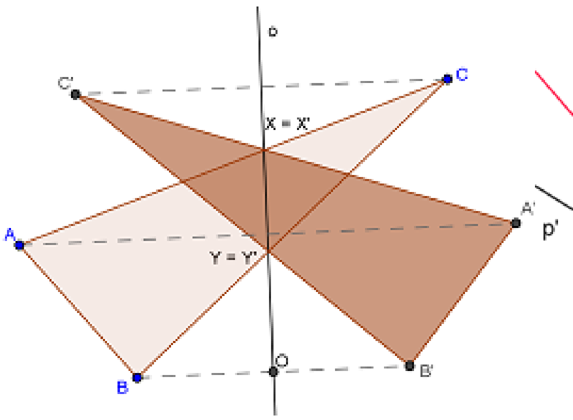
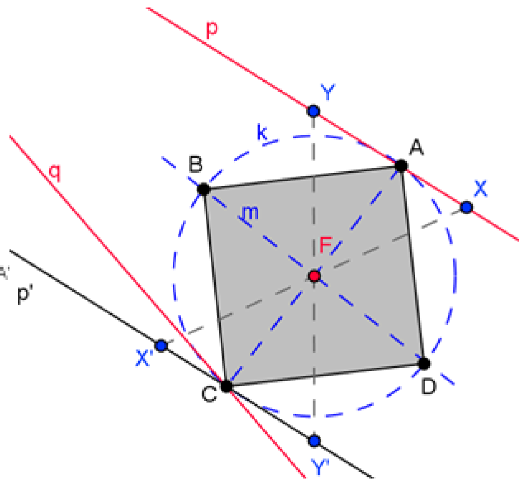
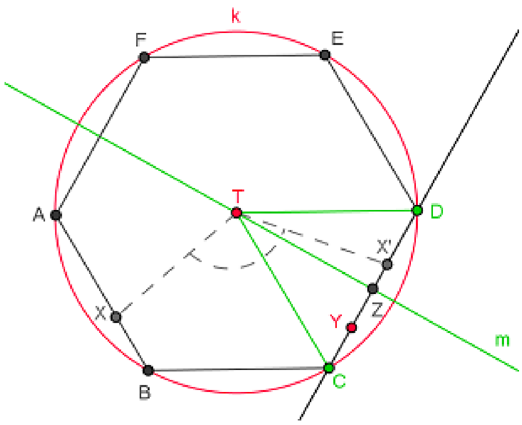
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Fakulta prírodných vied a informatiky

Vybrané kapitoly z geometrie







Lucia Rumanová

Nitra 2024

Vybrané kapitoly z geometrie

Učebnica pre vysoké školy

Lucia Rumanová

Vybrané kapitoly z geometrie
Edícia Prírodovedec č. 859

Autor:
doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.

Recenzenti:
Ing. RNDr. Janka Drábeková, PhD.
PaedDr. Ľubomíra Földesiová

Publikácie je podporená z projektu 013UKF-4/2023 *„Inovatívne prístupy v problematike zobrazovania priestoru s ohľadom na technicky orientované študijné odbory v kontexte aktuálnych potrieb praxe“.*

ISBN 978-80-558-2181-8

Obsah

Úvod

Súčasťou matematickej prípravy budúcich učiteľov v rámci ich bakalárskeho štúdia na UKF v Nitre je aj oblasť geometrie hlavne preto, že vyučovanie geometrie sa prelína všetkými stupňami vzdelávania, aj keď má vždy iný rozmer.

Na základnej škole má vyučovanie geometrie prevažne propedeutický charakter, pretože žiaci sa stretávajú s rôznymi geometrickými útvarmi len z pohľadu ich definovania a popisu vlastností. Dôraz je kladený nielen na správne používanie matematickej terminológie, ale aj na rysovanie a prácu s rysovacími pomôckami. Na základnej škole prevláda v sprístupňovaní učiva z geometrie hlavne uplatňovanie zásady názornosti. Žiaci tak získavajú poznatky na základe zmyslového vnímania predkladaných modelov. Na strednej škole si žiaci nadobudnuté vedomosti rozširujú o ďalšie matematické pojmy súvisiace s planimetriou a stereometriou. Propedeutika sa nahrádza deduktívnou metódou vo vyučovaní geometrie, ďalej sa rozvíja priestorová predstavivosť žiakov a riešia sa s nimi polohové aj metrické vzťahy v rovine a v priestore. V geometrickom vzdelávaní je pre žiakov veľkým pomocníkom práve učiteľ. Snahou učiteľov by preto malo byť nabádanie žiakov k riešeniu problémov rôznymi spôsobmi, so zreteľom na ich vedomosti, schopnosti a osvojený matematický aparát.

