	**1**	**1**
II	1	1	1	0	0	0
III	0	1	1	0	0	0
IV	0	0	0	1	0	0

Z tabuľky vyplýva, že množinu $(A \cup B) \cap B'$ tvoria prvky elementárneho poľa I a rovnako aj množinu $A \cap B'$. tvoria prvky elementárneho poľa I. To znamená, že $(A \cup B) \cap B' = A \cap B'$

Rovnosť množín možno overiť aj graficky. Zostrojíme Vennov diagram pre dve množiny *A*, *B* (obrázok 2.11). Množinu $(A \cup B) \cap B'$ dostaneme nasledovne: vyšrafujeme množinu $A \cup B$ a množinu B'. Množina $(A \cup B) \cap B'$ je potom tá časť množiny *U*, ktorá je vyšrafovaná dvakrát. Ďalej na Vennovom diagrame pre dve množiny *A*, *B* (obrázok 2.12) vyšrafujeme množinu *A* a množinu B'. Množina $A \cap B'$ je tá časť množiny *U*, ktorá je vyšrafovaná dvakrát. Vidíme, že sme dostali tie isté množiny.





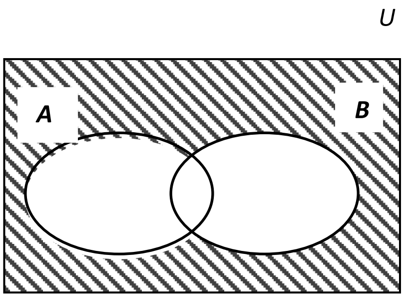
b) Analogicky ako v predchádzajúcom prípade zostavíme tabuľku.

Tabuľka Overenie rovnosti množín $(A \cup B)'$ a $A' \cap B'$

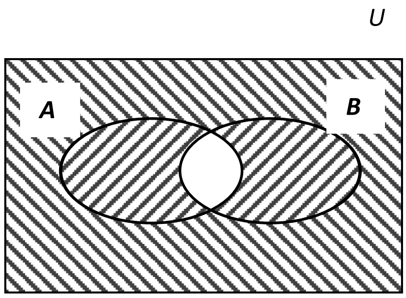
Pole	$\boldsymbol{x \in A}$	$\boldsymbol{x \in B}$	$\boldsymbol{x \in (A \cup B)'}$	$\boldsymbol{x \in A'}$	$\boldsymbol{x \in B'}$	$\boldsymbol{x \in A' \cap B'}$
I	1	0	0	0	1	0
II	1	1	0	0	0	0
III	0	1	0	1	0	0
IV	0	0	**1**	1	1	**1**

Z tabuľky vyplýva, že množinu $(A \cup B)'$ tvoria prvky elementárneho poľa IV a rovnako aj množinu $A' \cap B'$ tvoria prvky elementárneho poľa IV. To znamená, že $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Rovnosť množín $(A \cup B)' a\ A' \cap B'$ overíme aj graficky:



Obr. 1.15. $(A \cup B)'$



Obr. 1.16. $A' \cap B'$

2.6 Cvičenia

1. Určte množiny vymenovaním prvkov

a) $A = \{x \in N;\ x^2 < 20\}$

b) $B = \{x \in R;\ 2x - 13 = x + 5 - (18 - x)\}$

c) $C = \{x \in N;\ 10 < x^3 < 20\}$

2. Sú dané množiny $U = \{x \in N;\ x < 9\}$, $A = \{x \in U;\ 2|x\}$,

   $B = \{x \in U;\ |x - 3| < 2\}$, $C = \{x \in U;\ x^2 - 10x + 21 > 0\}$.

   Určte tieto množiny vymenovaním prvkov.

3. Určte nasledujúce množiny charakteristickou vlastnosťou:

a) $A = \{3,10,17,24,31,38, \dots\}$
b) $B = \{2,12,72,432, \dots\}$
c) $C = \{1,2,3,4,5\}$
d) Množinu D všetkých celých čísel, ktoré sú väčšie ako –2 a menšie než 3.
e) Množinu E všetkých prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné číslom 3 a zároveň sú menšie než 13.
f) Množinu F všetkých kladných párnych celých čísel, ktoré sú menšie ako 10.
g) $G = (-\infty; 5\rangle$
h) $H = (-2; 7\rangle$
i) K = $(-\infty,-1\rangle \cup (3, +\infty)$,
j) J = {–2, –1, 0, 1, 2}.

4. Patria prvky 0,2; 5,7; $\frac{1}{7}$ do uvedených množín?

   $S = \{x \in R;\ x^2 - 12x + 35 = 0\}$

   $T = \{x \in R;\ 7x - 1 = 0\}$

   $U = \{x \in R;\ x^2 - 0{,}2x = 0\}$

5. Pomocou intervalov zapíšte množinu:

   a) $A = \{x \in R;\ x \le 2\}$,

   b) $B = \{x \in R;\ 3x \ge 8 \wedge 5x < 29\}$,

   c) $C = \{x \in R;\ |x - 2| < 3\}$,

   d) $D = \{x \in R;\ |x - 1| \ge 4\}$.

6. Sú nasledujúce tvrdenia pravdivé?

   a) {1, 2} = (1, 2), b) C ∈ {a, b, c, ...z},
   c) ∅ je prázdna množina, d) 0 je prázdna množina,
   e) 95 ∈ {5, 10, 15, ...}, f) 2 ∈ {2, 4, 6},

g) 2 ⊂ {2, 4, 6}, h) {2} ∈ {2, 4, 6},
i) {2} ⊂ {2, 4, 6}, j) x ∈ {x},
k) {x} ⊆ {x}, l) {x} ∈ {x},
m) {x} ∈ {{x}}, n) ∅ ⊆ {x},
o) ∅ ∈ {x}, p) {∅} je prázdna množina.

7. Je daná množina $A = \{1,2,3\}$. Určte všetky podmnožiny X množiny $B = \{1,2,3,4,5\}$, pre ktoré platí:
   a) $A \cap X = \{1,3\}$
   b) $A \cap X = \emptyset$
   c) $A \cup X = \{1,2,3,4\}$
   d) $A \cup X = \{1,3\}$

8. Určte všetky podmnožiny X množiny $A = \{a, b, c, d, e\}$, pre ktoré platí:
   a) $\{a, b, c, d\} \cap X = \{a, d, e\}$
   b) $\{b, c, d\} \cap X = \emptyset$
   c) $\{a, e\} \cup X = \{a, b, e\}$
   d) $\{a, b, c\} \cup X = \{a, b, c\}$
   e) $\emptyset \cup X = \{b, d\}$
   f) $\emptyset \cap X = \{b, c\}$

9. Daná je množina $A = \{1,2,3,4\}$. Určte potenčný systém množiny A.

10. Koľko prvkov obsahuje potenčná systém množiny {1, 2, 3, 4, 5}?

11. Zistite, ktoré dvojice množín sa rovnajú:

    a) A = {a, b, c}, B = {a, c, b},

    b) E = {x ∈ R : 0 < x ≤ 2}, F = {1, 2},

    c) G = {x ∈ N : 0 < x ≤ 2}, H = {1, 2}.

12. Zistite, ktoré z nasledujúcich množín sa rovnajú:

    $A = \{x \in R;\ x \leq 0\}$, $B = \{x \in R;\ logx < 0\}$,

    $C = \{x \in R;\ x^2 < x\}$, $D = \{x \in R;\ |x| < -x\}$,

$E = \{x \in R;\ x > 1\}$, $F = \{x \in R;\ |x| < x\}$,

$G = \left\{x \in R;\ \sqrt{x^2} = 1\right\}$, $H = \{x \in R;\ x < 0\}$.

13. Z 50 študentov riešilo aspoň jednu z dvoch olympiád 44. MO neriešilo 19 a 39 riešilo práve jednu olympiádu. Koľko študentov riešilo len MO, len FO, obe?

14. Z 34 žiakov triedy nechodí autobusom ani pešo 12. Autobusom chodí 16 žiakov a pešo chodí 15. Koľko žiakov chodí do školy autobusom aj pešo?

15. Na štvrťročnej písomnej práci z matematiky boli zadané tri príklady. Tretí príklad vypočítalo 21 žiakov. Druhý príklad vyriešilo 23 žiakov a rovnaký počet žiakov vyriešilo prvý príklad. Dvaja žiaci z triedy nevypočítali žiaden príklad, všetky tri príklady vypočítalo 7 žiakov. Prvý a druhý príklad vyriešilo 15 žiakov, prvý a tretí príklad 12 žiakov. Druhý alebo tretí príklad vyriešilo 31 žiakov.

    a) Koľko žiakov vyriešilo druhý aj tretí príklad?

    b) Koľko žiakov vyriešilo prvý alebo druhý príklad?

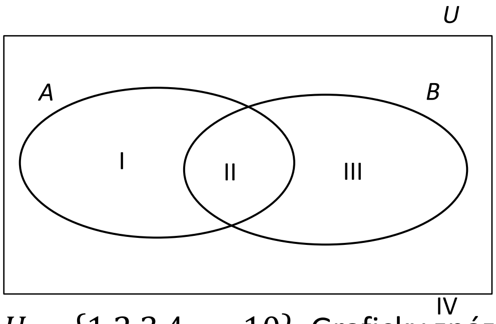
    c) Koľko žiakov písalo štvrťročnú prácu?

16. Výrobky vyradené výstupnou kontrolou mali 3 druhy chýb. Z 800 kontrolovaných výrobkov bolo 97% bez chyby. Polovica chybných výrobkov mala chybu A, štvrtina chybných výrobkov mala iba chybu B. Všetky výrobky s chybou C mali aj chybu B a tretina z nich mala aj chybu A. Chybu A i B malo 7 výrobkov.
    a) Koľko výrobkov malo iba chybu A?
    b) Koľko výrobkov malo chybu C?
    c) Koľko percent výrobkov malo súčasne chyby B a C a súčasne nemalo chybu A?

17. V 4.B triede písalo písomku z matematiky 32 žiakov. V písomke boli zadané tri príklady. Tretí príklad vyriešilo správne 14 žiakov, prvý príklad 22 žiakov. Dvaja žiaci nevyriešili ani jeden príklad. Prvý a zároveň druhý príklad vyriešil rovnaký počet žiakov ako prvý a tretí príklad. Druhý a zároveň tretí príklad vyriešilo 6

žiakov. Viac ako jeden príklad vyriešilo 16 žiakov, len tretí príklad 3 a len druhý príklad 3 žiaci. Koľko žiakov vyriešilo všetky tri príklady?

18. Daný je Vennov diagram pre dve množiny A,B základnej množiny U. Zapíšte množiny, ktoré znázorňujú jednotlivé polia diagramu.



19. Nech $U = \{1,2,3,4, \dots, 10\}$. Graficky znázornite podmnožiny množiny U.

$A = \{2,4,6,8\}$

$B = \{x \in N;\ x \text{ je prvočíslo}\}$

$C = \{x \in N;\ 2 < x < 7\}$

20. Sú dané množiny

$A = \{-2,-1,0\}$, $B = \{x \in Z;\ |x-2| < 3\}$, $C = \{x \in N;\ x < 5\}$, $D = \{x \in Z;\ 2 \leq x < 7\}$.

Určte :

$A \cap B,\ A \cup C,\ C \cap D,\ A \cap \emptyset$

$A \cup B,\ C \cup D,\ A \cup \emptyset$

$A - B,\ B - A,\ C - B$

21. Sú dané množiny $U = \{x \in N;\ x < 9\}$, $A = \{x \in U;\ 2|x\}$, $B = \{x \in U;\ |x-3| < 2\}$, $C = \{x \in U;\ x^2 - 10x + 21 = 0\}$.

a) Určte vymenovaním prvkov množiny $A \cap B$, A', $A' \cap B \cap C'$, $(A \cup B) \cap C'$, $A \cup (B \cap C')$.

b) Zapíšte všetky prvky množiny *U*, ktoré:

i. patria súčasne do všetkých troch množín,
ii. nepatria do množiny *C,*
iii. nepatria do žiadnej z množín *A,B,C* .

22. Dané sú množiny $A = (-3; -1\rangle, B = (-1; 2)$, $C = \langle 2; 5), D = \langle -2, 1\rangle$. Vyznačte ich na číselnej osi a intervalom určte množiny $A \cap B$, $B \cap D$, $C \cap D$, $A \cup B, A \cup D, B - D, A - B, D - A, A'_R$, $(A \cap B)'_R$, $(C \cup D)'_R$

23. Pomocou Vennových diagramov rozhodnite, či pre všetky podmnožiny A, B základnej množiny M platí:
    a) $A' \cap B' = (A \cup B)C$
    b) $A' \cap B' = (A \cap B)'$
    c) $A' \cup (B \cap C') = (A' \cup B) \cap (A \cap C)'$
    d) $A' \cap (B' \cup C) = (A \cup B)' \cap (A' \cup C)$

3 KARTEZIÁNSKY SÚČIN A BINÁRNE OPERÁCIE

V tejto kapitole sa budeme zaoberať prevažne takými množinami, ktorých prvky sú usporiadané dvojice. Usporiadanú dvojicu vytvorenú z prvkov x je prvá zložka a prvok y je druhá zložka usporiadanej dvojice, budeme označovať $[x, y]$

3.1 Základné pojmy

Ako motivácia pre zavedenie nasledujúcich definícií môže poslúžiť nasledujúci príklad.

Traja chlapci Kamil, Viktor a Richard sa počas brigády zoznámili s Evou a Ninou. Chlapci sľúbili dievčatám, že po návrate domov každý chlapec napíše každému dievčaťu správu.

Vytvorme matematický model tejto situácie. Množinu chlapcov označme $A = \{K, V, R\}$ a množinu dievčat označme $B = \{E, N\}$ Správu, ktorú napíše Kamil Eve, označme symbolom $[K, E]$.

Ak chlapci splnia svoj sľub, potom množina všetkých správ, ktoré napíšu dievčatám, bude množina $\{[K, E], [K, N], [V, E], [V, N], [R, E], [R, N]\}$.

Poznámka: $[K, E]$ nie je to isté ako $[E, K]$. Znakom $[E, K]$ by sme označili správu, ktorú by napísala Eva Kamilovi.

Pristúpme k všeobecným pojmom. V predchádzajúcom príklade sme pracovali s tzv. usporiadanými dvojicami, označili sme ich $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$. Prvok *x* sa nazýva prvá zložka usporiadanej dvojice $[x, y]$ a *y* druhá zložka usporiadanej dvojice $[x, y]$. Rovnosť usporiadaných dvojíc definujeme preto nasledujúcim spôsobom: Hovoríme, že usporiadaná dvojica $[x, y]$ sa rovná usporiadanej dvojici $[u, v]$ práve vtedy, keď $x = u$ a zároveň $y = v$.

Množina $\{[K, E], [K, N], [V, E], [V, N], [R, E], [R, N]\}$ z predchádzajúceho príkladu bola množina všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$. Takúto množinu nazývame karteziánsky súčin množín *A*, *B*. Presne je karteziánsky súčin množín definovaný v nasledujúcej definícii.

Definícia Nech *A*, *B* sú ľubovoľné množiny. Potom množinu všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$, nazývame karteziánsky súčin množín *A*, *B* a označujeme symbolom $A \times B$. Teda $A \times B = \{[x, y]; x \in A, y \in B\}$.

Poznámka. Ak A = B, potom namiesto $A \times A$ píšeme aj A^2 a hovoríme o karteziánskej mocnine. Podobne namiesto zápisu $A \times A \times \ldots \times A$, v ktorom vystupuje n činiteľov, píšeme A^n.

Príklad

Nech $A = \{a, b\}, B = \{1,2,3\}, N = \{1,2,3, \ldots\}$. Potom

$A \times B = \{[a, 1], [b, 1], [a, 2], [b, 2], [a, 3], [b, 3]\}$,

$B \times A = \{[1, a], [1, b], [2, a], [2, b], [3, a], [3, b]\}$,

$A^2 = \{[a, a], [a, b], [b, a], [b, b]\}$,

$B^2 = \{[1,1], [1,2], [1,3], [2,1], [2,2], [2,3], [3,1], [3,2], [3,3]\}$,

$A \times N = \{[a, 1], [b, 1], [a, 2], [b, 2], [a, 3], [b, 3], \ldots\} = \{[a, n], [b, n]; n \in N\}$,

$N \times N = \{[k, l], [b, n]; k \in N, l \in N\}$.

Základné vlastnosti karteziánskeho súčinu

1. Nech *A*, *B* sú ľubovoľné množiny. Ak aspoň jedna z množín *A*, *B* je prázdna, potom $A \times B = \emptyset$ a obrátene, ak $A \times B = \emptyset$, potom aspoň jedna z množín *A*, *B* je prázdna.
2. Nech *A*, *B*, *C* sú ľubovoľné množiny. Potom platí

   a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

   b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

   c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

Poznámka. Pre karteziánsky súčin neplatí komutatívny zákon, t.j. existujú množiny A, B také, že platí $A \times B \neq B \times A$. Stačí vziať množiny A, B z predchádzajúceho príkladu. Pre karteziánsky súčin neplatí ani asociatívny zákon, t.j. existujú množiny A, B, C také, že platí $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. Stačí položiť $A = B = C = \{x\}$. Potom $(A \times B) \times C = \{[[x, x], x]\}$ a $A \times (B \times C) = \{[x, [x, x]]\}$.

3.2 Binárne relácie

Nech $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$. Uvažujme vzťah „číslo $x \in A$ delí číslo $y \in B$“. Tento vzťah (relácia) určuje množinu usporiadaných dvojíc

$R = \{[1,3], [1,4], [1,5], [1,6], [2,4], [2,6], [3,3], [3,6], [4,4]\}$,

ktorá je podmnožinou karteziánskeho súčinu $A \times B$. Ak uvažujeme vzťah „číslo $x \in A$ je väčšie než číslo $y \in B$“, potom množina $T = \{[4,3]\}$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc, ktoré uvažovaný vzťah spĺňajú. Opäť platí, že množina T je podmnožinou karteziánskeho súčinu $A \times B$.

Tým je motivovaná nasledujúca definícia.

Definícia Nech *A*, *B* sú ľubovoľné množiny. Binárnou reláciou z množiny *A* do množiny *B* nazývame každú podmnožinu karteziánskeho súčinu $A \times B$. Ak *A* = *B*, potom podmnožinu karteziánskeho súčinu $A \times A$ nazývame binárnou reláciou v množine *A*.

Poznámka. Keďže každá binárna relácia je množina, všetky úvahy a tvrdenia, ktoré platia pre množiny, platia aj pre binárne relácie. Teda každú binárnu reláciu možno určiť vymenovaním prvkov alebo charakteristickou vlastnosťou. Binárne relácie je možné určiť výrokovými formami o dvoch premenných. Napríklad, binárne relácie R, T z predchádzajúceho príkladu môžeme zapísať aj nasledovne:

$R = \{[x, y] \in A \times B; x \text{ delí } y\}$, $T = \{[x, y] \in A \times B; x > y\}$.

Pojem binárnej relácie je možné prirodzeným spôsobom zovšeobecniť na pojem n-árnej relácie. Príkladom tzv. ternárnej relácie je relácia $T = \{[x, y, z] \in A \times A \times A; x + y = z\}$ *definovaná v množine* $A = \{1,2,3,4,5\}$. *Je určená charakteristickou vlastnosťou. Môžeme ju určiť aj vymenovaním prvkov:*

$T = \{[1,1,2], [1,2,3], [2,1,3], [2,3,5], [3,2,5], [3,1,4], [1,3,4], [2,2,4], [1,4,5], [4,1,5]\}$.

Každej binárnej relácii je možné priradiť jej prvý a druhý obor.