Predložená publikácia je prioritne určená *pre študentov 1. ročníka bakalárskeho štúdia učiteľstva matematiky v kombinácii* na UKF v Nitre k predmetu *Vybrané kapitoly z geometrie,* preto je v nej kladený dôraz na geometrickú problematiku jednak z teoretického pohľadu, ale aj v jej aplikácii vo forme riešených úloh. Publikácia obsahuje predovšetkým tematické celky z geometrie, ktoré sú súčasťou matematického vzdelávania na základnej a strednej škole.

Verím, že učebnica s názvom *Vybrané kapitoly z geometrie* bude vhodným didaktickým materiálom pre študentov, budúcich učiteľov matematiky v ich ďalšom vysokoškolskom vzdelávaní, prípadne túto učebnicu budú ďalší záujemcovia využívať v školskej praxi.

Autor

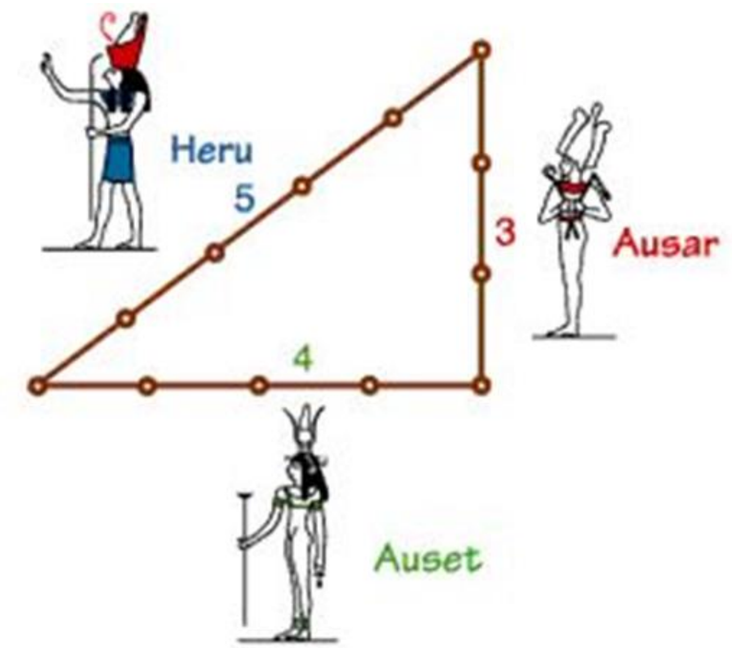
1 Aplikácie geometrických poznatkov v planimetrických úlohách

V prvej kapitole sa budeme venovať významným vetám v geometrii, konkrétne Pytagorovej vete a Euklidovým vetám, ktoré súvisia s riešením úloh v pravouhlom trojuholníku. Uvedieme konkrétne ukážky riešení rôznych geometrických úloh. Tiež sa v kapitole venujeme trigonometrii a prezentovať budeme danú problematiku aj v úlohách súvisiacich s uhlami a všeobecnými trojuholníkmi, pričom využijeme goniometrické funkcie.

1.1 Pytagorova veta, Euklidova veta o výške, Euklidova veta o odvesnách

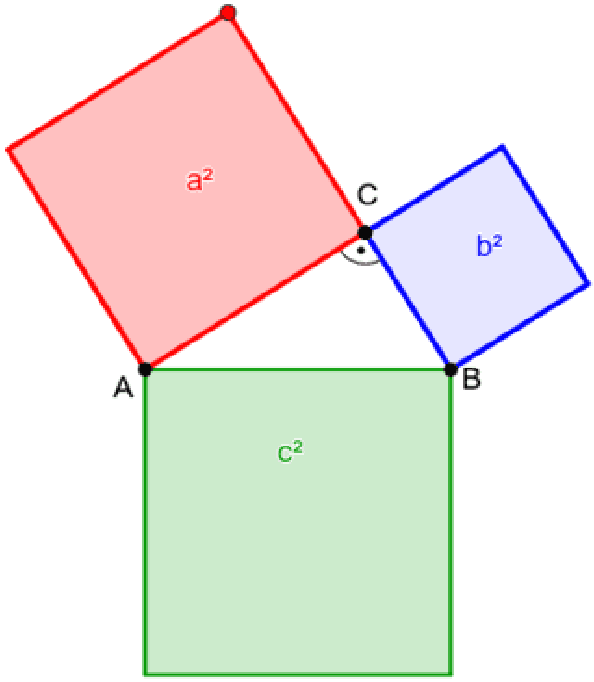
Medzi najčastejšie používanú vetu v školskej praxi patrí Pytagorova veta a je pravdepodobne aj najslávnejšou matematickou vetou vôbec. Je to zároveň veta s najväčším počtom dôkazov, v dostupných zdrojoch sa ich uvádza až okolo 300. Význam Pytagorovej vety v školskej praxi je veľký, pretože je použiteľná hlavne v praktických situáciách prepojených na bežný život.

Pytagorova veta platí pre pravouhlý trojuholník. Pravé uhly vytyčovali už starí Egypťania alebo Babylončania, pretože ich potrebovali pri rôznych stavbách alebo pôdoryse pyramíd. Pravé uhly merali pomocou povrazu, ktorý rozdelili uzlami na dvanásť dielikov. Následne vytvorili z tohto povrazu trojuholník, pričom jednotlivé strany mali dĺžku tri, štyri a päť týchto dielikov, ako je možné vidieť na obrázku.

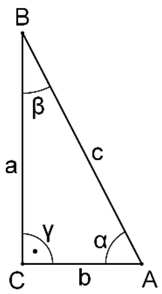


Využili jednu vlastnosť trojuholníka, t. j. oproti najdlhšej strane, ktorá má päť dielikov, leží najväčší uhol (a ten je pravý).

Najčastejšie Pytagorovu vetu poznáme vyjadrenú len algebrickým zápisom $c^2 = a^2 + b^2$ a vieme, že platí v pravouhlom trojuholníku s odvesnami *a, b* a s preponou *c*. Na ďalšom obrázku je graficky znázornená Pytagorova veta.

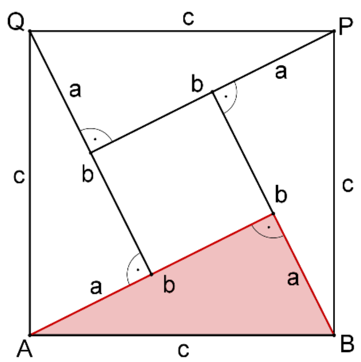


Uvádzame zhrnutie k Pytagorovej vete:



- c ... *prepona* (najdlhšia strana, leží oproti pravému uhlu),
- a, b ... *odvesny*,
- obsah vypočítame zo vzťahu $S = \frac{a.b}{2}$,
- platí *Pytagorova veta*: $c^2 = a^2 + b^2$ (obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad obidvomi odvesnami),
- $a = v_b, b = v_a$, ortocentrum je totožné s vrcholom pravého uhla,
- stred opísanej kružnice je totožný so stredom prepony.

Uvádzame aj dôkaz Pytagorovej vety:



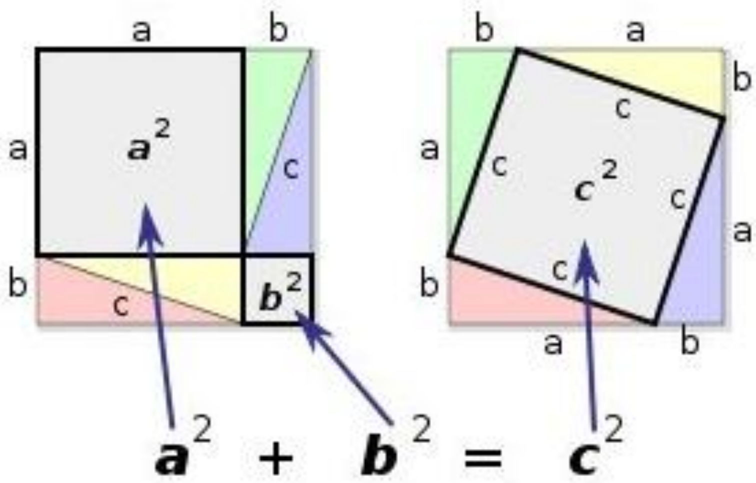
Štvorec $ABPQ$ s obsahom S tvoria štyri pravouhlé trojuholníky s rovnakým obsahom $S_t = \frac{a.b}{2}$ a štvorec so stranou $b - a$ a obsahom $S_š = (b - a)^2$. Obsah štvorca $ABPQ$ je $S = 4S_t + S_š$ a súčasne $S = c^2$. Do rovnosti $4S_t + S_š = c^2$ dosadíme vzťahy a platí:

$4.\frac{a.b}{2} + \ (b - a)^2 = c^2$

$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2$.

Teda platí: $c^2 = a^2 + b^2$.

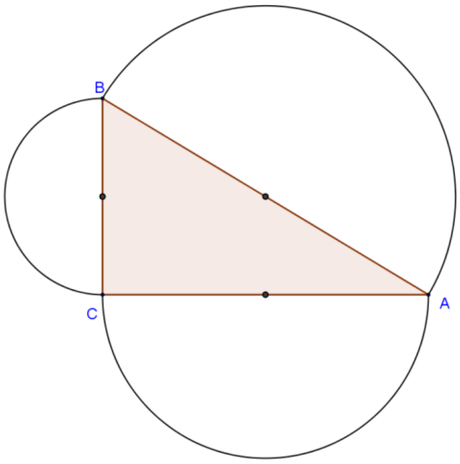
Zaujímavý je aj geometrický dôkaz Pytagorovej vety:



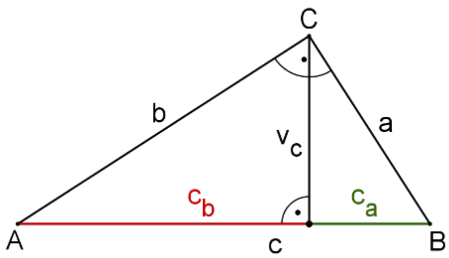
Platí aj obrátená Pytagorova veta:

Ak pre dĺžky strán *a*, *b*, *c* trojuholníka *ABC* platí vzťah $c^2 = a^2 + b^2$, potom je tento trojuholník pravouhlý s odvesnami *a*, *b* a preponou *c*.

Poznámka. Nad stranami pravouhlého trojuholníka môžeme zostrojiť aj polkruhy (pozri obrázok) a platí pozmenená Pytagorova veta: *Obsah polkruhu zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka je rovný súčtu obsahov polkruhov zostrojených nad jeho odvesnami.*



V pravouhlom trojuholníku platia aj Euklidova veta o odvesnách a Euklidova veta o výške:



- Euklidova veta o odvesnách:
  $a^2 = c.c_a$
  $b^2 = c.c_b$
- Euklidova veta o výške na preponu:
  $v_c^2 = c_a.c_b$,

kde c_a je časť prepony (úsečka), ktorej krajné body sú: päta výšky na preponu a spoločný bod prepony s odvesnou *a*,

c_b je časť prepony (úsečka), ktorej krajné body sú: päta výšky na preponu a spoločný bod prepony s odvesnou *b*.

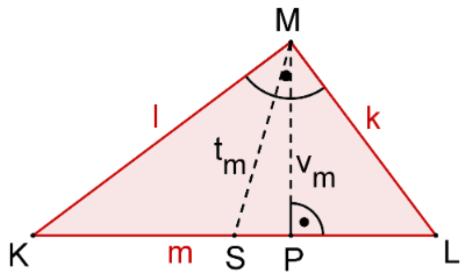
V nasledujúcej časti uvedieme niekoľko úloh, ktoré využívajú v riešení Pytagorovu vetu a Euklidove vety. Vybrali sme úlohy, v ktorých sa prelínajú vedomosti z rôznych tematických celkov, hlavne z planimetrie a stereometrie.