Definícia Nech *R* je binárna relácia z množiny *A* do množiny *B*. Množinu všetkých prvých zložiek všetkých usporiadaných dvojíc z binárnej relácie *R* nazývame prvý obor binárnej relácie *R* a označujeme symbolom $O_1(R)$. Podobne, množinu všetkých druhých zložiek všetkých usporiadaných dvojíc z binárnej relácie *R* nazývame druhý obor binárnej relácie *R* a označujeme symbolom $O_2(R)$.

Poznámka. Stručnejšie pomocou matematickej symboliky -možno predchádzajúcu definíciu sformulovať nasledovne:

$O_1(R) = \{x \in A; \exists y \in B: [x, y] \in R\}$, $O_2(R) = \{y \in B; \exists x \in A: [x, y] \in R\}$.

Je zrejmé, že $O_1(R) \subset A$ *a* $O_2(R) \subset B$.

Príklad

Určme prvý a druhý obor binárnych relácií *R*, *T* z predchádzajúceho príkladu.

Riešenie:

$O_1(R) = \{x \in A; \exists y \in B: [x, y] \in R\} = \{1,2,3,4\} = A$,

$O_2(R) = \{y \in B; \exists x \in A: [x, y] \in R\} = \{3,4,5,6\}$,

$O_1(T) = \{x \in A; \exists y \in B: [x, y] \in T\} = \{4\}$,

$O_2(T) = \{y \in B; \exists x \in A: [x, y] \in T\} = \{3\}$.

Príklad

V množine všetkých prirodzených čísel sú definované nasledujúce binárne relácie:

$R_1 = \{[x, y] \in N \times N; x + 2 = y\}$,

$R_2 = \{[x, y] \in N \times N; 2x = y\}$,

$R_3 = \{[x, y] \in N \times N; 2x - 1 = y\}$.

Treba určiť ich prvý a druhý obor.

Riešenie:

Binárnu reláciu R_1 môžeme zapísať nasledovne: $R_1 = \{[n, n + 2]; n \in N\}$. Vidíme, že $O_1(R_1) = \{x \in N; \exists y \in N: [x, y] \in R_1\} = N$,

$O_2(R_1) = \{y \in N; \exists x \in N: [x, y] \in R_1\} = \{n + 2; n \in N\} = \{3,4,5, \dots\}$.

Ďalej platí $R_2 = \{[n, 2n]; n \in N\}$. Takže $O_1(R_2) = \{x \in N; \exists y \in N: [x, y] \in R_2\} = N$, $O_2(R_2) = \{y \in N; \exists x \in N: [x, y] \in R_2\} = \{2n; n \in N\} = \{2,4,6, \dots\}$.

Binárnu reláciu R_3 môžeme zapísať v tvare $R_3 = \{[n, 2n - 1]; n \in N\}$, a teda $O_1(R_3) = \{x \in N; \exists y \in N: [x, y] \in R_3\} = N$,

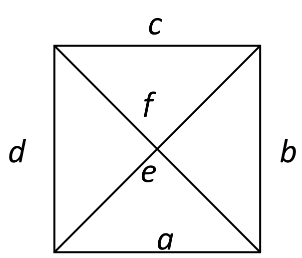
$O_2(R_3) = \{y \in N; \exists x \in N: [x, y] \in R_3\} = \{2n - 1; n \in N\} = \{1,3,5, \dots\}$.

Príklad

Zapíšte vymenovaním prvkov binárnu reláciu $R = \{[x, y] \in M \times M; x$ je kolmé na $y\}$, kde M je množina všetkých úsečiek v danom štvorci. Určte jej prvý a druhý obor.

Riešenie:

Ak označíme strany štvorca písmenami a, b, c, d a jeho uhlopriečky písmenami e, f, potom $M = \{a, b, c, d, e, f\}$. Pre lepšiu názornosť situáciu znázorníme graficky.



$R = \{[a, b], [b, a], [a, d], [d, a], [d, c], [c, d], [c, b], [b, c], [e, f], [f, e]\}$.

Určme prvý a druhý obor binárnej relácie R:

$O_1(R) = \{x \in M; \exists y \in M: [x,y] \in R\} = \{a,b,c,d,e,f\} = M,$

$O_2(R) = \{y \in M; \exists x \in M: [x,y] \in R\} = O_2(R) = \{y \in M; \exists x \in M: [x,y] \in R\} =$

Množinový doplnok k binárnej relácii je opäť binárna relácia, nazýva sa doplnková binárna relácia.

Definícia Nech *R* je binárna relácia z množiny *A* do množiny *B*. Doplnkovou reláciou k relácii *R* nazývame binárnu reláciu $R^{'} \subset A \times B$ definovanú nasledovne:

$R^{'} = \{[x,y] \in A \times B; [x,y] \notin R\} = (A \times B) - R.$

Príklad

Nech $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$. Binárne relácie R,T sú definované nasledovne: $\mathrm{R} = \{[\mathrm{x},\mathrm{y}] \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}; \mathrm{x}$ delí y$\}$, $\mathrm{T} = \{[\mathrm{x},\mathrm{y}] \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}; \mathrm{x} > \mathrm{y}\}$. Nájdite doplnkové binárne operácie $R^{'}, T^{'}$.

Riešenie:

Doplnkové relácie k binárnym reláciám R, T z príkladu sú nasledujúce binárne relácie:

$R^{'} = \{[x,y] \in A \times B; x$ nedelí y$\} = \{[2,3],[2,5],[3,4],[3,5],[4,3],[4,5],[4,6]\}, T^{'} = \{[x,y] \in A \times B; x \leq y\} = \{[1,3],[1,4],[1,5],[1,6],[2,3],[2,4],$

$[2,5],[2,6],[3,4],[3,5],[3,6],[4,5],[4,6]\}.$

Definícia Nech *R* je binárna relácia z množiny *A* do množiny *B*. Inverznou reláciou k relácii *R* nazývame binárnu reláciu $R^{-1} \subset B \times A$ definovanú nasledovne: $R^{-1} = \{[x,y] \in B \times A; [y,x] \in R\}$.

Poznámka. Nech R je binárna relácia z množiny A do množiny B a nech $R^{-1} \subset B \times A$ je k nej inverzná relácia. Z predchádzajúcej definície vyplýva, že pre ľubovoľnú usporiadanú dvojicu $[x,y] \in A \times B$ platí $[x,y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y,x] \in R$.

Príklad

Nech $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$. Binárne relácie R,T sú definované nasledovne: $\mathrm{R} = \{[\mathrm{x},\mathrm{y}] \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}; \mathrm{x}$ delí y$\}$, $\mathrm{T} = \{[\mathrm{x},\mathrm{y}] \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}; \mathrm{x} > \mathrm{y}\}$.

Nájdite inverzné relácie k binárnym reláciám *R*, *T.*

Riešenie:

$R = \{[1,3],[1,4],[1,5],[1,6],[2,4],[2,6],[3,3],[3,6],[4,4]\}$,

$R^{-1} = \{[x,y] \in B \times A; [y,x] \in R\} = \{[x,y] \in B \times A; y \; delí \; x\}$ =

$= \{[3,1],[4,1],[5,1],[6,1],[4,2],[6,2],[3,3],[6,3],[4,4]\}$,

$T^{-1} = \{[x,y] \in B \times A; [y,x] \in T\} = \{[x,y] \in B \times A; y > x\} = \{[3,4]\}$.

Príklad

Nájdite doplnkové a inverzné relácie k binárnym reláciám $R_1, R_2,\ R_3, R_4$, ktoré sú definované v množine *N* takto:

$R_1 = \{[x,y] \in N \times N; x = y\},\ R_2 = \{[x,y] \in N \times N; x < y\}$,

$R_3 = \{[x,y] \in N \times N; x \geq 2\},\ R_4 = \{[x,y] \in N \times N; y \geq 1\}$.

Riešenie:

Potom k nim doplnkové a inverzné relácie sú nasledujúce binárne relácie:

$R_1' = \{[x,y] \in N \times N; x \neq y\}$,

$R_1^{-1} = \{[x,y] \in N \times N; y = x\} = R_1$,

$R_2' = \{[x,y] \in N \times N; x \geq y\}$,

$R_2^{-1} = \{[x,y] \in N \times N; y < x\}$.

$R_3' = \{[x,y] \in N \times N; x < 2\} = \{[1,n]; n \in N\}$,

$R_3^{-1} = \{[x,y] \in N \times N; [y,x] \in R_3\} = \{[x,y] \in N \times N; y \geq 2\}$,

$R_4' = \{[x,y] \in N \times N; y < 1\} = \varphi$,

$R_4^{-1} = \{[x,y] \in N \times N; [y,x] \in R_4\} = \{[x,y] \in N \times N; x \geq 1\} = N \times N$.

Príklad

Nech $A = \{1,2,3,4,5,6\},\ B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$. Nájdite doplnkové a inverzné relácie k nasledujúcim binárnym reláciám z množiny *A* do množiny *B*:

$$T_1 = \{[x,y] \in A \times B; y = x + 1\},$$

$$T_2 = \{[x,y] \in A \times B; y = 2x\},$$

$$T_3 = \{[x,y] \in A \times B; y = 2x + 1\}.$$

Riešenie

Zapíšme najskôr binárne relácie T_1, T_2, T_3 vymenovaním prvkov:

$T_1 = \{[1,2], [2,3], [3,4], [4,5], [5,6], [6,7]\}$,

$T_2 = \{[1,2], [2,4], [3,6], [4,8]\}$,

$T_3 = \{[1,3], [2,5], [3,7]\}$.

$T_1' = \{[x, y] \in A \times B; y \neq x + 1\} = (A \times B) - T_1$,

$T_1^{-1} = \{[x, y] \in B \times A; [y, x] \in T_1\} = \{[x, y] \in B \times A; x = y + 1\} = \{[2,1], [3,2],$

$[4,3], [5,4], [6,5], [7,6]\}$,

$T_2' = \{[x, y] \in A \times B; y \neq 2x\} = (A \times B) - T_2$,

$T_2^{-1} = \{[x, y] \in B \times A; [y, x] \in T_2\} = \{[x, y] \in B \times A; x = 2y\} = \{[2,1], [4,2],$

$[6,3], [8,4]\}$,

$T_3' = \{[x, y] \in A \times B; y \neq 2x + 1\} = (A \times B) - T_3$,

$T_3^{-1} = \{[x, y] \in B \times A; [y, x] \in T_3\} = \{[x, y] \in B \times A; x = 2y + 1\} = \{[3,1], [5,2],$

$[7,3]\}$.

Definícia Nech *S* je binárna relácia z množiny *A* do množiny *B* (t.j. $S \subset A \times B$) a *T* nech je binárna relácia z množiny *B* do množiny *C* (t.j. $T \subset B \times C$). Potom binárnu reláciu $S \circ T \subset A \times C$ definovanú vzťahom

$S \circ T = \{[x, y] \in A \times C; \exists z \in B: [x, z] \in S \wedge [z, y] \in T\}$, nazývame **zloženou binárnou reláciou** z relácií *S* a *T* (v tomto poradí).

Príklad

Nech binárne relácie $S = \{[1,3], [1,6], [4,7]\}$ a $T = \{[3,4], [6,6], [7,5], [3,5]\}$ sú definované v množine *N*. Keďže platí $S \subset N \times N, T \subset N \times N$, možno utvoriť zloženú binárnu reláciu $S \circ T$ a tiež zloženú binárnu reláciu $T \circ S$. Nájdime najskôr zloženú binárnu reláciu $S \circ T$.

Keďže $[1,3] \in S$ a zároveň $[3,4] \in T$, usporiadaná dvojica $[1,4] \in S \circ T$.

Keďže $[1,6] \in S$ a zároveň $[6,6] \in T$, usporiadaná dvojica $[1,6] \in S \circ T$.

Keďže $[1,3] \in S$ a zároveň $[3,5] \in T$, usporiadaná dvojica $[1,5] \in S \circ T$.

Keďže $[4,7] \in S$ a zároveň $[7,5] \in T$, usporiadaná dvojica $[4,5] \in S \circ T$.

To znamená, že $S \circ T = \{[1,4],[1,6],[1,5],[4,5]\}$.

Analogicky určíme zloženú binárnu reláciu $T \circ S$. Keďže $[3,4] \in T$ a zároveň $[4,7] \in S$, usporiadaná dvojica $[3,7] \in T \circ S$. Dá sa ľahko nahliadnuť, že usporiadaná dvojica $[3,7]$ je jediným prvkom zloženej binárnej relácie $T \circ S$, čiže $T \circ S = \{[3,7]\}$.

Vidíme, že $S \circ T \neq T \circ S$. To znamená, že pri skladaní binárnych relácií záleží na poradí. Pre skladanie binárnych relácií neplatí komutatívny zákon.

Príklad

Nech $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{x,y,z\}$. Nech $R_1 = \{[a,1],[b,1],[c,2],[d,4]\}$ a $R_2 = \{[a,2],[b,2],[c,2],[d,3]\}$ sú binárne relácie z množiny *A* do množiny *B* a nech $S_1 = \{[1,y],[2,y],[4,z]\}$ a

$S_2 = \{[2,x],[3,y]\}$ sú binárne relácie z množiny *B* do množiny *C*. Nájdite zložené binárne relácie $R_1 \circ S_1$, $R_1 \circ S_2$, $R_2 \circ S_1$, $R_2 \circ S_2$.

Riešenie:

Pretože $R_1 \subset A \times B$, $R_2 \subset A \times B$, $S_1 \subset B \times C$, $S_2 \subset B \times C$, zložené binárne relácie $R_1 \circ S_1$, $R_1 \circ S_2$, $R_2 \circ S_1$, $R_2 \circ S_2$ sú definované. Sú to nasledujúce relácie:

$$R_1 \circ S_1 = \{[x,y] \in A \times C; \exists z \in B: [x,z] \in R_1 \wedge [z,y] \in S_1\} =$$
$$= \{[a,y],[b,y],[c,y],[d,z]\},$$

$$R_1 \circ S_2 = \{[x,y] \in A \times C; \exists z \in B: [x,z] \in R_1 \wedge [z,y] \in S_2\} = R_1 \circ S_2$$
$$= \{[x,y] \in A \times C; \exists z \in B: [x,z] \in R_1 \wedge [z,y] \in S_2\} = \{[c,x]\},$$

$$R_2 \circ S_1 = \{[x,y] \in A \times C; \exists z \in B: [x,z] \in R_2 \wedge [z,y] \in S_1\} =$$

$$= \{[a,y],[b,y],[c,y]\},$$

$$R_2 \circ S_2 = \{[x,y] \in A \times C; \exists z \in B: [x,z] \in R_2 \wedge [z,y] \in S_2\} =$$

$$= \{[a,x],[b,x],[c,x],[d,y]\}.$$

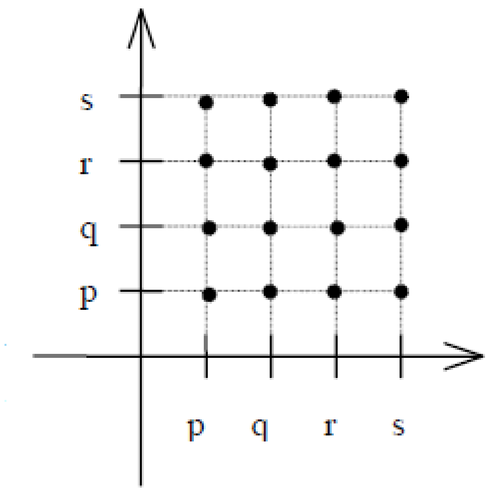
3.3 Grafické znázornenie binárnych relácií

Na grafické znázornenie binárnych relácií sa používajú tri druhy grafov: karteziánsky, šachovnicový a uzlový.

S ***karteziánskym grafom*** sa študenti stretávajú už na strednej škole pri grafickom znázorňovaní priebehu funkcie. Používame pri ňom spravidla pravouhlý súradnicový systém. Ak *R* je binárna relácia z množiny *A* do množiny *B* (t.j. $R \subset A \times B$), potom v pravouhlom súradnicovom systéme na vodorovnej priamke znázorníme bodmi prvky množiny *A* a na zvislej priamke prvky množiny *B*. Usporiadanú dvojicu $[x, y] \in R$ znázorníme priesečníkom kolmice vedenej v bode *x* na vodorovnú os a kolmice vedenej v bode *y* na zvislú os. Uvedieme príklad.

Príklad Je daná množina: A={p, q, r, s}. Koľko prvkov má karteziánsky súčin A x A? Znázornite ho karteziánskym grafom.

Riešenie:



Obr. 3.2. Karteziánsky graf

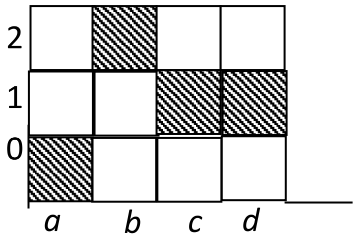
Karteziánsky súčin $A \times A$ má 16 prvkov, lebo každý prvok je vo dvojici sám so sebou a ešte s ďalšími tromi prvkami.

Šachovnicový graf binárnej relácie $R \subset A \times B$ sa od jej karteziánskeho grafu odlišuje tým, že prvky množín *A* a *B* neznázorňujeme bodmi, ale úsečkami na vodorovnej resp. zvislej osi. Usporiadaná dvojica $[x, y] \in R$ sa znázorní vyšrafovaným štvorcom, tak ako je to znázornené na obrázku 3.3.

Príklad

Je daná množina $A = \{a, b, c, d\}$ a množina $B = \{0,1,2\}$. Zostrojte šachovnicový graf binárnej relácie $R = \{[a, 0], [b, 2], [c, 1], [d, 1]\}$.

Riešenie:



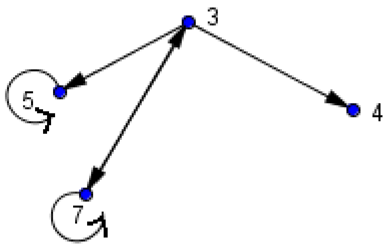
Obr. 3.3. Šachovnicový graf

Pri ***uzlovom grafe*** binárnej relácie $R \subset A \times B$ každému prvku množín *A* a *B* odpovedá bod v rovine, tzv. uzol grafu. Dva uzly *x* a *y* budú spojené tzv. orientovanou hranou, ak existuje usporiadaná dvojica $[x, y] \in R$. Šípka na orientovanej hrane pritom smeruje k druhej zložke usporiadanej dvojice $[x, y]$. Ak je binárna relácia *R* binárnou reláciou v množine *A* (t.j. $R \subset A \times A$), potom jej uzlový graf je rovnaký, len usporiadanú dvojicu $[x, x] \in R$ znázorníme tzv. slučkou. Uvedieme príklady.

Príklad

Je daná množina $M = \{3,4,5,7\}$. Zostrojte uzlový graf binárnej relácie $R = \{[3,5], [3,4], [3,7], [5,5], [7,3], [7,7]\}$.

Riešenie:

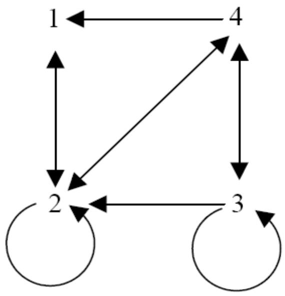


Obr. 3.5. Uzlový graf

Príklad

Je daná množina $A = \{1,2,3,4\}$. Zostrojte uzlový graf binárnej relácie $R = \{[1,2], [2,1], [2,2], [2,4], [3,3], [4,1], [4,2], [4,3]\}$.

Riešenie:



3.4 Vlastnosti binárnych relácií v množine

V tejto časti budeme definovať niektoré dôležité vlastnosti binárnych relácií. Budeme pritom predpokladať, že binárna relácia je definovaná v množine.