Príklad 1.

V pravouhlom trojuholníku *KLM* s preponou $m = KL$ poznáme dĺžky odvesien $|KM| = 20\ mm$ a $|LM| = 15\ mm$. Určte dĺžku ťažnice t_m na preponu, výšky v_m na preponu a dĺžku úsekov prepony vytvorených pätou výšky v_m.

Riešenie:

V riešení úlohy využijeme Pytagorovu vetu a Euklidove vety, ktoré platia v pravouhlom trojuholníku.



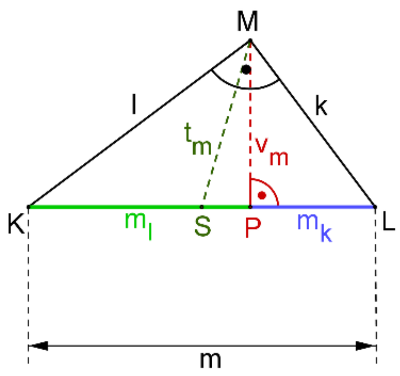
Označíme jednotlivé strany a úseky prepony a postupne vypočítame jednotlivé dĺžky.

V trojuholníku *KLM* použijeme Pytagorovu vetu na výpočet dĺžky prepony *KL*:

$$|KL| = m = \sqrt{l^2 + k^2}$$

$$m = \sqrt{20^2 + 15^2}$$

$$m = 25\ mm$$



Euklidovu vetu o odvesne použijeme na výpočet dĺžok úsekov prepony $KP = m_l$ a $PL = m_k$, kde *P* je päta výšky na preponu v trojuholníku *KLM*:

$$k^2 = m.m_k$$

$$15^2 = 25.m_k$$

$$m_k = 9\ mm$$

Pre m_l platí: $m_l = m - m_k = 25 - 9 = 16\ mm$.

Použijeme Pytagorovu vetu v trojuholníku *LKP* na výpočet výšky na preponu:

$$|MP| = v_m = \sqrt{k^2 - m_k^2}$$

$$v_m = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\ mm$$

Možné je tiež použiť výpočet obsahu trojuholníka *KLM* a túto hodnotu potom následne využiť pre výpočet dĺžky v_m, prípadne Euklidovu vetu o výške na preponu v pravouhlom trojuholníku.

Ťažnicu t_m vypočítame z trojuholníka *SPM* s použitím Pytagorovej vety. Platí:

$$|SM| = t_m, |PM| = v_m$$

$$|SP| = |SL| - |PL| = \frac{1}{2}m - m_k = 12{,}5 - 9 = 3{,}5\ mm$$

$$t_m = \sqrt{v_m^2 + |SP|^2}$$

$$t_m = \sqrt{12^2 + 3{,}5^2}$$

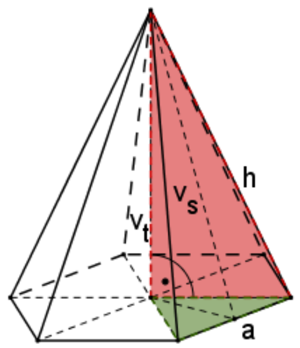
$$t_m = 12{,}5\ mm$$

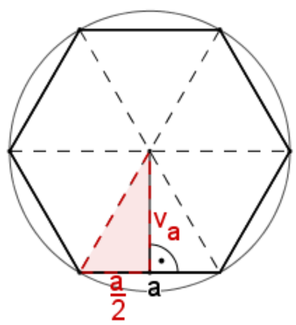
Dĺžka ťažnice na preponu v trojuholníku *KLM* je 12,5 mm, výšky na preponu 12 mm a úseky prepony majú dĺžku $m_k = 9\ mm$ a $m_l = 16\ mm$.

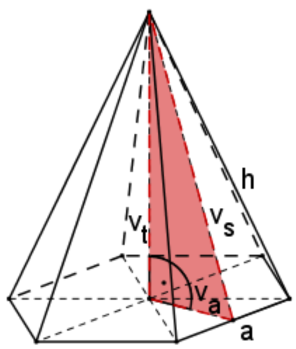
Príklad 2.