Definícia Nech *R* je binárna relácia je definovaná v množine *A*. Budeme hovoriť, že binárna relácia *R* je

a) reflexívna, ak pre každé $x \in A$ platí $[x,x] \in R$,

b) antireflexívna, ak pre každé $x \in A$ platí $[x,x] \notin R$,

c) symetrická, ak pre každé $x, y \in A$ platí $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R$,

d) antisymetrická, ak pre každé $x, y \in A$ platí $([x,y] \in R \wedge [y,x] \in R) \Rightarrow x = y$,

e) tranzitívna, ak pre každé $x, y, z \in A$ platí $([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow \Rightarrow [x,z] \in R$.

Poznámka. Antisymetrickosť môžeme ekvivalentne definovať aj nasledujúcim spôsobom: binárna relácia R je antisymetrická, ak pre každé $x, y \in A$ také, že $x \neq y$, platí $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \notin R$.

Uvedenú definíciu budeme ilustrovať na príkladoch.

Príklad

Nech sú v množine $A = \{a, b, c\}$ definované nasledujúce binárne relácie:

$R_1 = \{[a,a], [a,b], [a,c], [b,c], [b,b], [c,c]\}$,

$R_2 = \{[a,a], [b,b], [c,c], [a,c], [c,b]\}$,

$R_3 = \{[a, a], [a, b]\}$,

$R_4 = \{[a, a], [a, c], [c, a]\}$,

$R_5 = \{[a, b], [b, a]\}$.

Zistite, aké sú ich vlastnosti.

Riešenie:

a) Najskôr zistíme, či sú reflexívne. Binárna relácia R_1 je reflexívna, lebo s každým prvkom $x \in A$ obsahuje príslušnú usporiadanú dvojicu $[x, x]$ (dvojice $[a, a], [b, b], [c, c]$ sú prvkami binárnej relácie R_1). To isté platí aj pre binárnu reláciu R_2, binárna relácia R_2 je tiež reflexívna. Pre ďalšie binárne relácie to neplatí, keďže neobsahujú všetky dvojice $[a, a], [b, b], [c, c]$. Binárne relácie R_3, R_4 a R_5 nie sú reflexívne.

b) Zistíme, či dané binárne relácie sú antireflexívne. Ak má byť binárna relácia antireflexívna, nemôže obsahovať usporiadané dvojice, v ktorých sa prvá zložka rovná druhej. Takéto dvojice však obsahujú binárne relácie R_1, R_2, R_3 a R_4, a preto tieto binárne relácie nie sú antireflexívne. Binárna relácia R_5 je antireflexívna, lebo pre každé $x \in A$ platí $[x, x] \notin R_5$. Všimnime si, že ak binárna relácia nie je reflexívna, neznamená to ešte, že je antireflexívna.

c) Ďalej budeme zisťovať, či dané binárne relácie sú symetrické. Binárna relácia R_1 nie je symetrická, lebo nie pre všetky $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R_1 \Rightarrow [y, x] \in R_1$. Existujú také dva prvky $x, y \in A$, pre ktoré platí $[x, y] \in R_1 \wedge [y, x] \notin R_1$. Stačí položiť napríklad $x = a, y = b$. Binárna relácia R_1 obsahuje usporiadanú dvojicu $[a, b]$, ale usporiadaná dvojica $[b, a]$ nie je jej prvkom. To isté platí aj pre binárne relácie R_2 a R_3: binárna relácia R_2 obsahuje usporiadanú dvojicu $[a, c]$, ale usporiadaná dvojica $[c, a]$ nie je jej prvkom, binárna relácia R_3 obsahuje usporiadanú dvojicu $[a, b]$, ale usporiadaná dvojica $[b, a]$ nie je jej prvkom. Binárne relácie R_2 a R_3 nie sú symetrické. Naproti tomu binárne relácie R_4 a R_5 sú symetrické. Pre všetky $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R_4 \Rightarrow [y, x] \in R_4$ a tiež $[x, y] \in R_5 \Rightarrow [y, x] \in R_5$.

d) Budeme zisťovať, či dané binárne relácie sú antisymetrické. Vzhľadom na predchádzajúcu poznámku, je zrejmé, že binárne relácie R_1, R_2 a R_3 sú antisymetrické. Ak uvažovaná binárna relácia obsahuje usporiadanú dvojicu $[x, y]$, pričom $x \neq y$, potom usporiadaná dvojica $[y, x]$ naozaj nie je jej prvkom. Binárna relácia R_4 nie je antisymetrická, lebo obsahuje usporiadané dvojice $[a,c]$, $[c, a]$. Keďže binárna relácia R_5 obsahuje usporiadané dvojice $[a, b]$ a $[b, a]$, nie je antisymetrická.

e) Nakoniec zistíme, či dané binárne relácie sú tranzitívne. Uvažujme najskôr binárnu reláciu R_1. Treba overiť, či pre každé $x, y, z \in A$ platí implikácia $([x, y] \in R_1 \wedge [y, z] \in R_1) \Rightarrow$ $([x, y] \in R_1 \wedge [y, z] \in R_1) \Rightarrow$ Vezmime usporiadané dvojice $[a,b]$, $[b, c]$, ktoré sú prvkami binárnej relácie R_1. Aby bola binárna relácia R_1 tranzitívna, musí byť usporiadaná dvojica $[a, c]$ jej prvkom. Vidíme, že to platí. Pre ostatné usporiadané dvojice, ktoré sú prvkami binárnej relácie R_1, to platí automaticky. To znamená, že binárna relácia R_1 je tranzitívna. Podobne by sme overili, že aj binárne relácie R_3 a R_4 sú tranzitívne. Binárna relácia R_2 nie je tranzitívna, lebo usporiadané dvojice $[a, c]$ a $[c, b]$ sú jej prvkami, ale usporiadaná dvojica $[a, b]$ nie je jej prvkom. Rovnako ani binárna relácia R_5 nie je tranzitívna, lebo usporiadané dvojice $[a, b]$ a $[b, a]$ sú jej prvkami, ale usporiadaná dvojica $[a, a]$ jej prvkom nie je.

Príklad

Určte všetky binárne relácie v množine $A = \{a, b\}$ a zistite, ktoré z nich sú reflexívne, antireflexívne, symetrické, antisymetrické a tranzitívne.

Riešenie:

Treba určiť všetky podmnožiny karteziánskeho súčinu $A \times A = \{[a, a], [a, b], [b, a], [b, b]\}$. Je ich $2^4 = 16$. Sú to nasledujúce množiny:

$R_1 = \varphi$, $R_2 = A \times A$, $R_3 = \{[a, a]\}$, $R_4 = \{[a, b]\}$, $R_5 = \{[b, a]\}$, $R_6 = \{[b, b]\}$, $R_7 = \{[a, a], [a, b]\}$, $R_8 = \{[a, a], [b, a]\}$, $R_9 = \{[a,a],[b,b]\}$,

$R_{10} = \{[a, b], [b, a]\}$, $R_{11} = \{[a, b], [b, b]\}$, $R_{12} = \{[b, a], [b, b]\}$,

$R_{13} = \{[a, a], [a, b], [b, a]\}$, $R_{14} = \{[a, a], [b, b], [b, a]\}$,

$R_{15} = \{[a, b], [b, a], [b, b]\}$, $R_{16} = \{[a, a], [b, b], [a, b]\}$.

Reflexívne sú binárne relácie R_2, R_9, R_{14} a R_{16}, antireflexívne sú binárne relácie R_1, R_4, R_5 a R_{10}. Symetrické sú binárne relácie R_1, R_2, R_3, R_6, R_9, R_{10}, R_{13}, R_{15}, antisymetrické sú binárne relácie R_1, R_3, R_4, $R_5 R_6$, R_7, R_8, R_9, R_{11}, R_{12}, R_{14} a R_{16}. Z uvedených binárnych relácií sú tranzitívne všetky okrem binárnych relácií R_{10} a R_{15}.

Príklad

Zistite, aké vlastnosti má relácia inklúzie množín.

Riešenie:

Treba zistiť vlastnosti binárnej relácie $R = \{[X, Y] \in P(U) \times P(U); X \subset Y\}$, kde *U* je vopred daná neprázdna množina. Pripomeňme, že symbolom $P(U)$ označujeme potenčný systém množiny *U*.

a) Keďže pre každú množinu $X \in P(U)$ platí $X \subset X$, usporiadaná dvojica $[X, X] \in R$ pre každé $X \in P(U)$. To znamená, že relácia inklúzie množín je reflexívna.

b) Relácia *R* nie je antireflexívna, lebo existuje množina $X \in P(U)$ taká, že $X \subset X$. Za *X* možno vziať množinu *U*.

c) Binárna relácia *R* nie je symetrická, lebo existujú množiny $X, Y \in P(U)$ také, že *X* je podmnožinou množiny *Y* a zároveň *Y* nie je podmnožinou množiny *X*. Stačí vziať dve ľubovoľné rôzne podmnožiny X, Y množiny *U*, z ktorých je prvá podmnožinou druhej (napr. $X = \varphi, Y = U$). Množina *Y* nie je potom podmnožinou množiny *X*.

d) Binárna relácia R je antisymetrická, lebo pre každé $X, Y, Z \in P(U)$ platí: $(X \subset Y \wedge Y \subset X) \Rightarrow X = Y$.

e) Keďže pre každé $X, Y, Z \in P(U)$ $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z$, binárna relácia *R* je tranzitívna.

Príklad

Zistite, aké vlastnosti majú relácie rovnobežnosti a kolmosti priamok v rovine.

Riešenie:

Treba zistiť vlastnosti binárnych relácií

$R = \{[p, q] \in A \times A; p$ je rovnobežné s *q*$\}$,

$K = \{[p, q] \in A \times A; p$ je kolmé na *q*$\}$,

kde *A* je množina všetkých priamok v rovine. Budeme najskôr zisťovať, aké vlastnosti má binárna relácia *R*.

a) Každá priamka je rovnobežná sama so sebou, čiže pre každé $p \in A$ platí $[p, p] \in R$, a teda relácia rovnobežnosti priamok v rovine je reflexívna.

b) Keďže relácia rovnobežnosti je reflexívna, je zrejmé, že nie je antireflexívna.

c) Ľahko overíme, že je symetrická. Pre ľubovoľné dve priamky $p, q \in A$ platí, ak je priamka *p* rovnobežná s priamkou *q*, potom aj priamka *q* je rovnobežná s priamkou *p*. Čiže pre každé $p, q \in A$ platí $[p, q] \in R \Rightarrow [q, p] \in R$, čo znamená, že binárna relácia R je symetrická.

d) Binárna relácia *R* nie je antisymetrická, lebo je symetrická.

e) Pre ľubovoľné priamky $p, q, r \in A$ platí, ak je priamka *p* rovnobežná s priamkou *q* a zároveň je priamka *q* rovnobežná s priamkou *r*, potom aj priamka *p* je rovnobežná s priamkou *r*. Čiže pre každé $p, q, r \in A$ platí $([p, q] \in R \wedge [q, r] \in R) \Rightarrow [p, r] \in R$. To znamená, že binárna relácia R je tranzitívna.

V ďalšom zistíme, aké vlastnosti má binárna relácia *K*.

a) Priamka nie je kolmá sama na seba, a teda relácia kolmosti nie je reflexívna.

b) Pre každé $p \in A$ platí $[p, p] \notin K$ (priamka *p* nie je kolmá sama na seba), a preto je relácia kolmosti antireflexívna.

c) Ľahko overíme, že je symetrická. Pre ľubovoľné dve priamky $p, q \in A$ platí, ak je priamka *p* kolmá na priamku *q*, potom aj priamka *q* je kolmá na priamku *p*. Čiže pre každé $p, q \in A$ platí $[p, q] \in K \Rightarrow \Rightarrow [q, p] \in K$, čo znamená, že binárna relácia *K* je symetrická.

d) Binárna relácia *K* nie je antisymetrická, lebo je symetrická.

e) Nakoniec zistíme, či je binárna relácia *K* je tranzitívna. Pýtame sa, či pre ľubovoľné priamky $p, q, r \in A$ platí, ak je priamka *p* kolmá na priamku *q* a zároveň je priamka *q* kolmá na priamku *r*, potom aj priamka *p* je kolmá na priamku *r*. Nech p, q, r sú ľubovoľné priamky ležiace v jednej rovine také, že priamka *p* kolmá na priamku *q* a zároveň je priamka *q* kolmá na priamku *r*. Potom ale platí, že priamka *p* je rovnobežná s priamkou *r*, a teda nemôže byť na ňu kolmá. Pre lepšiu názornosť sme situáciu znázornili na nasledujúcom obrázku. Tým sme ukázali, že binárna relácia *K* nie je tranzitívna.

3.5 Relácia ekvivalencie a rozklad množiny

Jedným z najdôležitejších typov binárnych relácií je relácia ekvivalencie.

Definícia Binárnu reláciu *R* definovanú v množine *A* budeme nazývať reláciou ekvivalencie v množine *A* práve vtedy, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Poznámka. Podrobnejšie môžeme predchádzajúcu definíciu sformulovať takto:

Binárna relácia R definovaná v množine A je reláciou ekvivalencie v množine A práve vtedy, ak pre ľubovoľné $x, y, z \in A$ *platí*

1. $[x, x] \in R$,

2. $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$, *3.* $([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R$.

Ak binárna relácia *R* je reláciou ekvivalencie v množine *A*, potom namiesto zápisu $[x,y] \in R$ budeme používať zápis *x* ~ *y*. Tento zápis čítame „*x* je ekvivalentné s *y*“. Predchádzajúcu definíciu potom možno prepísať aj takto:

Binárna relácia *R* definovaná v množine *A* je reláciou ekvivalencie v množine *A* práve vtedy, ak pre ľubovoľné $x, y, z \in A$ platí

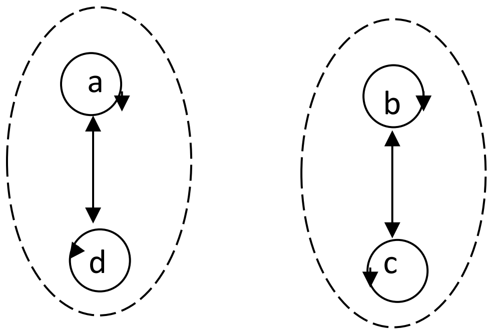
1. *x* ~ *x*,

2. *x* ~ $y \Rightarrow y$ ~ *x*,

3. (*x* ~ *y* $\wedge$ y ~ *z*) $\Rightarrow$ x ~ *z*.

Príklad

Nech v množine $A = \{a, b, c, d\}$ je definovaná binárna relácia $R = \{[a,a], [a,d], [d,a], [d,d], [c,c], [c,b], [b,c], [b,b]\}$. Ľahko nahliadneme, že binárna relácia *R* je reflexívna, symetrická a tranzitívna, čo znamená, že je reláciou ekvivalencie v množine *A*. Znázornime reláciu *R* uzlovým grafom.



Obr. 3.6. Uzlový graf relácie ekvivalencie *R*

Množinu všetkých uzlov grafu vieme rozdeliť do podmnožín tak, že žiadne dva prvky dvoch rôznych podmnožín nie sú spojené hranou. Uvedená skutočnosť nie je náhodná - každá relácia ekvivalencie definovaná v množine *A* indukuje tzv. rozklad množiny *A*. Tento pojem budeme teraz definovať.

Definícia

Nech *A* je ľubovoľná neprázdna množina. Systém *S* neprázdnych podmnožín množiny *A* sa nazýva rozklad množiny *A*, ak *S* je systém po dvoch disjunktných množín, ktorých zjednotenie je množina *A*. Množiny zo systému *S* nazývame triedy rozkladu *S*.

Veta Ak *R* je relácia ekvivalencie v množine *A*, potom systém množín $S = \{A_x; x \in A\}$, kde $A_x = \{y \in A; [x,y] \in R\} = A_x = \{y \in A; [x,y] \in R\} = x \sim y\}$ pre každé $x \in A$, je rozklad množiny *A*.

Dôkaz. Dokážeme najskôr, že systém *S* je systém neprázdnych podmnožín množiny *A*. Keďže relácia *R* je relácia ekvivalencie v množine *A*, je reflexívna, a preto pre každé $x \in A$ usporiadaná dvojica $[x,x] \in R$. To ale znamená, že $x \in A_x$ pre každé $x \in A$, a teda množiny $A_x, x \in A$, sú neprázdne. Ďalej platí, že $\bigcup_{x \in A} A_x = A$.

Zostáva dokázať, že systém *S* je systém po dvoch disjunktných množín. Nech $a, b \in A, a \neq b$ a nech $x \in A$. Predpokladajme, že $x \in A_a$ a zároveň $x \in A_b$. Potom $[a,x] \in R$ a zároveň $[b,x] \in R$. Dokážeme, že platí $A_a = A_b$. Najskôr dokážeme, že platí inklúzia $A_a \subset A_b$. Nech $y \in A_a$. Potom $[a,y] \in R$. Keďže relácia *R* je symetrická, z predpokladu $[a,x] \in R$ vyplýva, že $[x,a] \in R$. Relácia *R* je tranzitívna, a preto $[x,y] \in R$. Pretože platí $[b,x] \in R$ a zároveň $[x,y] \in R$, dostávame, že $[b,y] \in R$. To ale znamená, že $y \in A_b$. Inklúzia $A_a \subset A_b$ je dokázaná. Opačnú inklúziu $A_b \subset A_a$ dokážeme analogicky.

Poznámka. Rozklad S množiny A z predchádzajúcej vety sa nazýva rozklad množiny A indukovaný reláciou ekvivalencie R.

Príklad

Na obrázku 3.6 je znázornený uzlový graf binárnej relácie $R = \{[a,a],[a,d],[d,a],[d,d],[c,c],[c,b],[b,c],[b,b]\}$, ktorá je reláciou ekvivalencie v množine $A = \{a,b,c,d\}$. Z obrázka vidíme, že táto relácia indukuje rozklad množiny *A* na triedy rozkladu $\{a,d\}$ a $\{b,c\}$. Množiny $\{a,d\}$ a $\{b,c\}$ sú disjunktné a ich zjednotením je množina *A*. Takže systém $S = \big\{\{a,d\},\{b,c\}\big\}$ je rozklad množiny *A*. Je to rozklad indukovaný reláciou ekvivalencie *R*. Môžeme ho utvoriť aj pomocou tvrdenia predchádzajúcej vety.

Utvoríme množiny A_x, kde $x \in A$:

$A_a = \{y \in A; [a,y] \in R\} = \{a,d\}, A_b = \{y \in A; [b,y] \in R\} = \{b,c\}$,

$A_c = \{y \in A; [c,y] \in R\} = \{c,b\},\ A_d = \{y \in A; [d,y] \in R\} = \{a,d\}$.

Keďže $A_a = A_d$ a $A_b = A_c$, systém $S = \big\{\{a,d\},\{b,c\}\big\}$ je príslušný rozklad množiny *A*.

Príklad

Nech $R = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[5,5],[2,3],[3,2],[4,5],[5,4]\}$ je relácia ekvivalencie v množine $A = \{1,2,3,4,5\}$. Nájdite rozklad množiny *A* indukovaný binárnou reláciou *R*.

Riešenie :

Budeme postupovať podľa tvrdenia predchádzajúcej vety. Nájdeme množiny A_x, kde $x \in A$:

$A_1 = \{y \in A; [1,y] \in R\} = \{1\}$, $A_2 = \{y \in A; [2,y] \in R\} = \{2,3\}$,

$A_3 = \{y \in A; [3,y] \in R\} = \{2,3\}$, $A_4 = \{y \in A; [4,y] \in R\} = \{4,5\}$,

$A_5 = \{y \in A; [5,y] \in R\} = \{4,5\}$.

Príslušný rozklad množiny *A* je systém $S = \{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$.

Príklad

Nech $R = \{[x,y] \in N \times N; x = y\}$ je binárna relácia v množine *N*. Keďže je reflexívna, symetrická a tranzitívna, je reláciou ekvivalencie v množine *N*. Nájdite rozklad množiny *N* indukovaný reláciou *R*.

Riešenie:

Binárnu reláciu *R* môžeme zapísať nasledovne: $R = \{[n,n]; n \in N\}$. Takže $A_n = \{y \in N; [n,y] \in R\} = \{n\}$, a teda hľadaný rozklad je rozklad $S = \{A_n; n \in N\} = \{\{n\}; n \in N\}$.

Nasledujúca matematická veta hovorí, že každý rozklad *S* množiny *A* definuje reláciu ekvivalencie v množine *A*.

Veta Nech *S* je rozklad neprázdnej množiny *A*. Potom binárna relácia $R = \{[x,y] \in A \times A; \exists X \in S: x \in X \wedge y \in X\}$ je relácia ekvivalencie

v množine *A*.

Dôkaz. Dokážeme, že binárna relácia *R* je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Nech $x \in A$. Keďže *S* je rozklad množiny *A*, prvok *x* je prvkom práve jednej množiny zo systému *S*. Označme túto množinu znakom *X*. Takže existuje množina $X \in S$ taká, že $x \in X$. Preto platí, že $[x,x] \in R$ pre každé $x \in A$, čiže binárna relácia *R* je reflexívna.

Dokážeme, že je symetrická. Nech $x, y \in A$ a $[x,y] \in R$. Potom existuje množina $X \in S$ taká, že $x \in X$ a zároveň $y \in X$. Túto vlastnosť môžeme ekvivalentne sformulovať aj takto: existuje množina $X \in S$ taká, že $y \in X$ a zároveň $x \in X$. Odtiaľ už dostávame, že $[y, x] \in R$. To znamená, že binárna relácia *R* je symetrická.

Zostáva dokázať, že relácia *R* je tranzitívna. Nech $x, y, z \in A$, pričom $[x, y] \in R$ a zároveň $[y, z] \in R$. Potom existuje množina $X \in S$ taká, že $x \in X$ a zároveň $y \in X$. Keďže $[y, z] \in R$, platí tiež, že $z \in X$. Čiže existuje množina $X \in S$ taká, že $x \in X$ a zároveň $z \in X$. To znamená, že $[x, z] \in R$. Tým je dokázané, že binárna relácia *R* je tranzitívna.

Príklad

Nech $S = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$ je rozklad množiny $A = \{a, b, c, d\}$. Reláciu ekvivalencie definovanú rozkladom *S* určíme na základe predchádzajúcej vety, čiže prvky patriace do tej istej triedy rozkladu budeme považovať za ekvivalentné.

Keďže a, b sú prvky tej istej triedy rozkladu, platí *a* ~ *a*, *a* ~ *b*, *b* ~ *b*, *b* ~ *a* resp. $[a, a] \in \sim$, $[a, b] \in \sim$, $[b, b] \in \sim$, $[b, a] \in \sim$. Dostávame binárnu reláciu $\sim = \{[a, a], [a, b], [b, b], [b, a]\}$. Vidíme, že je reflexívna, symetrická a tranzitívna, teda je reláciou ekvivalencie v množine *A*.

Poznámka. Relácia ekvivalencie definovaná rozkladom S množiny A je zjednotením karteziánskych mocnín všetkých tried rozkladu S.

3.6 Relácia usporiadania

V tejto časti sa budeme zaoberať ďalším dôležitým typom binárnych relácií - reláciou usporiadania. Najskôr zavedieme nasledujúcu definíciu.

Definícia Nech *R* je binárna relácia v množine *A*. Budeme hovoriť, že binárna relácia *R* je súvislá (resp. trichotomická), ak pre každé $x, y \in A$ také, že $x \neq y$, platí $[x, y] \in R \vee [y, x] \in R$.

Príklad

Uvažujme nasledujúce binárne relácie definované v množine *N*: $R = \{[x, y] \in N \times N; x < y\}$, $S = \{[x, y] \in N \times N; x$ delí $y\}$. Keďže pre každé $x, y \in N$ také, že $x \neq y$, platí $x < y$ alebo $x > y$, pre každé $x, y \in N$ také, že $x \neq y$, platí $[x, y] \in R \vee [y, x] \in R$. To znamená, že binárna relácia *R* je súvislá.

Naproti tomu binárna relácia *S* súvislá nie je, lebo neplatí pre všetky $x, y \in N$, $x \neq y$, že *x* delí *y* alebo *y* delí *x*. Stačí položiť $x = 2$ a $y = 3$. Potom $x \neq y \wedge$ *x* nedelí *y* $\wedge$ *y* nedelí *x*.

Všimnime si, že binárne relácie *R*, *S* majú niektoré vlastnosti spoločné. Ľahko sa možno presvedčiť, že sú tranzitívne a antisymetrické.

Ukážme, že sú tranzitívne.

Pre všetky $x, y, z \in N$ platí: ak $x < y$ a zároveň $y < z$, potom $x < z$, takže pre všetky $x, y, z \in N$ platí $([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R$. Binárna relácia *R* je tranzitívna.

Pre všetky $x, y, z \in N$ platí ak *x* delí *y* a zároveň *y* delí *z*, potom *x* delí *z*. Čiže pre všetky $x, y, z \in N$ platí$([x, y] \in S \wedge [y, z] \in S) \Rightarrow ([x, y] \in S \wedge [y, z] \in S) \Rightarrow$ a teda binárna relácia *S* je tranzitívna.

Ukážeme, že binárne relácie *R*, *S* sú antisymetrické.

Pre každé $x, y \in N$ také, že $x \neq y$, platí ak $x < y$, potom *y* nie je menšie ako *x*, takže pre každé $x, y \in N$ také, že $x \neq y$, platí $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R$. To znamená, že binárna relácia *R* je antisymetrická.

Pre každé $x, y \in N$ také, že $x \neq y$, platí ak *x* delí *y*, potom *y* nedelí *x*, čiže pre každé $x, y \in N$ také, že $x \neq y$, platí $[x, y] \in S \Rightarrow [y, x] \notin S$. To znamená, že aj binárna relácia *S* je antisymetrická.

Takže binárna relácia *R* je súvislá, antisymetrická a tranzitívna. Binárna relácia *S* je antisymetrická a tranzitívna. Binárna relácia *R* je tzv. úplné usporiadanie množiny *N* a binárna relácia *S* je tzv. čiastočné usporiadanie množiny *N*.

Definícia Binárnu reláciu *R* definovanú v množine *A* nazývame ***čiastočným usporiadaním množiny A***, ak je antisymetrická a tranzitívna. Binárnu reláciu *R* definovanú v množine *A* nazývame úplným usporiadaním množiny *A*, ak je antisymetrická, tranzitívna a súvislá.

Poznámka. Predchádzajúcu definíciu možno podrobnejšie zapísať aj takto: Binárna relácia R definovaná v množine A je čiastočné usporiadanie množiny A, ak pre každé $x, y, z \in A$ platí

1. *ak $x \neq y$ a $[x, y] \in R$, potom $[y, x] \notin R$,*
2. *ak $[x, y] \in R$ a zároveň $[y, z] \in R$, potom $[x, z] \in R$.*
   Naviac, ak pre každé $x, y \in A$ také, že $x \neq y$, platí
3. *$[x, y] \in R \vee [y, x] \in R$, potom R je úplné usporiadanie množiny A.*

Ak binárna relácia *R* je reláciou usporiadania v množine *A*, potom namiesto zápisu $[x, y] \in R$ budeme používať zápis $x \prec y$. Tento zápis čítame „*x* je pred *y*“. Predchádzajúcu definíciu potom možno prepísať aj takto:

Binárna relácia *R* definovaná v množine *A* je **čiastočné usporiadanie množiny *A***, ak pre každé $x, y, z \in A$ platí

1. ak $x \neq y$ a $x \prec y$, potom *y* nie je pred *x*,
2. ak $x \prec y$ a zároveň $y \prec z$, potom $x \prec z$.

Naviac, ak pre každé $x, y \in A$ také, že $x \neq y$, platí

3. $x \prec y$ alebo $y \prec x$, potom *R* je **úplné usporiadanie množiny *A***.

Ak binárna relácia *R* je čiastočné alebo úplné usporiadanie množiny *A*, budeme hovoriť, že množina *A* je čiastočne alebo úplne usporiadaná reláciou *R.* V tomto prípade budeme používať tiež zápis (A, R) resp. $(A, \prec)$. K tomu, aby bola určená usporiadaná množina, musí byť určená okrem samotnej množiny aj príslušná relácia, ktorá je jej usporiadaním. Ak povieme usporiadaná množina, myslíme tým množinu, ktorá je čiastočne alebo úplne usporiadaná. Dve usporiadané množiny sa pritom rovnajú práve vtedy, keď obsahujú tie isté prvky a keď majú to isté usporiadanie.

Usporiadanie číselnej množiny podľa veľkosti čísel je tzv. prirodzené usporiadanie. Namiesto symbolu $\prec$ používame v tomto prípade znak <. Prirodzené usporiadanie je zrejme úplné usporiadanie.

Príklad

Nech $A = \{a, b, c\}$. Utvorte všetky úplné usporiadania množiny *A*.

Riešenie:

Sú to tieto binárne relácie:

$R_1 = \{[a, b], [a, c], [b, c]\}, R_2 = \{[a, c], [a, b], [c, b]\}, R_3 = \{[b, a], [a, c], [b, c]\},$

$R_4 = \{[b, c], [b, a], [c, a]\}, R_5 = \{[c, a], [c, b], [a, b]\},\ R_6 = \{[c, b], [c, a], [b, a]\}.$

V relácii usporiadania R_1 platí $a \prec b \prec c$, v relácii R_2 platí $a \prec c \prec b$, v relácii R_3 platí $b \prec a \prec c$, v R_4 platí $b \prec c \prec a$, v R_5 platí $c \prec a \prec b$ a v R_6 je $c \prec b \prec a$. Môžeme tiež písať $(A, R_1) = \{a, b, c\}, = \{a, b, c\}, = \{a, c, b\}$, $(A, R_2) = \{b, a, c\}, = \{a, c, b\}, = \{b, c, a\}$, $(A, R_3) = \{c, a, b\}, = \{b, a, c\}, = \{c, b, a\}$.

Definícia Nech $(A, \prec)$ usporiadaná množina. Prvok $a \in A$ sa nazýva ***prvý prvok*** množiny *A*, ak pre každý prvok $x \in A, x \neq a$, platí $a \prec x$. Analogicky, prvok $b \in A$ sa nazýva ***posledný prvok*** množiny *A*, ak pre každý prvok $x \in A, x \in A$, platí $x \prec b$.

Poznámka. Ekvivalentne môžeme prvý a posledný prvok definovať takto:

Nech R je usporiadanie množiny A. Prvok $a \in A$ *je prvý prvok množiny A, ak* $\{x \in A; [x, a] \in R\} = \emptyset$
Prvok $b \in A$ *je posledný prvok množiny A, ak*$\{x \in A; [b, x] \in R\} = \{x \in A; [b, x] \in R\} = \emptyset$

Dá sa dokázať, že každá usporiadaná množina má najviac jeden prvý a najviac jeden posledný prvok. Každá konečná množina má prvý a posledný prvok.

Príklad

Uvažujme číselné množiny N, Z, Q, I, R. Nech sú usporiadané prirodzeným usporiadaním. V tomto prípade je prvý prvok najmenšie číslo uvažovanej množiny a posledný prvok je prvok najväčšie číslo uvažovanej množiny. Je zrejmé, že množina *N* má prvý prvok, je ním číslo 1, posledný prvok množina *N* nemá. Množiny Z, Q, I, R nemajú ani prvý, ani posledný prvok.

Príklad

Nech *A* je ľubovoľná neprázdna množina a nech *S* je systém všetkých jej podmnožín. Uvažujme reláciu inklúzie v množine *S*. V predchádzajúcom sme ukázali, že relácia *R* je čiastočné usporiadanie systému množín *S*. Zaujíma nás, či má systém *S* prvý alebo posledný prvok. Keďže pre každé $X \in S$ platí $\emptyset \subset X$, vidíme, že $\emptyset$ je prvý prvok. Posledným prvkom je množina *A*, lebo pre každé $X \in S$ platí $X \subset A$.

Veta Ak binárna relácia *R* je reláciou úplného alebo čiastočného usporiadania množiny *A*, potom aj inverzná relácia R^{-1} je reláciou úplného alebo čiastočného usporiadania množiny *A*.

Dôkaz. Nech *R* je reláciou úplného usporiadania množiny *A*. Dokážeme, že aj inverzná relácia R^{-1} je reláciou úplného usporiadania množiny *A*. K tomu stačí dokázať, že je antisymetrická, tranzitívna a súvislá.

Dokážme najskôr, že je antisymetrická. Treba dokázať, že pre každé $x, y \in A$ platí: ak $x \neq y$ a $[x, y] \in R^{-1}$, potom $[y, x] \notin R^{-1}$.

Nech $x, y \in A$, pričom $x \neq y$ a $[x, y] \in R^{-1}$. Potom $[y, x] \in R$ a keďže podľa predpokladu je binárna relácia *R* antisymetrická, platí $[x, y] \notin R$. To ale znamená, že $[y, x] \notin R^{-1}$. Tým je dokázané, že relácia R^{-1} je antisymetrická.

Dokážme, že je tranzitívna.

Nech $x, y, z \in A$, pričom $[x, y] \in R^{-1}$ a zároveň $[y, z] \in R^{-1}$. Potom

$[y, x] \in R$ a zároveň $[z, y] \in R$. Binárna relácia *R* je podľa predpokladu tranzitívna, a preto $[z, x] \in R$. Podľa definície inverznej relácie dostávame, že $[x, z] \in R^{-1}$. Dokázali sme, že relácia R^{-1} je tranzitívna.

Ostáva dokázať, že relácia R^{-1} je súvislá.

Nech $x, y \in A$, pričom $x \neq y$. Keďže binárna relácia *R* je podľa predpokladu súvislá, platí $[x, y] \in R \vee [y, x] \in R$. Potom podľa definície inverznej relácie dostávame, že $[y, x] \in R^{-1}$ alebo $[x, y] \in R^{-1}$. To ale znamená, že relácia R^{-1} je súvislá. Dôkaz je hotový.

Veta Ak *a* je prvý prvok v úplne usporiadanej množine (A, R), potom *a* je posledný prvok v úplne usporiadanej množine (A, R^{-1}). Ak b je posledný prvok v úplne usporiadanej množine (A, R), potom *b* je prvý prvok v úplne usporiadanej množine (A, R^{-1}).

Dôkaz. Nech *a* je prvý prvok v úplne usporiadanej množine (A, R), t.j. $\{x \in A; [x, a] \in R\} = \emptyset$. Dokážeme, že *a* je posledný prvok v úplne usporiadanej množine (A, R^{-1}). K tomu stačí dokázať, že množina $\{x \in A; [a, x] \in R^{-1}\}$ je prázdna. Podľa definície inverznej relácie dostávame, že $\{x \in A; [a, x] \in R^{-1}\} = \{x \in A; [x, a] \in R\}$. Táto množina je však podľa predpokladu prázdna. Tým je dokázané, že prvok *a* je posledný prvok v úplne usporiadanej množine (A, R^{-1}).

Dôkaz druhého tvrdenia je analogický. Nech b je posledný prvok v úplne usporiadanej množine (A, R), čiže $\{x \in A; [b, x] \in R\} = \emptyset$. Keďže $\{x \in A; [b, x] \in R\} = \{x \in A; [x, b] \in R^{-1}\}$, množina $\{x \in A; [x, b] \in R^{-1}\}$ je prázdna. To však znamená, že prvok *b* je prvý prvok v úplne usporiadanej množine (A, R^{-1}). Dôkaz je hotový.

3.7 Cvičenia

1. Nech $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{a, b\}$. Nájdite $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$.

2. Nech $A = \{0,1,2\}$, $B = \{a, b\}$. Určte $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$.

3. Nech $A = \{1\}$. Nájdite $A \times N$, $N \times A$.

4. Nech $N = \{1,2,3, \dots\}$ a $M = \{a, b\}$. Nájdite $N \times M$, $M \times N$, $N \times N$.

5. Nech $A = \{a, b\}, B = \{0\}$, $C = \{x\}$. Určte $(A \times B) \times C$.

6. Nech $A = \{a, b\}$ a $B = \{0,1\}$ sú množiny. Určte všetky možné binárne relácie z množiny A do množiny B.

7. Nech $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ sú množiny. Nech $R = \{[x, y] \in A \times B; x + 1 = y\}$ je binárna relácia z množiny *A* do množiny *B*. Zapíšte reláciu vymenovaním prvkov.

8. Nájdite prvý a druhý obor binárnych relácií z *A* do *B,* kde

   $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ a $B = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$:

   a) $R = \{[x, y] \in A \times B; x + 2 = y\}$
   b) $R = \{[x, y] \in A \times B; x|y\}$
   c) $R = \{[x, y] \in A \times B; x^2 < y\}$
   d) $R = \{[x, y] \in A \times B; 2x - 1 = y\}$

9. Nech $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ a $B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$. Nájdite doplnkové a inverzné relácie k binárnym reláciám z *A* do *B*:
   a) $R_1 = \{[x, y] \in A \times B; x + 1 = y\}$
   b) $R_2 = \{[x, y] \in A \times B; 2x = y\}$
   c) $R_3 = \{[x, y] \in A \times B; 2x + 1 = y\}$
   d) $R_4 = \{[x, y] \in A \times B; x|y\}$

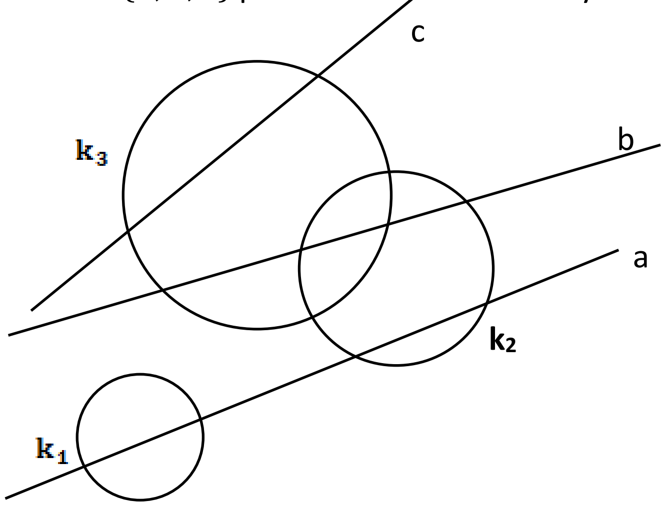
10. Majme reláciu R na množine {1, 2, 3, 4, 5} definovanú takto:
    a) (x, y) ∈ R ⇔ 3|(x − y),
    b) (x, y) ∈ R ⇔ x + y ≤ 6.
    Vymenujte prvky relácie R aj inverznej relácie R^{-1} .

11. Nech $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{3,6,9\}$ sú množiny. Nech $S = \{[2, x], [2, z], [4, y]\}$ je binárna relácia z *A* do *B* a $T = \{[x, 9], [y, 6], [z, 6], [z, 3]\}$ je binárna relácia z množiny *B* do množiny *C*. Určte zloženú reláciu $S \circ T$.