Pravidelný šesťboký ihlan má dĺžku bočnej hrany $2\ m$ a polomer kružnice opísanej podstave je $1\ m$. Vypočítajte jeho objem a povrch.

Riešenie:







V náčrte telesa sme vyznačili všetky prvky potrebné k výpočtom.

Podstavou pravidelného šesťbokého ihlana je pravidelný šesťuholník, ktorého obsah môžeme počítať s použitím vzorcov (tie sú však menej známe), alebo ako šesťnásobok obsahu rovnostranného trojuholníka so stranou a a výškou v_a (podstava sa skladá zo šiestich zhodných rovnostranných trojuholníkov). Keďže poznáme polomer kružnice opísanej podstave, poznáme zároveň dĺžku hrany podstavy $a = 1\ m$, čo vyplýva z vlastností pravidelného šesťuholníka.

Telesovú výšku v_t a stenovú výšku v_s vypočítame s použitím Pytagorovej vety podľa náčrtu, keďže poznáme dĺžku bočnej hrany $h = 2\ m$.

Plášť tohto telesa pozostáva zo šiestich zhodných rovnoramenných trojuholníkov so základňou a a výškou na základňu v_s.

$$v_a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \qquad v_t = \sqrt{2^2 - 1^2} \qquad v_s = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$v_a = \frac{\sqrt{3}}{2} m \qquad v_t = \sqrt{3}\ m \qquad v_s = \frac{\sqrt{15}}{2} m$$

Pre podstavu v pravidelnom šesťbokom ihlane platí:

$$S_p = 6. S_{T1}, S_{T1} = \frac{a.v_a}{2}$$

$$S_p = 6. \frac{a.v_a}{2} = 3. a. v_a$$

$$S_p = 3.1.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_p = \frac{3\sqrt{3}}{2} m^2$$

Pre plášť v pravidelnom šesťbokom ihlane platí:

$$S_{pl} = 6.S_{T2}, S_{T2} = \frac{a.v_s}{2}$$

$$S_{pl} = 6.\frac{a.v_s}{2} = 3.a.v_s$$

$$S_{pl} = 3.1.\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$S_{pl} = \frac{3\sqrt{15}}{2} m^2$$

Vypočítame teraz objem a povrch šesťbokého ihlana:

$$V = \frac{1}{3}.S_p.v_t \qquad S = S_p + S_{pl}$$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} \qquad S = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$V = \frac{3}{2} m^3 \qquad S = 8{,}4\ m^2$$

Objem daného ihlana je $1{,}5\ m^3$ a jeho povrch je približne $8{,}4\ m^2$.

Úlohy na precvičenie

1. Pomocou Euklidových viet zostrojte úsečky s dĺžkou $\sqrt{10}, \sqrt{7}, \sqrt{20}$ (daná je jednotková úsečka).
2. V pravouhlom trojuholníku *ABC* sú dané dĺžky: $a = 10\ cm, v_c = 9{,}5\ cm$. Vypočítajte obvod a obsah trojuholníka *ABC*.
3. V kružnici s polomerom 7,5 cm sú zostrojené dve rovnobežné tetivy, ktorých dĺžky sú *9 cm* a *12 cm*. Vypočítajte vzdialenosť týchto tetív (nájdite všetky riešenia).
4. Kosoštvorec má stranu *a = 6 cm*, polomer vpísanej kružnice je *r = 2 cm*. Vypočítajte dĺžky oboch uhlopriečok.
5. Obdĺžnik *ABCD* má strany *AB*, *AD* v pomere 3:4. Obdĺžniku *ABCD* je opísaná kružnica *k* s polomerom 5 cm. Vypočítajte dĺžky strán obdĺžnika *ABCD*.
6. Nad dvoma stranami trojuholníka *ABC* sú zostrojené štvorce (strana *AC* je dlhšia ako strana *BC*). Obsah štvorca nad stranou *BC* je 25 cm^2, dĺžka výšky v_c na stranu *AB* je

3 cm, päta *P* výšky v_c delí stranu *AB* v pomere 2:1. Vypočítajte dĺžku strany *AB*. Vypočítajte obsah štvorca nad stranou *AC*.

7. V pravouhlom trojuholníku *ABC* je dané: $a = 10\ cm, c = 12{,}5\ cm$, bod *P* je päta výšky v_c, *M* je stred úsečky *BC*. Vypočítajte obsah trojuholníka *PBM*.
8. Vypočítajte objem a povrch kocky, ak telesová uhlopriečka má dĺžku 10 dm.
9. Vypočítate objem a povrch hranola, ktorého podstava je kosoštvorec s uhlopriečkami $u_1 = 12\ cm$, $u_2 = 16\ cm$. Výška hranola sa rovná dvojnásobku podstavovej hrany.
10. Cestný valec má priemer 0,8 m a dĺžku 1,8 m. Akú plochu uvalcuje, ak sa otočí 1200-krát? Koľkokrát sa musí otočiť, aby uvalcoval cestu 3,6 m širokú a 6,28 km dlhú?
11. Obal na zmrzlinu má po rozbalení tvar štvrť kruhu s polomerom 12 cm. Koľko mililitrov zmrzliny sa doň zmestí?
12. Vypočítajte objem a povrch pravidelného zrezaného štvorbokého ihlana s hranami podstáv 1 dm a 5 cm, ak obsah plášťa je 5,4 dm^2.
13. Do nádoby tvaru polgule sme naliali 2 l vody a tak sme ju naplnili do výšky 60 mm. Vypočítajte polomer príslušnej gule.
14. Vypočítajte, koľko dm^2 plechu tvorí povrch nádoby tvaru zrezaného rotačného kužeľa, ktorá je zhora otvorená a priemer jej dna je 18 cm, priemer hornej podstavy je 30 cm a strana má dĺžku 18 cm. Vypočítajte aj jej objem.

1.2 Trigonometria

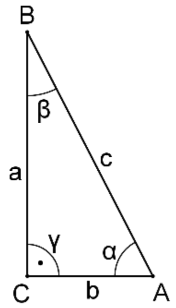
V tejto podkapitole sa budeme venovať trigonometrii, konkrétne úlohám súvisiacich s uhlami a trojuholníkmi s využitím goniometrických funkcií ako *sínus*, *kosínus*, *tangens* a *kotangens*. Zadefinujme si najskôr uvedené goniometrické funkcie ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku.

Sínus ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžky protiľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony.

Kosínus ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžky priľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony.

Tangens ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžok protiľahlej a priľahlej odvesny k ostrému uhlu.

Kotangens ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer dĺžok priľahlej a protiľahlej odvesny k ostrému uhlu.



$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

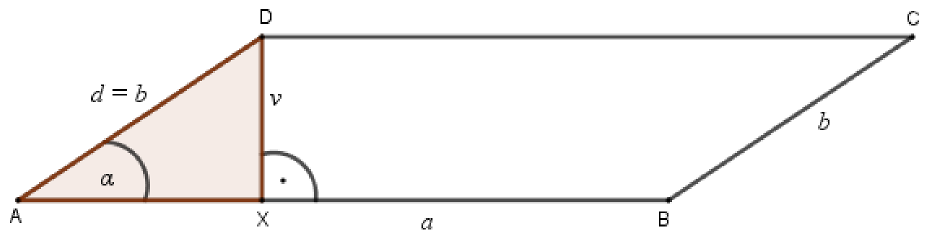
$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{cotg}\beta = \frac{a}{b} \qquad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Príklad 3.

Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov rovnobežníka *ABCD*, ak sú dané dĺžky jeho strán $a = 10\ cm, b = 5\ cm$ a obsah rovnobežníka je $25\ cm^2$.

Riešenie:



Vzorec pre obsah rovnobežníka je $S = a.v$, kde v je výška rovnobežníka *ABCD*. Môžeme vypočítať teda danú dĺžku *v*:

$$v = \frac{S}{a} = \frac{25}{10} = 2{,}5\ cm$$

V pravouhlom trojuholníku *AXD* poznáme dĺžku strany $|AD| = b = 5\ cm$ a výšky $v = |DX| = 2{,}5\ cm$. Na výpočet uhla α v trojuholníku *AXD* využijeme goniometrickú funkciu sínus:

$$\sin\alpha = \frac{v}{b} = \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30°.$$

Dvojica uhlov α, γ a β, δ sú zhodné uhly a platí: $\gamma = \alpha = 30°, \beta = \delta$.