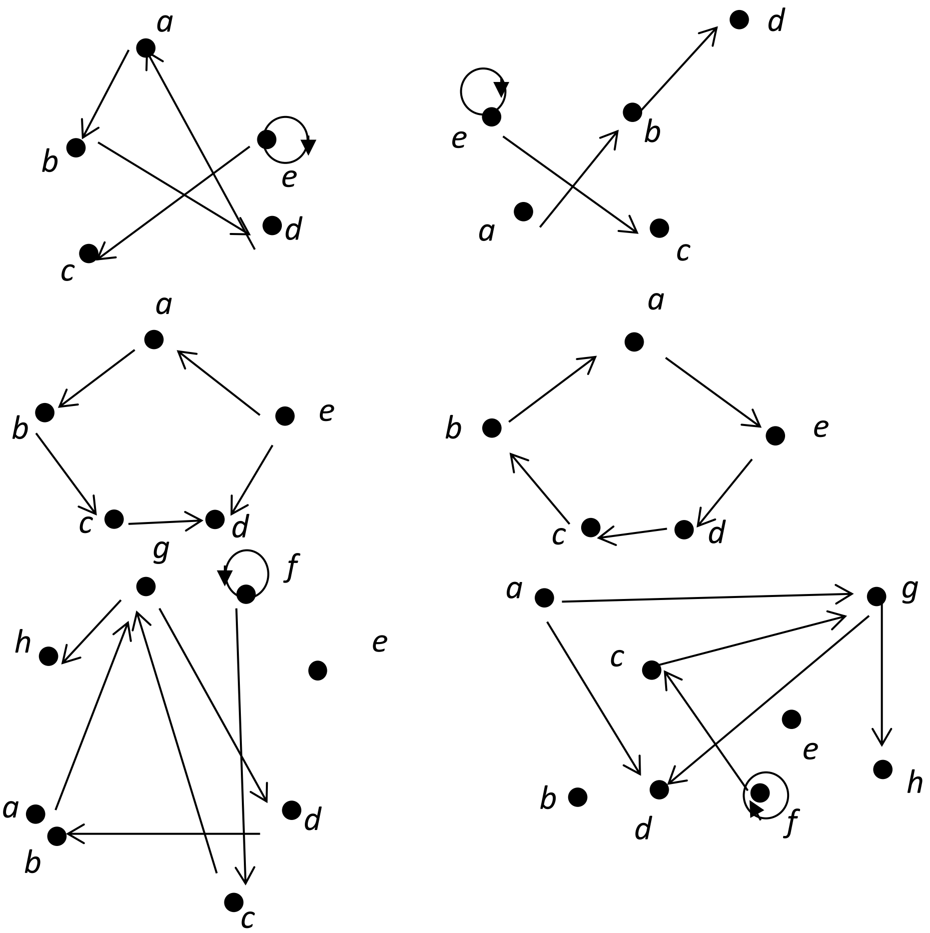
12. Nech $A = \{a, b, c, d\}$. V množine A sú dané relácie $S = \{[a, a], [b, c], [d, c], [d, e]\}$,$T = \{[a, e], [e, a]\}$,$U = \{[b, b], [c, e], [e, d]\}$.

    Vymenovaním prvkov zapíšte relácie $S \circ T$, $T \circ S$, $T \circ T$, $(U \circ S) \circ T$, $S \circ U$, $U \circ (S \circ T)$ a nakreslite ich uzlové grafy.

13. Znázornite karteziánskym a uzlovým grafom reláciu, že priamka z množiny $A = \{a, b, c\}$ pretína kružnicu množiny $B = \{k_1, k_2, k_3\}$.



14. Ktoré dvojice diagramov znázorňujú tú istú reláciu?



15. Daná je množina $A = \{1,2,3,4\}$. Určte aspoň dve binárne relácie v množine A, o ktorých platí, že sú:

a) reflexívne,
b) symetrické,
c) tranzitívne,
d) antireflexívne,
e) antisymetrické,
f) reflexívne a symetrické,
g) reflexívne a tranzitívne,
h) symetrické a tranzitívne,
i) symetrické a antisymetrické,
j) antireflexívne a antisymetrické.

16. Určte vlastnosti binárnych relácií:

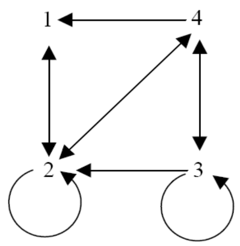
a) $R_1 = \{[x, y] \in N \times N; x|y\}$
b) $R_1 = \{[x, y] \in N \times N; x > y\}$
c) $R_1 = \{[x, y] \in N \times N; x + y \text{ je párne číslo } \}$

17. Sú relácie z úlohy 10 reflexívne, symetrické, antisymetrické, tranzitívne?

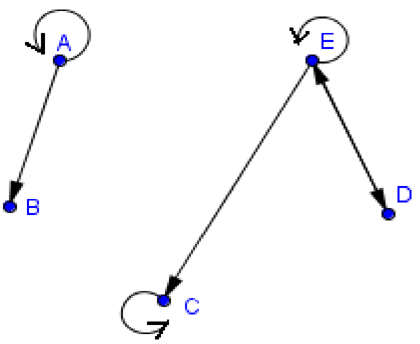
18. Zistite, či relácia R = {(x, y) ∈ A × A : x|(x + y)}, kde A = {1, 2, 3, 5, 6} je reflexívna, symetrická, tranzitívna.

19. Zistite, či relácia ρ je reláciou ekvivalencie na množine A, ak: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ a $\rho = \{[x, y] \in A \times A; 2|(x + y)\}$. Svoje tvrdenie zdôvodnite**.**

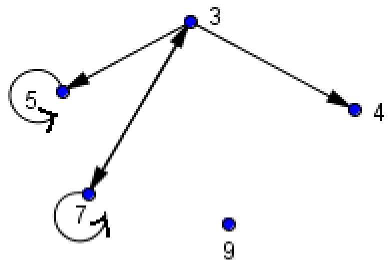
20. Daný je vrcholový diagram relácie *R*. Určte, ktoré vlastnosti relácia *R* má, príp. nemá a prečo: (reflexívna, antireflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna, súvislá)



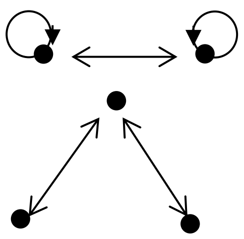
21. Dokreslite do uzlového grafu minimálny počet šípok a slučiek tak, aby relácia R bola reláciou ekvivalencie. Vypíšte všetky prvky relácie.



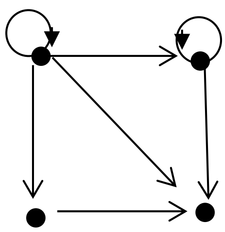
22. Dokreslite do uzlového grafu minimálny počet šípok a slučiek tak, aby relácia R bola reláciou ekvivalencie. Vypíšte všetky prvky relácie.



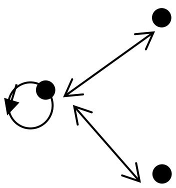
23. Určte, ktoré vlastnosti majú relácie R_1, R_2, R_3, R_4 znázornené na obrázku vrcholovým grafom:



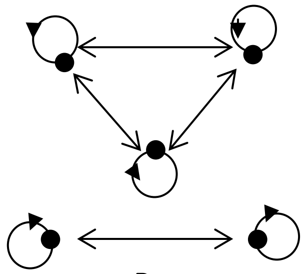
R_1



R_2



R_3



R_4

24. Daná je množina$A = \{m, n, o, p\}$. Nájdite k rozkladu $S = \{\{m\}, \{n, o\}, \{p\}\}$ príslušnú reláciu ekvivalencie.

25. Na množine $A = \{e, f, g, h\}$ je daná binárna relácia
    $R = \{[e, e], [f, f], [f, g], [g, f], [h, h], [g, g]\}$. Zistite, či je relációu ekvivalencie. Ak áno, nájdite rozklad množiny A indukovaný relációu ekvivalencie R. Použite uzlový graf.

26. Utvorte všetky možné rozklady množiny $A = \{t, u, v\}$.

27. Na množine $A = \{3,5,7,9\}$ je daná binárna relácia
    $R = \{[3,3], [5,5], [7,7], [7,9], [9,7], [9,9]\}$**.** Zistite, či je relációu ekvivalencie. Ak áno, nájdite rozklad množiny A indukovaný relációu ekvivalencie R. Použite uzlový graf.

28. Nech $A = \{0,1,2,3\}$. Určte všetky usporiadania množiny *A*.

29. V množine *M*={1,2,3,4} je daná relácia
    R ={[2,3],[3,4],[2,1],[2,4],[4,1],[3,1]}. Zistite, či relácie *R* je úplným usporiadaním v množine *M*.

30. Na množine *N* je definovaná relácia *R* takto:
    $R = \{[x, y] \in R \;\Leftrightarrow x \leq y\}$. Ukážte, že *R* je úplné usporiadanie.

31. Usporiadajte množinu *N* niekoľkými rôznymi spôsobmi.

4 ZOBRAZENIE

Pojem zobrazenia je jedným z najdôležitejších pojmov súčasnej matematiky. Definuje sa už na strednej škole, a to ako špeciálny typ binárnej relácie.

4.1 Zobrazenie ako špeciálny typ binárnej relácie

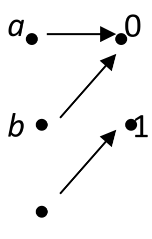
Definícia Nech A, B sú množiny. Binárna relácia $f \subset A \times B$ sa nazýva zobrazenie množiny *A* do množiny *B*, ak ku každému prvku $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $[x, y] \in f$.

Zobrazenie množiny *A* do množiny *B* možno všeobecne chápať ako istý predpis, ktorý každému prvku z množiny *A* priradí práve jeden prvok z množiny *B*. Ak f je zobrazenie množiny *A* do množiny *B*, budeme používať zápis $f: A \to B$ a namiesto zápisu $[x, y] \in f$ budeme písať $f(x) = y$. *x* sa nazýva vzor prvku *y* a *y* sa nazýva vzor prvku *x*. Množina *A* sa nazýva definičný obor zobrazenia $f: A \to B$. Množina $\{y \in B; \exists x \in A: f(x) = y\}$ sa nazýva obor hodnôt zobrazenia $f: A \to B$. Ak $f: A \to A$, hovoríme o zobrazení v množine *A*.

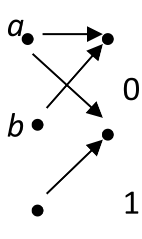
Príklad

Nech $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{0,1\}$. Dané sú binárne relácie $f = \{[a, 0], [b, 0], [c, 1]\}$, $g = \{[a, 0], [a, 1], [b, 0], [c, 1]\}$ z množiny *A* do množiny *B*. Zostrojme uzlové grafy uvedených binárnych relácií.

Riešenie:



f



g

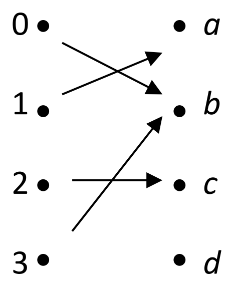
Vidíme, že ku každému prvku $x \in A$ existuje práve jedno $y \in B$ také, že $[x, y] \in f$. To znamená, že binárna relácia $f \subset A \times B$ je zobrazenie množiny *A* do množiny *B*.

Naproti tomu binárna relácia $g \subset A \times B$ nie je zobrazenie množiny *A* do množiny *B*, pretože $[a, 0] \in g$ a zároveň $[a, 1] \in g$.

V nasledujúcom príklade ukážeme rôzne spôsoby zadania zobrazení.

Príklad

a) Nech $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ a $f_1: A \to B$ je zobrazenie definované predpisom $f_1(0) = b$, $f_1(1) = a$, $f_1(2) = c$, $f_1(3) = b$. Uzlový graf zobrazenia f_1 je na nasledujúcom obrázku.



f_1

Pomocou symboliky zaužívanej pri binárnych reláciách môžeme písať, že $f_1 = \{[0, b], [1, a], [2, c], [3, b]\}$.

b) Nech $f_2: N \to N$ je zobrazenie v množine *N* definované predpisom $f_2(x) = x + 1$ pre každé $x \in N$. Potom $f_2 = \{[n, n + 1]; n \in N\}$.

c) Nech $f_3: Z \to \{0,1\}$ je zobrazenie definované predpisom

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, \text{ak } x \text{ je párne;} \\ 1, ak\ x\ je\ nepárne. \end{cases}$$

Potom $f_3 = \{[2k, 0], [2l + 1,1]; k, l \in Z\}$.

Príklad

Zistite, či nasledujúce binárne relácie sú zobrazenia v množine *N*.

a) $f = \{[x, y] \in N \times N; y = x - 1\}$,

b) $g = \{[x, y] \in N \times N; y = 3x - 5\}$,

c) $h = \{[x, y] \in N \times N; y = 3x\}$.

Riešenie:

a) Binárna relácia *f* nie je zobrazenie v množine *N*, lebo prvok $1 \in N$ nemá v množine *N* obraz.

b) Binárna relácia *g* nie je zobrazenie v množine *N*, lebo nie všetky prvky množiny *N* majú obrazy v množine *N*. Prvok $1 \in N$ nemá v množine *N* obraz.

c) Binárna relácia *h* je zobrazenie v množine *N*.

Dôležitá je otázka, kedy sa dve zobrazenia rovnajú. Zobrazenia $f: A \rightarrow B$ a $g: C \rightarrow D$ sa rovnajú (píšeme $f = g$), ak $A = C, B = D$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in A$.

4.2 Bijektívne zobrazenie

Veľký význam má tzv. bijektívne zobrazenie. Tento pojem budeme teraz definovať.

Definícia Zobrazenie $f: A \rightarrow B$ sa nazýva

a) injektívne, ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

b) surjektívne, ak ku každému $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $f(x) = y$;

c) bijektívne, ak je injektívne a zároveň surjektívne.

Poznámka. Namiesto názvu injektívne zobrazenie sa používa aj názov prosté zobrazenie. Ak $f: A \rightarrow B$ je surjektívne zobrazenie, hovoríme, že f je zobrazenie množiny A na množinu B. Predchádzajúcu definíciu možno slovne sformulovať nasledovne: Zobrazenie $f: A \rightarrow B$ je

a) injektívne, ak ku každým dvom rôznym vzorom prislúchajú dva rôzne obrazy;

b) surjektívne, ak každý prvok množiny B má aspoň jeden vzor v množine A.

Príklad

Uvažujme zobrazenia z predchádzajúcich príkladov.

Zobrazenie $f = \{[a, 0], [b, 0], [c, 1]\}$ nie je injektívne, lebo dva rôzne prvky množiny *A* (prvky $a, b \in A$) majú ten istý obraz - prvok $0 \in B$. Zobrazenie $f: A \rightarrow B$ je surjektívne, lebo každý prvok množiny *B* má aspoň jeden vzor v množine *A*.

Zobrazenie $f_1: A \rightarrow B$, $f_1 = \{[0, b], [1, a], [2, c], [3, b]\}$ nie je injektívne, lebo dva rôzne prvky množiny *A* (prvky 0 a 3) majú ten istý obraz - prvok $b \in B$. Toto zobrazenie nie je surjektívne, lebo prvok $d \in B$ nemá vzor v množine *A*.

Zobrazenie $f_2: N \to N, f_2 = \{[n, n+1]; n \in N\}$je injektívne, lebo pre každé $x_1, x_2 \in N$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1$. Zobrazenie f_2 nie je surjektívne, lebo prvok $1 \in N$ nemá vzor v množine *N*.

Zobrazenie $f_3: Z \to \{0,1\}, f_3 = \{[2k, 0], [2l + 1, 1]; k, l \in Z\}$ nie je injektívne, lebo existujú dve rôzne celé čísla x_1, x_2, ktoré majú ten istý obraz. Stačí položiť $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Potom $x_1 \neq x_2$ a zároveň $f_3(x_1) = f_3(x_2) = 0$. Zobrazenie f_3 je surjektívne, lebo každý prvok množiny $\{0,1\}$ má aspoň jeden vzor v množine *Z*.

Zobrazenie *h;* $h = \{[x, y] \in N \times N; y = 3x\}$ je injektívne zobrazenie. Pre každé $x_1, x_2 \in N$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2$. Zobrazenie *h* nie je surjektívne, lebo napríklad prvok $2 \in N$ nemá vzor v množine *N*. Neexistuje prirodzené číslo *x* také, že $3x = 2$.

Príklad

Nech zobrazenie $f: R \to R$ je definované predpisom $f(x) = x^2$ pre každé $x \in R$. Zobrazenie *f* nie je injektívne, lebo existujú dve rôzne reálne čísla x_1, x_2, ktoré majú ten istý obraz. Stačí položiť $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Potom $x_1 \neq x_2$ a zároveň $f(x_1) = f(x_2) = 1$. Zobrazenie *f* nie je surjektívne, lebo výrok „ku každému $y \in R$ existuje $x \in R$ také, že $x^2 = y$" nie je pravdivý. Stačí položiť $y = -1$.

Špeciálnym prípadom zobrazenia je tzv. ***identické zobrazenie***. Budeme ho označovať symbolom *I*. Identické zobrazenie v množine *A* je zobrazenie $I: A \to A$ definované predpisom $I(x) = x$ pre každé $x \in A$. V terminológii binárnych relácií, identické zobrazenie obsahuje len usporiadané dvojice $[x, x]$, kde $x \in A$, t.j. $I = \{[x, x]; x \in A\}$. Dá sa ľahko overiť, že identické zobrazenie je bijektívne zobrazenie. Ďalším špeciálnym prípadom zobrazenia je tzv. permutácia. Permutáciou množiny *A* nazývame ľubovoľné bijektívne zobrazenie v množine *A*. Identické zobrazenie je špeciálnym prípadom permutácie.

Príklad

Nájdime všetky permutácie množiny $A = \{a, b, c\}$. Podľa definície treba nájsť všetky bijektívne zobrazenia $f: A \to A$. Keďže identické zobrazenie je bijektívne zobrazenie, jednou z permutácií množiny $A = \{a, b, c\}$ je identické zobrazenie v množine *A*. Môžeme ho zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$f_1 = I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Pod prvky množiny *A* sme zapísali ich obrazy. Ďalšie bijektívne zobrazenia v množine *A* sú tieto zobrazenia:

$$f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix},$$

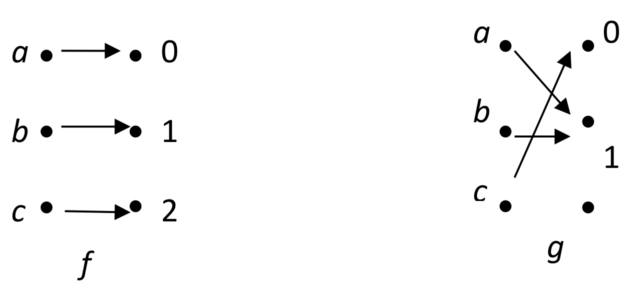
$$f_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Prirodzenou otázkou je, koľko existuje permutácií *n*-prvkovej množiny. Počet všetkých permutácií *n*-prvkovej množiny označme symbolom P_n. V predchádzajúcom príklade sme hľadali všetky permutácie trojprvkovej množiny a videli sme, že ich počet je $P_3 = 6$. K tomuto číslu môžeme dospieť nasledujúcou úvahou. Vytvárame usporiadané trojice prvkov a, b, c. Prvé miesto možno pritom obsadiť 3 spôsobmi, pre obsadenie druhého miesta máme 2 možnosti a pre obsadenie tretieho miesta máme 1 možnosť. Prvé dve miesta možno obsadiť $3 \cdot 2 = 6$ spôsobmi a všetky tri miesta možno obsadiť $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ spôsobmi. Teda $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Túto úvahu možno zovšeobecniť pre ľubovoľnú *n*-prvkovú množinu. Prvé miesto možno obsadiť *n* spôsobmi, pre obsadenie druhého miesta máme *n* - 1 možností, pre obsadenie tretieho miesta máme *n* - 2 možností, atď. až pre *n*-té miesto máme 1 možnosť. Všetkých *n* miest možno obsadiť $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ spôsobmi. Tento súčin sa zvykne označovať znakom $n!$ (čítame *n* faktoriál). Platí teda $P_n = n!$.

4.3 Inverzné zobrazenie

Príklad

Nech $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{0,1,2\}$. Dané sú binárne relácie $f = \{[a, 0], [b, 1], [c, 2]\}$ a $g = \{[a, 1], [b, 1], [c, 0]\}$ z množiny *A* do množiny *B*. Zostrojme uzlové grafy uvedených binárnych relácií.



Obr. 4.1 Uzlové grafy binárnych relácií *f* a *g*

Ľahko sa nahliadne, že obe binárne relácie sú zobrazenia z množiny *A* do množiny *B*. Pritom platí, že zobrazenie *f* je injektívne a zároveň surjektívne, a teda je bijektívne. Zobrazenie *g* nie je injektívne ani surjektívne, a teda nie je bijektívne. Pretože *f* a *g* sú binárne relácie, možno k nim utvoriť inverzné relácie. Sú to tieto binárne relácie:

$f^{-1} = \{[0, a], [1, b], [2, c]\}$, $g^{-1} = \{[1, a], [1, b], [0, c]\}$.

Vidíme, že inverzná relácia $f^{-1} \subset B \times A$ je zobrazenie množiny *B* do množiny *A*, zatiaľ čo relácia $g^{-1} \subset B \times A$ zobrazenie nie je (k prvku $1 \in B$ sú priradené dva rôzne prvky množiny *A*).

Platí nasledujúca veta.

Veta Ak $f: A \to B$ je bijektívne zobrazenie, potom relácia $f^{-1}: B \to A$ je tiež bijektívne zobrazenie.

Dôkaz. Nech $f: A \to B$ je bijektívne zobrazenie.

Dokážeme najskôr, že relácia $f^{-1} = \{[x, y] \in B \times A; [y, x] \in f\}$ je zobrazenie. Treba dokázať, že ku každému prvku $x \in B$ existuje práve jedno $y \in A$ také, že $[x, y] \in f^{-1}$. Nech $x \in B$. Keďže $f: A \to B$ je surjektívne zobrazenie, existuje $y \in A$ také, že $f(y) = x$, t.j. $[y, x] \in f$. To je ale práve vtedy, keď $[x, y] \in f^{-1}$. Predpokladajme, že existujú dva prvky $y_1, y_2 \in A$, $y_1 \neq y_2$, také, že $[x, y_1] \in f^{-1}$ a zároveň $[x, y_2] \in f^{-1}$. Potom platí, že $[y_1, x] \in f$ a zároveň $[y_2, x] \in f$, čiže $f(y_1) = f(y_2) = x$. Dostávame spor s predpokladom, že *f* je injektívne zobrazenie. Ku každému prvku $x \in B$ existuje teda práve jedno $y \in A$ také, že $[x, y] \in f^{-1}$, takže $f^{-1}: B \to A$ je zobrazenie.

Dokážme, že zobrazenie $f^{-1}: B \to A$ je injektívne zobrazenie. Treba dokázať, že pre každé $x_1, x_2 \in B$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Rightarrow f^{-1}(x_1) \neq f^{-1}(x_2)$. Nech to neplatí, t.j. existujú také dva prvky $x_1, x_2 \in B$, $x_1 \neq x_2$, pre ktoré platí $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$. Potom ale

$[x_1, y] \in f^{-1}$ a zároveň $[x_2, y] \in f^{-1}$. Odtiaľ dostávame, že $[y, x_1] \in f$ a zároveň $[y, x_2] \in f$. To je však spor s predpokladom, že *f* je zobrazenie.

Zostáva dokázať, že zobrazenie $f^{-1}: B \to A$ je surjektívne. Treba dokázať, že ku každému $y \in A$ existuje $x \in B$ také, že $f^{-1}(x) = y$. Nech $y \in A$. Pretože $f: A \to B$ je zobrazenie, existuje $x \in B$ také, že $[y, x] \in f$. To je ale práve vtedy, keď $[x, y] \in f^{-1}$. Posledný zápis však vyjadruje, že $f^{-1}(x) = y$. Dôkaz je hotový.

4.4 Zložené zobrazenie

Pretože každé zobrazenie je binárna relácia, má zmysel skladať dve zobrazenia.

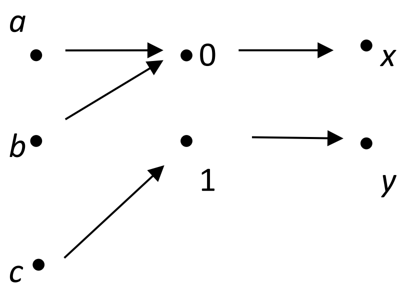
Definícia Nech $f: A \to B$ a $g: B \to C$ sú zobrazenia. Potom zobrazenie $g \circ f: A \to C$ definované vzťahom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pre každé $x \in A$ sa nazýva zložené zobrazenie zo zobrazení *f* a *g*.

Poznámka. Namiesto názvu zložené zobrazenie zo zobrazení *f* a *g* sa používa aj názov kompozícia zobrazení *f* a *g*. Pri zloženom zobrazení $g \circ f$ najskôr aplikujeme zobrazenie *f* a potom zobrazenie *g*. Z definície zloženého zobrazenia vyplýva, že zložené zobrazenie zo zobrazení *f* a *g* je možné definovať len vtedy, keď obor hodnôt zobrazenia *f* je podmnožinou definičného oboru zobrazenia *g*.

Definíciu zloženého zobrazenia budeme ilustrovať na nasledujúcich príkladoch.

Príklad

Nech $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0,1\}$, $C = \{x, y\}$, $f = \{[a, 0], [b, 0], [c, 1]\}$ je zobrazenie množiny *A* do množiny *B* a $g = \{[0, x], [1, y]\}$ je zobrazenie množiny *B* do množiny *C*. Nájdime zložené zobrazenie $g \circ f$. Pre lepšiu názornosť zostrojme uzlové grafy daných zobrazení.



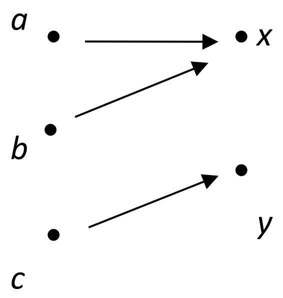
Obr. 4.2. Uzlové grafy zobrazení *f* a *g*

Zložené zobrazenie $g \circ f$ je zobrazenie množiny *A* do množiny *C*. Podľa definície dostávame:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(0) = x, (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(0) = x,$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(1) = y.$$

Uzlový graf zobrazenia $g \circ f$ je na nasledujúcom obrázku.



$g \circ f$

Obr. 4.3. Uzlový graf zobrazenia $g \circ f$

Príklad

V množine N sú definované zobrazenia f a g predpismi $f(x) = 2x$ pre každé $x \in N$ a $g(x) = x + 1$ pre každé $x \in N$. Nájdime zložené zobrazenia $g \circ f$ a $f \circ g$.

Nech $x \in N$. Potom

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1$,

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$.

Poznámka. Z predchádzajúceho príkladu vyplýva, že pre skladanie zobrazení neplatí komutatívny zákon, t.j. existujú také zobrazenia f a g, že $g \circ f \neq f \circ g$.

Príklad

Nech v množine všetkých reálnych čísel sú definované binárne relácie f a g nasledujúcimi predpismi: $f = \{[x, x^2 + x]; x \in R\}$, $g = \{[x, 3x + 4]; x \in R\}$. Ľahko sa nahliadne, že dané binárne relácie sú zobrazenia v množine všetkých reálnych čísel. Možno ich zapísať aj nasledovne:

$f: R \to R$, $f(x) = x^2 + x$ pre každé $x \in R$,

$g: R \to R$, $g(x) = 3x + 4$ pre každé $x \in R$.

Nájdime zložené zobrazenia $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ a $g \circ g$.

Nech $x \in R$. Potom

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = 3(x^2 + x) + 4 = 3x^2 + 3x + 4$,

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 4) = (3x + 4)^2 + 3x + 4 = 9x^2 + 27x + 20$,

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 + x) &= (x^2 + x)^2 + x^2 + x \\
&= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x, (g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(3x + 4) \\
&= 3(3x + 4) + 4 = 9x + 16.
\end{aligned}
$$

Príklad

Nech $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & e & c & a & d \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & b & e & a & c \end{pmatrix}$ sú permutácie množiny $A = \{a, b, c, d, e\}$. Nájdite inverzné permutácie f^{-1}, g^{-1} a zložené permutácie $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ a $g \circ g$.

Riešenie. Platí $f: A \to A$, $f(a) = b, f(b) = e, f(c) = c, f(d) = a$, $f(e) = d$. Keďže $f = \{[a, b], [b, e], [c, c], [d, a], [e, d]\}$, pre inverznú permutáciu f^{-1} platí $f^{-1} = \{[b, a], [e, b], [c, c], [a, d], [d, e]\}$.

Pre permutáciu *g* platí $g: A \to A$, $g(a) = d, g(b) = b, g(c) = e, g(d) = a, g(e) = c$. Keďže $g = \{[a, d], [b, b], [c, e], [d, a], [e, c]\}$, dostávame, že $g^{-1} = \{[d, a], [b, b], [e, c], [a, d], [c, e]\}$. Inverzné permutácie f^{-1}, g^{-1} môžeme zapísať aj v nasledujúcom tvare:

$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & a & c & e & b \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & b & e & a & c \end{pmatrix}$.

Počítajme:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = b, (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(e) = c,$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(c) = e, (g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(a) = d,$$

$$(g \circ f)(e) = g(f(e)) = g(d) = a.$$

Z predchádzajúcich rovností vyplýva, že

$$g \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & e & d & a \end{pmatrix}.$$

Keďže

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(d) = a, (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(b) = e,$$

$$(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(e) = d, (f \circ g)(d) = f(g(d)) = f(a) = b,$$

$$(f \circ g)(e) = f(g(e)) = f(c) = c,$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & e & d & b & c \end{pmatrix}.$$

Analogicky nájdeme zložené permutácie $f \circ f$ a $g \circ g$:

$(f \circ f)(a) = f(f(a)) = f(b) = e, (f \circ f)(b) = f(f(b)) = f(e) = d,$

$(f \circ f)(c) = f(f(c)) = f(c) = c, (f \circ f)(d) = f(f(d)) = f(a) = b,$

$(f \circ f)(e) = f(f(e)) = f(d) = a,$ t.j.

$$f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & cd & e \\ e & d & cb & a \end{pmatrix}.$$

$(g \circ g)(a) = g(g(a)) = g(d) = a, (g \circ g)(b) = g(g(b)) = g(b) = b,$

$(g \circ g)(c) = g(g(c)) = g(e) = c, (g \circ g)(d) = g(g(d)) = g(a) = d,$

$(g \circ g)(e) = g(g(e)) = g(c) = e,$ a teda

$$g \circ g = \begin{pmatrix} a & b & cd & e \\ a & b & cd & e \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že zložená permutácia $g \circ g$ je identické zobrazenie v množine *A*.

Veta: Nech $f: A \to B$ a $g: B \to C$ sú zobrazenia.

a) Ak *f* a *g* sú injektívne, potom aj zložené zobrazenie $g \circ f$ je injektívne.

b) Ak *f* a *g* sú surjektívne, potom aj zložené zobrazenie $g \circ f$ je surjektívne.

c) Ak *f* a *g* sú bijektívne, potom aj zložené zobrazenie $g \circ f$ je bijektívne.

Dôkaz.

Nech $f: A \to B$ a $g: B \to C$ sú injektívne zobrazenia. Treba

dokázať, že zobrazenie $g \circ f: A \to C$ je injektívne, t.j. že pre každé platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.

Nech $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$. Keďže zobrazenie $f: A \to B$ je podľa predpokladu injektívne, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$. Označme $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Potom $y_1, y_2 \in B$, $y_1 \neq y_2$. Podľa predpokladu je zobrazenie $g: B \to C$ injektívne, a preto platí $g(y_1) \neq g(y_2)$. Keďže $g(y_1) = g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1)$ a $g(y_2) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$, dôkaz je hotový.

b) Nech $f: A \to B$ a $g: B \to C$ sú surjektívne zobrazenia. Treba dokázať, že zobrazenie $g \circ f: A \to C$ je surjektívne, t.j. že ku každému $z \in C$ existuje $x \in A$ také, že $(g \circ f)(x) = z$.

Nech $z \in C$. Podľa predpokladu je zobrazenie $g: B \to C$ surjektívne, a preto existuje $y \in B$ také, že $g(y) = z$. Keďže zobrazenie $f: A \to B$ je podľa predpokladu surjektívne, existuje $x \in A$ také, že $f(x) = y$. Potom ale $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. To znamená, že zobrazenie $g \circ f: A \to C$ je surjektívne.

c) Táto vlastnosť je bezprostredným dôsledkom predchádzajúcich dvoch vlastností.

4.5 Cvičenia

1. Nech $A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,3\}$. Určte všetky zobrazenia množiny A do množiny B.

2. Sú dané množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0,1,2\}$ a zobrazenie $f: A \to B$, ktoré je definované nasledovne: $f = \{[a, 1], [b, 1][c, 0]\}$. Zistite, či relácia $f^{-1} \subset BxA$ je tiež zobrazením.

3. Sú dané množiny $A = \{1,2,3,4\}$ a $B = \{a, b, c\}$. Nájdite:
   a) aspoň 5 zobrazení z množiny A do množiny B,
   b) aspoň 5 zobrazení z množiny B do množiny A,
   c) aspoň 3 zobrazenia v množine A.

4. Sú dané množiny $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a, b, c\}$ a $C = \{x, y, z\}$. Nájdite:
   a) zobrazenie z množiny A do množiny B, ktoré je surjektívne,
   b) zobrazenie z množiny A do množiny B, ktoré je injektívne,
   c) zobrazenie z množiny B do množiny A, ktoré je surjektívne,
   d) zobrazenie z množiny B do množiny A, ktoré je injektívne,
   e) zobrazenie z množiny B do C, ktoré je bijektívne,
   f) zobrazenie z množiny B do C, ktoré nie je bijektívne.

5. Nech $A = \{1,2,3,4,5\}$. Nájdite nejakú množinu B a nejakú reláciu f tak, aby relácia f ⊂ AxB :
   a) bola injektívnym zobrazením a nie surjektívnym,
   b) bola surjektívnym zobrazením a nie injektívnym,
   c) bola bijektívnym zobrazením,
   d) nebola zobrazením.

   K časti c) zostrojte inverzné zobrazenie.

6. Uvažujme o zobrazení $f: N \to N$, ktoré je definované predpisom

   f(x) = x+1 pre všetky prirodzené čísla. Zistite, či zobrazenie je bijektívne.

7. Nájdite všetky permutácie množiny $A = \{a, b, c\}$.

8. Zistite, či dané zobrazenie je injektívne, surjektívne, bijektívne:
   a) $f: N \to N: f(n) = 2n$,
   b) $g: Z \to Z: g(x) = x - 1$,
   c) $h: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \langle -1,1 \rangle: h(x) = \sin x$
   d) $f: R \to \langle -1,1 \rangle: f(x) = \cos x$
   e) $g: N \times N \to R: g(x,y) = \frac{x}{y}$
   f) $h: N \to N \times N: f(n) = (2n, n)$
   g) $f: Z \times Z - \{0\} \to Q: f(x,y) = \frac{x}{y}$

9. Daná je binárna relácia R z množiny A do množiny B. $A = \{1,2,3,4\}, B = \{a, b, c, d, e\}, R = \{[1, a][2, b][3, e][4, d][4, c]\}$

   Označte pravdivé tvrdenia:

   a) R nie je zobrazenie z množiny A do množiny B.

   b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B.

   c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B.

   d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B.

   Svoje tvrdenie zdôvodnite.

10. Priraďte k zobrazeniam inverzné zobrazenia

$f = \{[1,1],[2,2],[3,3]\}$,	$f^{-1} = \{[1,2],[2,3],[3,1]\}$,
$f = \{[1,3],[2,2],[3,1]\}$,	$f^{-1} = \{[1,3],[2,2],[3,1]\}$,
$f = \{[1,2],[2,3],[3,1]\}$,	$f^{-1} = \{[1,1],[2,2],[3,3]\}$,
$f = \{[1,3],[2,1],[3,2]\}$,	$f^{-1} = \{[1,3],[2,1],[3,3]\}$,

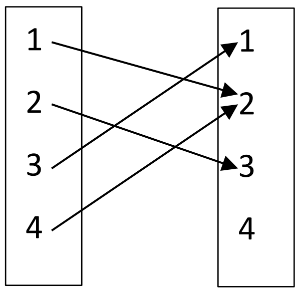
11. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B. Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica [2,?] patrila zobrazeniu f^{-1}? A={1,2,4,5}, B={1,2,4,5}, $f = \{[1,3],[2,4],[3,5],[4,1],[5,2]\}$

12. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B. Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica [2,?] patrila zobrazeniu $f \circ f^{-1}$? A={1,2,4,5}, B={1,2,4,5}, $f = \{[1,3],[2,4],[3,5],[4,1],[5,2]\}$

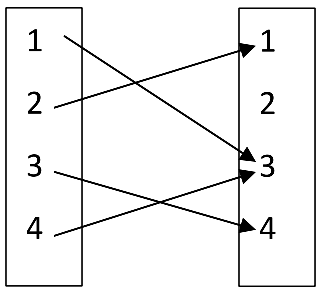
13. Nech A={1,2,4,5}, B={a,b,c,d},C={x,y,z}. Nech f:A→B a g:B→C sú zobrazenia dané takto: f={[1,a],[2,c],[4,d],[5,b]}, g={[a,x],[b,y],[c,y],[d,z]}. Určte g∘f a o všetkých troch zobrazeniach(f, g a g∘f) rozhodnite, ktoré je injektívne, surjektívne, resp. bijektívne.

14. Na obrázku sú grafy zobrazení f, g. Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica [3,?] patrila zloženému zobrazeniu $f \circ g$?

f



g



5 MATEMATICKÉ VETY A ICH DÔKAZY

Vedecké poznatky o objektoch, ktoré matematika študuje, sa vyjadrujú tzv. matematickými vetami. Za matematickú vetu sa pritom považuje iba výrok, ktorého pravdivosť je dokázaná a ktorý prináša závažné teoreticko - matematické poznatky. V ďalšom sa budeme zaoberať stavbou matematickej vety a uvedieme najpoužívanejšie dôkazy matematických viet, ktorými sú priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom, dôkaz matematickou indukciou a dôkaz preverením všetkých možností. Niektoré matematické vety možno dokázať aj pomocou kontrapríkladu. Niekedy sa môže použiť aj tzv. existenčný dôkaz alebo Dirichletov princíp.

5.1 Stavba matematickej vety

Uvedieme najskôr niekoľko príkladov matematických viet.

1. Ak je prirodzené číslo deliteľné štyrmi, potom je deliteľné aj dvomi.
2. Ak je súčin dvoch celých čísel nepárne číslo, potom je ich súčet párne číslo.
3. Súčet dvoch párnych čísel je párne číslo.
4. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.
5. Číslo log 23 nie je racionálne.
6. $\forall a, b \in R: (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
7. Pre každé dve množiny *A*, *B* platí: $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
8. Existuje nekonečne mnoho prvočísel.
9. $\forall a, b \in R: |a+b| \leq |a| + |b|$

Z uvedených príkladov vyplýva, že matematické vety môžu mať rôznu stavbu. Často majú tvar implikácie. Príkladmi takýchto viet sú vety 1. a 2. Pozrime sa bližšie na stavbu niektorých z uvedených viet.

Uvažujme vetu „Ak je prirodzené číslo deliteľné štyrmi, potom je deliteľné aj dvomi.“ Keďže výroková forma $4/x \Rightarrow 2/x$ je zrejme pravdivá pre každé prirodzené číslo x, uvažovanú vetu môžeme sformulovať aj nasledovne:

„Pre každé prirodzené číslo *x* platí: ak je *x* deliteľné štyrmi, potom je *x* deliteľné aj dvomi.“

Pomocou matematickej symboliky môžeme uvažovanú vetu zapísať v tvare $\forall x \in N$: $4/x \Rightarrow 2/x$.

Vetu č. 2. môžeme symbolicky zapísať v tvare

$\forall x, y \in Z: x \cdot y$ je nepárne $\Rightarrow x + y$ je párne.

Všimnime si, že aj vety z príkladov 3., 4. a 5. môžeme sformulovať v tvare implikácie. Vetu z príkladu 3. môžeme sformulovať nasledovne:

„Pre ľubovoľné celé čísla x, y platí: ak x, y sú párne čísla, potom aj $x + y$ je párne číslo."

Vetu č. 4. môžeme sformulovať tiež takto:

„Pre každé racionálne číslo *x* platí: $x \neq \sqrt{2}$."

Symbolicky môžeme písať $\forall x \in Q: x \neq \sqrt{2}$.

Uvažovanú vetu môžeme zapísať aj v tvare implikácie, a to nasledovne:

$\forall x \in R: x \in Q \Rightarrow x \neq \sqrt{2}$.

Vetu č. 5. môžeme zapísať v tvare implikácie takto:

$\forall x \in R: x \in Q \Rightarrow x \neq log\, 2\, 3$.

Ako však vidíme z nasledujúcich príkladov, existujú aj matematické vety, ktoré nemajú tvar implikácie. Matematické vety sa často vyskytujú aj v tvare $\forall x \in D$: $V(x)$. Samozrejme, namiesto výrokovej formy $V(x)$ môžu v takýchto vetách vystupovať aj výrokové formy s viacerými premennými.

V ďalšom sa budeme najskôr zaoberať vetami, ktoré majú tvar implikácie. Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že výrokové formy vystupujúce v týchto vetách sú výrokové formy s jednou premennou. V takomto prípade môžeme matematickú vetu zapísať v nasledujúcom tvare:

$$\forall x \in D: A(x) \Rightarrow B(x).$$

V tejto vete je $A(x)$ predpoklad vety a $B(x)$ je tvrdenie vety. Hovoríme, že $A(x)$ je postačujúcou podmienkou pre $B(x)$ a že $B(x)$ je nutnou podmienkou pre $A(x)$.

Rozdiel medzi nutnou a postačujúcou podmienkou budeme ilustrovať na príklade 1. Vo vete $\forall x \in N$: $4/x \Rightarrow 2/x$ je postačujúcou podmienkou k tomu, aby bolo číslo *x* deliteľné dvomi, podmienka $A(x)$: $4/x$, podmienka $B(x)$: $2/x$ je nutnou podmienkou pre $A(x)$. Danú vetu môžeme sformulovať nasledujúcimi spôsobmi:

„Postačujúcou podmienkou k tomu, aby prirodzené číslo *x* bolo deliteľné dvomi je, aby bolo *x* deliteľné štyrmi.“

„Nutnou podmienkou k tomu, aby prirodzené číslo *x* bolo deliteľné štyrmi je, aby bolo *x* deliteľné dvomi.“

Všimnime si, že podmienka $A(x)$: 4/*x* nie je nutnou podmienkou pre $B(x)$. Číslo *x* môže byť deliteľné dvomi, ale *x* nemusí byť nutne deliteľné štyrmi. Stačí položiť $x = 2$.

Ak má matematická veta tvar $\forall x \in D: A(x) \Rightarrow B(x)$, zaujíma nás, či platí aj obrátená implikácia, teda výrok

$$\forall x \in D: B(x) \Rightarrow A(x).$$

Ako vyplýva z predchádzajúceho príkladu, obrátená implikácia nemusí vždy platiť. Ak však platí obrátená implikácia, potom má matematická veta tvar

$$\forall x \in D: A(x) \Leftrightarrow B(x).$$

Hovoríme, že $A(x)$ je nutnou a postačujúcou podmienkou pre $B(x)$.

Príklad

Ľahko sa presvedčíme o tom, že obrátenie vety „Súčet dvoch párnych čísel je párne číslo.“ neplatí. Sformulujme túto vetu najskôr v tvare implikácie: „Pre ľubovoľné celé čísla *x*, *y* platí: ak *x*, *y* sú párne čísla, potom aj $x + y$ je párne číslo.“ Obrátením tejto vety je výrok „Pre ľubovoľné celé čísla *x*, *y* platí: ak $x + y$ je párne číslo, potom *x*, *y* sú párne čísla.“ Tento výrok je nepravdivý, stačí položiť napr. $x = 3$ a $y = 1$. Súčet $x + y$ je párne číslo, ale *x*, *y* nie sú párne čísla. To znamená, že obrátenie danej matematickej vety nie je matematická veta.

V závere tejto časti zavedieme ešte jeden pojem.

Obmenenou vetou k vete $\forall x \in D: A(x) \Rightarrow B(x)$ nazývame vetu

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}:\ B'(x) \Rightarrow \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}).$$

Na základe tautológie $\forall x \in D: [A(x) \Rightarrow B(x)] \Leftrightarrow [B'(x) \Rightarrow A'(x)]$ vety (1) a (2) sú ekvivalentné, a teda majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Príklad

K danej matematickej vete sformulujte obmenenú vetu a jej obrátenie. Rozhodnite o pravdivostnej hodnote obrátenia.

a) „Pre každé dve celé čísla platí: ak je ich súčin nepárne číslo, potom je ich súčet párne číslo."

b) „Pre každý štvoruholník platí: ak je obdĺžnik, potom mu možno opísať kružnicu."

c) „Pre každú kvadratickú rovnicu platí: ak má tvar $ax^2 + bx = 0$, pričom $a \neq 0$, potom aspoň jeden jej koreň sa rovná nule."

Riešenie:

a) Obmenenou vetou k danej vete je veta „Pre každé dve celé čísla platí: ak je ich súčet nepárne číslo, potom je ich súčin párne číslo." a jej obrátením je výrok „Pre každé dve celé čísla platí: ak je ich súčet párne číslo, potom je ich súčin nepárne číslo." Tento výrok je nepravdivý, lebo existujú také dve celé čísla, pre ktoré platí, že ich súčet je párne číslo a ich súčin je párne číslo. Stačí položiť $x = 2$ a $y = 4$.

b) Obmenenou vetou k tejto vete je veta „Pre každý štvoruholník platí: ak mu nemožno opísať kružnicu, potom nie je obdĺžnik." Jej obrátenie je výrok „Pre každý štvoruholník platí: ak mu možno opísať kružnicu, potom je obdĺžnik." Je to nepravdivý výrok, lebo aj štvorec je štvoruholník a pritom mu možno opísať kružnicu.

c) Obmenenou vetou k danej vete je veta „Pre každú kvadratickú rovnicu platí: ak sú jej korene nenulové, potom $ax^2 + bx \neq 0$, pričom $a \neq 0$." Obrátením danej vety je výrok „Pre každú kvadratickú rovnicu platí: ak aspoň jeden jej koreň sa rovná nule, potom má tvar $ax^2 + bx = 0$, pričom $a \neq 0$." Tento výrok je pravdivý.

5.2 Priamy dôkaz

Priamy dôkaz je najčastejšie používaným dôkazom v školskej matematike. Najskôr budeme predpokladať, že matematická veta má tvar

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}: \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$.

Priamy dôkaz vety je založený na tautológii

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}: [(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})) \wedge (\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))] \Rightarrow [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})]$**.**

Uvedenú tautológiu môžeme stručnejšie zapísať aj nasledovne:

$\forall x \in D: [A(x) \Rightarrow C(x) \Rightarrow B(x))] \Rightarrow [A(x) \Rightarrow B(x)]$.

Uvedená tautológia vyjadruje tú skutočnosť, že ak pre $\forall x \in D$ platí $A(x) \Rightarrow C(x)$ a zároveň $C(x) \Rightarrow B(x)$, potom pre $\forall x \in D$ platí tiež, že $A(x) \Rightarrow B(x)$. Môžeme ju zovšeobecniť na takýto reťazec implikácií:

$\forall x \in D: [(A(x) \Rightarrow C_1(x)) \wedge (C_1(x) \Rightarrow C_2(x)) \wedge \ldots \wedge (C_n(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow A(x)$
$\Rightarrow B(x)]$.

Môžeme použiť aj nasledujúci stručnejší zápis:

$\forall x \in D: [A(x) \Rightarrow C_1(x) \Rightarrow C_2(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow$

$\Rightarrow [A(x) \Rightarrow B(x)]$.

Tento reťazec implikácií je tiež tautológiou predikátovej logiky.

Pri priamom dôkaze postupujeme nasledujúcim spôsobom:

Zostavíme reťazec pravdivých implikácii

$\forall x \in D: A(x) \Rightarrow C_1(x)$

$\forall x \in D: C_1(x) \Rightarrow C_2(x)$

$\vdots$

$\vdots$

$\forall x \in D: C_n(x) \Rightarrow B(x)$

Na základe tohto reťazca pravdivých implikácii dostávame záver, že pre $\forall x \in D$: $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Príklad

Ak je prirodzené číslo deliteľné štyrmi, potom je deliteľné aj dvomi. Dokážte.

Riešenie:

Treba dokázať tvrdenie $\forall x \in N$: 4/*x* ⇒ 2/*x*.

Pre $\forall x \in N$ platí

4/*x* ⇒ $x = 4k, k \in N \Rightarrow x = 2 \cdot (2k) = 2m, m \in N \Rightarrow 2/x$

Označme v predchádzajúcom reťazci pravdivých implikácii $A(x)$: 4/*x*, $C_1(x): x = 4k, k \in N$, $C_2(x): x = 2 \cdot (2k) = 2m, m \in N$, $B(x)$: 2/*x*.

Keďže výrok

$\forall x \in N: [A(x) \Rightarrow C_1(x) \Rightarrow C_2(x) \Rightarrow B(x))] \Rightarrow [A(x) \Rightarrow B(x)]$ je tautológia predikátovej logiky, o čom sa čitateľ ľahko môže presvedčiť, tvrdenie je dokázané.

Analogicky sa postupuje aj v prípade, že vo vete (1) vystupujú výrokové formy s viacerými premennými.

Príklad

Dokážte, že súčin párneho a nepárneho čísla je párne číslo.

Riešenie:

Treba dokázať nasledujúce tvrdenie: $\forall x, y \in Z$: (*x* je párne$\wedge$ *y* je nepárne) $\Rightarrow x \cdot y$ je párne.

Pre $\forall x, y \in Z$ platí (*x* je párne $\wedge$ *y* je nepárne)$\Rightarrow (x = 2k, k \in Z \wedge y = 2l - 1, l \in Z) \Rightarrow x \cdot y = 2k \cdot (2l - 1) = 4kl - 2k = 2(2kl - k) = 2m, m \in Z \Rightarrow \quad x \cdot y$ je nepárne.

Tým sme vetu dokázali.

Príklad

Dokážte, že súčet párneho a nepárneho prirodzeného čísla je nepárne prirodzené číslo.

Riešenie:

Je potrebné dokázať nasledujúce tvrdenie:

$\forall x, y \in N$: (*x* je párne$\wedge$ *y* je nepárne) $\Rightarrow x + y$ je nepárne.

Pre $\forall x, y \in N$ platí

(*x* je párne $\wedge$ *y* je nepárne)$\Rightarrow (x = 2k, k \in N \wedge y = 2l - 1, l \in N) \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 2k + 2l - 1 = 2(k + l) - 1 = 2m - 1, m \in N \Rightarrow x + y$ je nepárne.

Dôkaz je hotový.

Príklad

Pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c, d platí, ak $a < b$ a $c < d$, potom $ac < bd$. Dokážte.

Riešenie:

Je potrebné dokázať nasledujúce tvrdenie:

$\forall a, b, c, d \in R^+ : (a < b \wedge c < d) \Rightarrow ac < bd.$

Nech a, b, c, d sú ľubovoľné kladné reálne čísla, pričom $a < b$ a $c < d$. Vynásobme obidve strany prvej nerovnosti číslom *c* a obidve strany druhej nerovnosti číslom *b*. Keďže predpokladáme, že čísla *b* a *c* sú kladné, znamienka nerovností sa nezmenia.

Dostaneme nerovnosti $ac < bc$ a $cb < db$. Ak tieto dve nerovnosti skombinujeme, dostaneme, že $ac < bd$. Dôkaz je hotový.

Predpokladajme teraz, že matematická veta má tvar $\forall x \in D: V(x)$.

Túto vetu môžeme dokázať metódou priameho dôkazu, pričom postupujeme nasledovne:

1. Vyhľadáme (zvolíme) pravdivý výrok $\forall x \in D: A(x)$.
2. Dokážeme, že platí $\forall x \in D: A(x) \Rightarrow V(x)$
3. Dostávame záver, že platí $\forall x \in D: V(x)$.

Analogicky sa postupuje aj v prípade, že v matematickej vete vystupujú výrokové formy s viacerými premennými.

Príklad

Dokážte, že pre $\forall a, b \in R: (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Riešenie:

Pre $\forall a, b \in R$ platí

$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Dôkaz je hotový.

5.3 Nepriamy dôkaz

Predpokladajme, že matematická veta má tvar

$\boldsymbol{\forall x \in D: A(x) \Rightarrow B(x)}$.

Môže sa stať, že priamym dôkazom sa nám túto vetu nepodarí dokázať. V tomto prípade môžeme použiť nepriamy dôkaz. Pri nepriamom dôkaze využívame nasledujúcu tautológiu predikátovej logiky:

$\boldsymbol{\forall x \in D: [A(x) \Rightarrow B(x)] \Leftrightarrow [B'(x) \Rightarrow A'(x)]}$.

Namiesto vety $\forall x \in D$: $A(x) \Rightarrow B(x)$ dokazujeme obmenenú vetu $\forall x \in D$: $B'(x) \Rightarrow A'(x)$, ktorá má rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Ako sa postupuje pri nepriamom dôkaze, ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad

Ak x^2 je párne celé číslo, potom aj *x* je párne celé číslo. Dokážte.

Riešenie:

Je potrebné dokázať nasledujúce tvrdenie:

$\forall x \in Z$: x^2 je párne ⇒ *x* je párne.

Priamym dôkazom by sa toto tvrdenie dokazovalo ťažko. Budeme preto dokazovať nepriamo. Dokážeme obmenenú vetu, ktorú môžeme zapísať v nasledujúcom tvare:

$\forall x \in Z$: *x* je nepárne $\Rightarrow x^2$ je nepárne.

Obmenenú vetu budeme dokazovať priamym dôkazom:

Pre $\forall x \in Z$platí: x je nepárne $\Rightarrow$ $x = 2k + 1, k \in Z \Rightarrow$ $x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1, m \in Z$ $\Rightarrow$ x^2 je nepárne.

Veta je dokázaná.

Príklad

Ak 5 delí $n^2 + 1$, tak 5 nedelí n. Dokážte.

Riešenie:

Tvrdenie môžeme pomocou matematickej symboliky zapísať nasledujúcim spôsobom: $\forall n \in N$: 5 delí $n^2 + 1$ ⇒ 5 nedelí n. Budeme ho dokazovať nepriamym dôkazom, teda dokážeme obmenenú vetu „Ak 5 delí n, tak 5 nedelí $n^2 + 1$.“ Túto vetu môžeme pomocou matematickej symboliky zapísať nasledujúcim spôsobom: $\forall n \in N$: 5 delí n ⇒ 5 nedelí $n^2 + 1$.

Dokážeme ju priamym dôkazom: $\forall n \in N$: 5 delí $n \Rightarrow n = 5k, k \in N \Rightarrow n^2 + 1 = (5k)^2 + 1 = 25k^2 + 1 = 5 \cdot (5k^2) + 1 = 5m + 1, m \in N$.

To znamená, že číslo $n^2 + 1$ pri delení piatimi dáva zvyšok 1, teda 5 nedelí $n^2 + 1$. Tým sme nepriamo dokázali dané tvrdenie. Jeho priamy dôkaz by bol oveľa náročnejší.

Príklad

Ak je súčin dvoch celých čísel číslo nepárne, potom je ich súčet párne číslo. Dokážte.

Riešenie:

Pomocou matematickej symboliky môžeme dané tvrdenie zapísať nasledovne: $\forall x, y \in Z: x \cdot y$ je nepárne $\Rightarrow x + y$ je párne.

Použijeme nepriamy dôkaz, čiže budeme dokazovať obmenenú vetu, ktorá má nasledujúci tvar: $\forall x, y \in Z: x + y$ je nepárne $\Rightarrow x \cdot y$ je párne.

Pri dôkaze obmenenej vety použijeme priamy dôkaz.

Nech x, y sú ľubovoľné celé čísla, pričom ich súčet $x + y$ je nepárne číslo. Keďže súčet dvoch párnych čísel je párne číslo a aj súčet dvoch nepárnych čísel je párne číslo, čo je možné ľahko dokázať priamym dôkazom, z predpokladu vyplýva, že *x* je párne číslo a zároveň *y* je nepárne číslo alebo naopak, *y* je párne číslo a zároveň *x* je nepárne číslo. Súčin párneho a nepárneho čísla je však párne číslo (príklad 3.4). Tým je tvrdenie je dokázané.

5.4 Dôkaz sporom

Predpokladajme, že matematická veta má tvar $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}: \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$.

Pri dôkaze sporom predpokladáme, že daná matematická veta neplatí, teda predpokladáme, že platí jej negácia. Negáciou vety je existenčný výrok

$\exists x \in D: [A(x) \Rightarrow B(x)]'$.

Na základe tautológie predikátovej logiky $\forall x \in D: [A(x) \Rightarrow B(x)]' \Leftrightarrow [A(x) \wedge B'(x)]$ môžeme negáciu vety sformulovať aj nasledovne: $\exists x \in D: A(x) \wedge B'(x)$.

Z tohto predpokladu odvodíme reťazcom implikácií výrok, ktorý je v rozpore s predpokladom alebo nejaký iný nepravdivý výrok. Dostali sme spor, ktorý dokazuje tvrdenie vety.

Príklad

Dokážte vetu: Ak x^2 je párne číslo, potom aj *x* je párne číslo.

Riešenie:

Treba dokázať tvrdenie $\forall x \in Z$: x^2 je párne $\Rightarrow$ *x* je párne. Toto tvrdenie sme už dokázali nepriamym dôkazom v príklade 3.7. Teraz ho dokážeme sporom.

Budeme predpokladať, že to neplatí, t.j. predpokladáme, že existuje celé číslo *x* také, že x^2 je párne číslo a zároveň *x* je nepárne číslo.

Podľa predpokladu $x = 2k + 1, k \in Z$. Potom platí, že $x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1, m \in Z$, čiže x^2 je nepárne. Dostali sme spor s predpokladom, že x^2 je párne číslo. Spor dokazuje tvrdenie vety.

Príklad

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo. Dokážte.

Riešenie:

Vetu zapíšeme najskôr v tvare implikácie: $\forall x \in R: x \in Q \Rightarrow x \neq \sqrt{2}$.

Budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že tvrdenie vety neplatí, t.j. predpokladajme, že existuje racionálne číslo *x* také, že $x = \sqrt{2}$. Keďže *x* je racionálne číslo, $x = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in Z, q \neq 0$ a p, q sú nesúdeliteľné, t.j. ich najväčší spoločný deliteľ je 1. Podľa predpokladu platí $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Po umocnení dostávame, že $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Z tejto rovnosti vyplýva, že $p^2 = 2q^2$, čiže p^2 je párne číslo. Podľa vety, ktorú sme dokázali v predchádzajúcom príklade, je potom aj $p$párne číslo, t.j. $p = 2k, k \in Z$. Po dosadení dostávame, že $4k^2 = 2q^2$, odkiaľ vyplýva, že $q^2 = 2k^2$. To ale znamená, že q^2 je párne číslo. Potom je aj číslo q párne. To je ale spor s predpokladom, že čísla p, q sú nesúdeliteľné. Spor dokazuje tvrdenie vety.

5.5 Dôkaz matematických viet, ktoré majú tvar ekvivalencie

Predpokladajme, že matematická veta má tvar $\forall x \in D: A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Na základe tautológie predikátovej logiky

$\forall x \in D: [A(x) \Leftrightarrow B(x)] \Leftrightarrow \left[\left(A(x) \Rightarrow B(x)\right) \wedge \left(B(x) \Rightarrow A(x)\right)\right]$ dôkaz danej vety pozostáva z dôkazov dvoch viet, ktoré majú tvar implikácie:

$\forall x \in D: A(x) \Rightarrow B(x)$ a $\forall x \in D: B(x) \Rightarrow A(x)$.

Na dôkaz týchto dvoch viet pritom môžeme použiť niektorý z uvedených dôkazov.

Uvedieme príklad.

Príklad

Číslo x^2 je párne práve vtedy, keď *x* je párne číslo. Dokážte.

Riešenie.

Uvedenú vetu môžeme pomocou matematickej symboliky zapísať nasledovne: $\forall x \in Z$: x^2 je párne $\Leftrightarrow$ *x* je párne.

Je potrebné dokázať nasledujúce dve tvrdenia:

$\forall x \in Z$: x^2 je párne $\Rightarrow$ *x* je párne

$\forall x \in Z$: *x* je párne$\Rightarrow$ x^2 je párne.

Prvé tvrdenie sme dokázali v príklade 3.9. Ostáva dokázať druhé tvrdenie. Dokážeme ho priamo.

Pre $\forall x \in Z$ platí *x* je párne $\Rightarrow x = 2k, k \in Z \Rightarrow x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2m, m \in Z \Rightarrow$ x^2 je párne.

Dôkaz je hotový.

5.6 Dôkaz matematickou indukciou

Dôkaz matematickou indukciou používame vtedy, ak máme dokázať, že všetky prirodzené čísla majú určitú vlastnosť. Čiže matematickou indukciou dokazujeme vety, ktoré majú tvar $\forall n \in N: V(n)$.

Poznámka: Namiesto množiny N môže vo vete vystupovať aj ľubovoľná nekonečná podmnožina množiny N. Dôkaz matematickou indukciou je založený na nasledujúcej vete, ktorú uvádzame bez dôkazu.

Veta (o úplnej matematickej indukcii) Nech výroková forma $V(n)$ je definovaná pre všetky prirodzené čísla *n* a nech $V(1)$ je pravdivý výrok. Nech pre každé $k \in N$ platí implikácia $V(k) \Rightarrow V(k+1)$. Potom pre všetky prirodzené čísla *n* platí $V(n)$.

Dôkaz vety matematickou indukciou pozostáva z dvoch krokov:

Dokážeme, že daná vlastnosť platí pre *n* = 1 (t.j. dokážeme, že platí $V(1)$).

Dokážeme, že ak daná vlastnosť platí pre *n* = *k*, potom platí aj pre $n = k + 1$ (t.j. dokážeme, že pre každé $k \in N$ platí implikácia $V(k) \Rightarrow V(k+1)$).

Na základe vety o úplnej matematickej indukcii potom vlastnosť $V(n)$ platí pre všetky prirodzené čísla *n*.

Druhý krok v predchádzajúcej schéme sa nazýva tiež indukčný krok. Dokazuje sa v ňom, že pre každé prirodzené číslo k z platnosti tvrdenia $V(k)$ vyplýva platnosť tvrdenia $V(k+1)$. Tvrdenie $V(k)$ je tzv. indukčný predpoklad. V princípe matematickej indukcie nie je podstatné, že sa začína práve od čísla 1. Môže začínať od najmenšieho prirodzeného čísla, pre ktoré má dokazovaná vlastnosť platiť. Dôkaz matematickou indukciou budeme ilustrovať na nasledujúcich príkladoch.

Príklad

Dokážte, že súčet prvých *n* prirodzených čísel sa rovná číslu $\frac{n(n+1)}{2}$.

Riešenie.

Je potrebné dokázať, že pre $\forall n \in N$ platí vlastnosť

$$V(n): 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dokážeme, že daná vlastnosť platí pre *n* = 1, t.j. dokážeme, že platí $V(1): 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Je zrejmé, že táto rovnosť platí.

Predpokladajme, že daná vlastnosť platí pre *n* = *k*. Dokážeme, že potom platí aj pre $n = k + 1$. Čiže budeme dokazovať, že pre každé $k \in N$ platí implikácia $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.

Nech pre každé $k \in N$ platí vlastnosť $V(k): 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Máme dokázať, že potom pre každé $k \in N$ platí

$$V(k+1): 1 + 2 + \ldots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Nech *k* je ľubovoľné prirodzené číslo. Počítajme:

$$1 + 2 + \ldots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2k + 2}{2} =$$

$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Využili sme indukčný predpoklad. Tým sme dokázali, že vlastnosť $V(n)$ platí pre všetky prirodzené čísla *n*.

Príklad

Dokážte, že súčet tretích mocnín prvých *n* prirodzených čísel sa rovná číslu $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Riešenie.

Je potrebné dokázať, že pre $\forall n \in N$ platí vlastnosť:

$$V(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Dokážeme, že daná vlastnosť platí pre *n* = 1, t.j. dokážeme, že platí $V(1): 1^3 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Je zrejmé, že táto rovnosť platí.

Predpokladajme, že daná vlastnosť platí pre *n* = *k*. Dokážeme, že potom platí aj pre $n = k + 1$. Čiže budeme dokazovať, že pre každé $k \in N$ platí implikácia $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.

Nech pre každé $k \in N$ platí vlastnosť:$V(k): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

Máme dokázať, že potom pre každé $k \in N$ platí

$$V(k+1): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Nech *k* je ľubovoľné prirodzené číslo.

Počítajme:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Využili sme indukčný predpoklad. Tým sme dokázali, že vlastnosť $V(n)$ platí pre všetky prirodzené čísla *n*.

Príklad

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo $n^3 + 11n$ deliteľné šiestimi.

Riešenie.

Keďže číslo 6 delí číslo 12, pre *n* = 1 dané tvrdenie platí.

2. Predpokladajme, že dané tvrdenie platí pre $n = k$, t.j. predpokladajme, že pre každé $k \in N$ platí vlastnosť $V(k)$: číslo 6 delí číslo $k^3 + 11k$. Dokážeme, že tvrdenie potom platí aj pre $n = k + 1$. Máme dokázať, že pre každé $k \in N$ platí

$V(k + 1)$: číslo 6 delí číslo $(k + 1)^3 + 11 \cdot (k + 1)$.

Platí

$$(k + 1)^3 + 11 \cdot (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 =$$

$$= k^3 + 11k + 3k^2 + 3k + 12 = k^3 + 11k + 3k \cdot (k + 1) + 12.$$

Číslo $(k + 1)^3 + 11 \cdot (k + 1)$ sme vyjadrili ako súčet troch čísel, z ktorých každé je deliteľné šiestimi. Prvé z týchto čísel, číslo $k^3 + 11k$, je deliteľné číslom 6 podľa indukčného predpokladu. Číslo $3k \cdot (k + 1)$ je deliteľné šiestimi, lebo jedno z čísel $k, k + 1$ je párne, a teda deliteľné dvomi. Číslo 12 je tiež deliteľné šiestimi. Ak číslo 6 delí sčítancov, potom delí aj ich súčet. Preto číslo 6 delí číslo $(k + 1)^3 + 11 \cdot (k + 1)$. Dôkaz je hotový.

Príklad

Dokážte, že nerovnosť $2^n > 2n + 1$ platí pre všetky prirodzené čísla *n* väčšie ako 2.

Riešenie. Treba dokázať, že nerovnosť $V(n)$: $2^n > 2n + 1$ platí pre *n* = 3, 4, 5,....

Dokážeme, že daná nerovnosť platí pre *n* = 3, t.j. dokážeme, že platí $V(3)$: $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$. Keďže $8 > 7$, daná nerovnosť platí.

Predpokladajme, že daná nerovnosť platí pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 3$, t.j. že pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 3$ platí vlastnosť $V(k)$: $2^k > 2k + 1$. Dokážeme, že potom pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 3$ platí $V(k + 1)$: $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.

Podľa indukčného predpokladu pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 3$ platí $2^k > 2k + 1$. Ďalej pre každé $k \in N$ platí $2^k > 2$. Sčítaním týchto nerovností dostaneme nerovnosť $2 \cdot 2^k > 2k + 3$. Čiže pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 3$ platí $2^{k+1} > 2k + 3$, čo bolo treba dokázať.

Príklad

Dokážte, že nerovnosť $2^n > n^2$ platí pre všetky prirodzené čísla *n* väčšie ako 4.

Riešenie:

Položme *n* = 5. Nerovnosť $2^5 > 5^2$ platí.

Predpokladajme, že daná nerovnosť platí pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 4$, t.j. že pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 4$ platí vlastnosť $V(k)$: $2^k > k^2$. Dokážeme, že potom pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 4$ platí $V(k+1)$: $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Podľa indukčného predpokladu pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 4$ platí $2^k > k^2$. Ďalej podľa predchádzajúceho príkladu pre každé prirodzené číslo $k > 3$ platí $2^k > 2k + 1$. Sčítaním týchto nerovností dostaneme nerovnosť $2 \cdot 2^k > k^2 + 2k + 1$. Čiže pre ľubovoľné prirodzené číslo $k > 4$ platí $2^{k+1} > (k+1)^2$. Dôkaz je hotový.

5.7 Dôkaz preverením všetkých možností

Princíp tejto dôkazovej metódy spočíva v tom, že vyšetrením všetkých možností, ktoré môžu nastať a ich dokázaním, dokážeme dané tvrdenie všeobecne. Je však dôležité rozhodnúť, kedy je vhodné tento typ dôkazu zvoliť. Môže sa stať, že preverovanie všetkých možností je zdĺhavejšie a obtiažnejšie ako iný typ dôkazu. Ako sa postupuje pri dôkaze preverením všetkých možností, ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n číslo 3 delí číslo $n^3 + 2n$.

Riešenie: Pre každé prirodzené číslo n nastane práve jedna z nasledujúcich troch možností: $n = 3k$ alebo $n = 3k + 1$ alebo $n = 3k + 2$, kde $k \in N$. Dôkaz urobíme tak, že za n postupne dosadíme výrazy $3k, 3k + 1{,}3k + 2$.

1. Ak $n = 3k$, potom $n^3 + 2n$=$(3k)^3 + 2 \cdot 3k$ = $27k^3 + 6k$ = 3 $\cdot$ $(9k^3 + 2k)$, a teda číslo 3 delí číslo $n^3 + 2n$.

2. Uvažujme prípad $n = 3k + 1$. Potom $n^3 + 2n$ = $(3k + 1)^3 + 2 \cdot (3k + 1)$ = = $27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 6k + 2 = 3 \cdot (9k^3 + 9k^2 + 5k + 1)$. Aj v tomto prípade platí, že číslo 3 delí číslo $n^3 + 2n$.

3. Ak $n = 3k + 2$, potom $n^3 + 2n$ = $(3k + 2)^3 + 2 \cdot (3k + 2)$ = = $27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 + 6k + 4 = \ 3 \cdot (9k^3 + 18k^2 + 14k + 4)$, odkiaľ vyplýva, že číslo 3 delí číslo $n^3 + 2n$.

Vo všetkých troch prípadoch, ktoré môžu nastať, číslo 3 delí číslo $n^3 + 2n$. Dôkaz je hotový.

Príklad

Štvorec každého nepárneho čísla zmenšený o jednotku je číslo deliteľné ôsmimi. Dokážte.

Riešenie: Treba dokázať, že pre každé celé číslo n je číslo $A = (2n-1)^2 - 1$ deliteľné ôsmimi. Dôkaz urobíme preverením všetkých možností. Pre každé celé číslo n nastane práve jedna z dvoch možností: buď je párne alebo je nepárne.

1. Uvažujme prvý prípad. Nech n je párne, t.j. $n = 2k, k \in Z$. Potom

$$A = (2n-1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n = 4(2k)^2 - 4(2k) = 16k^2 - 8k = 8(2k^2 - k).$$

Vidíme, že v tomto prípade je číslo $A = (2n-1)^2 - 1$ naozaj deliteľné ôsmimi.

2. Uvažujme druhý prípad. Nech n je nepárne, t.j. $n = 2k - 1$, $k \in Z$. Potom

$$A = (2n-1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n = 4(2k-1)^2 - 4(2k-1)$$
$$= 4(4k^2 - 4k + 1) -$$
$$-8k + 4 = 16k^2 - 16k + 4 - 8k + 4 = 8(2k^2 - 3k + 1).$$

Vidíme, že aj v tomto prípade je číslo $A = (2n-1)^2 - 1$ deliteľné ôsmimi. Tým je dôkaz hotový. Dané tvrdenie by sme mohli dokázať aj matematickou indukciou. Uvedený postup je však o niečo jednoduchší.

5.8 Cvičenia.

1. Vyslovte obmenu, obrátenie a negáciu vety: $\forall n \in N$: 2 / $n^2 \Rightarrow 2/n$.

2. Sformulujte negáciu, obmenu a obrátenie výrokov a určte ich pravdivostnú hodnotu:
   a) Ku každému trojuholníku existuje aspoň jedna kružnica, ktorá mu je opísaná.
   b) Existuje šesťuholník, ktorý má aspoň tri tupé uhly.
   c) Existuje prirodzené číslo, ktoré je deliteľom každého prvočísla.
   d) Ak je prirodzené čísla *n* zložené a nie je druhou mocninou, tak má aspoň štyroch deliteľov.
   e) Ak má štvoruholník ABCD aspoň tri strany rovnako dlhé a jeho uhlopriečky sa rozpoľujú, tak je to kosoštvorec alebo štvorec.

3. Dokážte vetu: Ak celé číslo x nie je deliteľné troma, potom $x^2 - 1$ je deliteľné troma. (Priamy dôkaz)

4. Dokážte vetu: Ak nenulové prirodzené číslo x nie je deliteľné tromi, potom číslo $x^2 - 1$ je deliteľné tromi. (Priamy dôkaz)

2. Dokážte vetu: Pre každé prirodzené číslo n platí, ak n je deliteľné tromi, potom aj $n^2 + 6n$ je deliteľné tromi. (Priamy dôkaz)

3. Dokážte vetu:$\forall x \in R: x \in R^+ \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$. (Priamy dôkaz)

4. Dokážte vetu: :$\forall x \in N: 5/n \Rightarrow 30/n^2 - n$. (Priamy dôkaz)

5. Dokážte vetu: :$\forall x \in N: 2/n^2 - 3n$ (Priamy dôkaz)

6. Dokážte, že $\forall n \in N: 3 \,/\, n^2 \Rightarrow 3 \,/\, n$. (Nepriamy dôkaz)

7. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo *n* platí, že ak *n*^{2} je nepárne, potom aj *n* je nepárne. (Nepriamy dôkaz)

8. Dokážte, že $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo. (Nepriamy dôkaz)

9. Dokážte $\forall n \in N: 5/n^2 + 6 \Rightarrow 5 \nmid n$. (Nepriamy dôkaz)

10. Dokážte, že $\sqrt{7}$ je iracionálne. (Dôkaz sporom)

11. Dokážte vetu: Ak x je racionálne číslo a $x \neq \sqrt{2}$. (Dôkaz sporom)

12. Dokážte, že $log_{10}5$ je iracionálne číslo. (Dôkaz sporom)

13. Všetkých prvočísel je nekonečne veľa. Dokážte. (Dôkaz sporom)

14. Číslo x je párne práve vtedy, ak je deliteľné 2.

15. Súčin dvoch čísel je rovný nule práve vtedy, keď aspoň jeden činiteľ je rovný nule.

16. Dokážte: $\forall x \in N: 6/n \Leftrightarrow 3/n \wedge 2 \,/\, n$.

17. Dokážte, že veta v tvare implikácie a jej obmena sú ekvivalentné.
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$.

18. Matematickou indukciou dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *n* platí:

a) $\forall n \in N: 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

b) $\forall n \in N: 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

c) $\forall n \in N: 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d) $\forall n \in N: 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

e) $\forall n \in N: 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{n-1}.(2n-1) = (-1)^{n-1}.n$

f) $\forall n \in N: 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.n^2 = (-1)^{n-1}.\frac{n(n+1)}{2}$

g) $\forall n \in N: 1^2 - 3^2 + 5^2 - \cdots + (-1)^{n-1}.(2n-1)^2 =$
$(-1)^{n-1}.\frac{(2n-1)(2n+1)}{2} - \frac{1}{2}$

h) $\forall n \in N: 1.2 + 2.3 + \cdots +.n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

i) $\forall n \in N: \frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \frac{5}{n} + \cdots + \frac{2n-1}{n} = n$

j) $\forall n \in N: \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

k) $\forall n \in N: \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

19. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo platí: Ak n^2 je prirodzené číslo deliteľné 3, potom aj *n* je prirodzené číslo deliteľná 3.

20. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo platí: Ak $n^4 + 2$ nie je deliteľné 3, potom *n* je deliteľné 3.

21. Dokážte: $.\forall n \in N: 2 \,/\, n^2 - 3n$

LITERATÚRA

[1] Bičan, L.(2001) Algebra (pro učitelské studium). Academia, Praha, ČR, s. 110

[2] Cunningham,D.,W. (2016) Set theory A First Course, Cambridge University Press , GB, p. 262

[3] Ifrah, G. (2001) The universal history of numbers. John Wiley & Sons, New York, USA, p.656

[4] Kopka, J. (1985) Algebraické struktury . Pedagogická fakulta, Ústi nad Labem, ČR, s. 120

[5] Križalkovič, K. a kol.(1985) Základy elementárnej aritmetiky v príkladoch pre učiteľstvo 1. stupňa ZŠ, Pedagogická fakulta v Nitre, s. 244

[6] Kvasnička, V., Pospíchal, J. (2006) Matematická logika. Bratislava, STU, SR, s.394

[7] Markechová, D. a kol. (2011) Základy matematiky a rozvoj matematickej logiky. UKF v Nitre, Nitra, SR, s.133

[8] Palumbíny, D. a kol. (1996) Základy elementárnej aritmetiky. Pedagogická fakulta, VŠPg v Nitre, s.244

[9] Thiele, R. (1985) Matematické dúkazy. SNTL, Praha, ČR, s.164

[10] Vidermanová, K. (2013) Základy matematiky 1. FPV UKF v Nitre, Nitra, SR, s. 300

[11] Vrba, A. (1977) Princíp matematickej indukcie. Ústav pre učiteľské vzdelávanie na UK v Prahe, Praha, ČR, s. 138

Názov:	**Úvod do algebry**
Autori:	Valéria Švecová
	Kitti Páleníková

Vydavateľ:	Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Edícia:	Prírodovedec č. 814
Schválené:	Edičnou komisiou FPV UKF v Nitre dňa 16.8.2023
Formát:	B5
Rok vydania:	2023
Miesto vydania:	Nitra
Počet strán:	119
Počet kusov:	100

ISBN 978-80-558-2036-1

9 788055 820361