V rovnobežníku platí, že súčet vnútorných uhlov je $360°$, preto vieme vypočítať veľkosť zvyšných uhlov:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

$$2.\beta + 2.30° = 360°$$

$$2.\beta = 300°$$

$$\beta = 150°$$

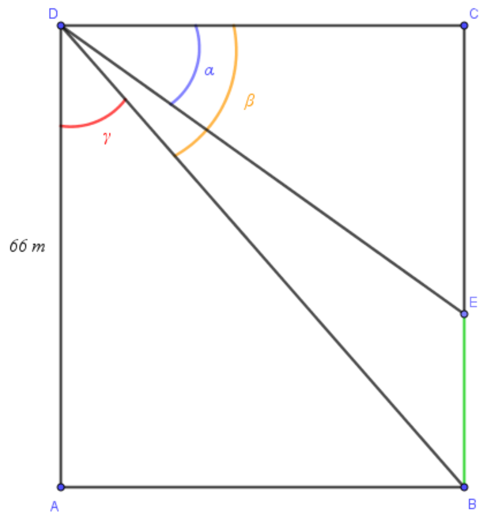
Veľkosti vnútorných uhlov rovnobežníka sú $\alpha = \gamma = 30°, \beta = \delta = 150°$.

Príklad 4.

Zo skaly vo výške 66 m je vidieť vrchol stožiara pod hĺbkovým uhlom $\alpha = 37°$ a pätu stožiara pod hĺbkovým uhlom $\beta = 51°$. Vypočítajte výšku stožiara.

Riešenie:

Situácia zo zadania príkladu je znázornená na obrázku.



Výšku stožiara *BE* zistíme ako rozdiel dĺžok: $|BE| = |AD| - |EC|$.
Dĺžku *EC* zistíme z trojuholníka *DEC*.
Vypočítame najskôr dĺžky *CD*, *AB*, ktoré sa rovnajú, použijeme na výpočet $tg\ \gamma$.
Platí:

$$\gamma = 90° - 51° = 39°$$

$$tg\ \gamma = \frac{|AB|}{|AD|}$$

$$|AB| = |AD|.tg\ \gamma = 66.tg\ 39°$$

$$|AB| = 53{,}45\ m$$

Vieme vypočítať teraz $|EC|$:

$$tg\ \alpha = \frac{|EC|}{|CD|}$$

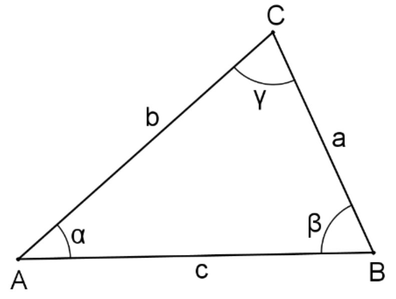
$$|EC| = |CD|.tg\ \alpha = 53{,}45.tg\ 37°$$

$$|EC| = 40{,}28\ m$$

$$|BE| = |AD| - |EC| = 66 - 40{,}28 = 25{,}72\ m$$

Stožiar má výšku 25,72 m.

V trojuholníku platí *sínusová a kosínusová veta*. Tieto vety používame pri riešení všeobecného trojuholníka, t. j. pri určovaní neznámych prvkov všeobecného trojuholníka.



Sínusová veta: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Používame ju, ak je trojuholník daný:

- dvomi stranami a uhlom ležiacim oproti jednej z nich,
- jednou stranou a ľubovoľnými dvomi uhlami.

Kosínusová veta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

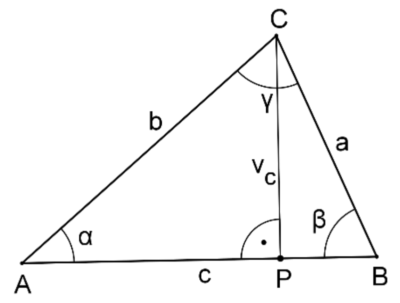
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Používame ju, ak je trojuholník daný:

- tromi stranami,
- dvomi stranami a uhlom nimi zovretým.

Dôkaz sínusovej vety



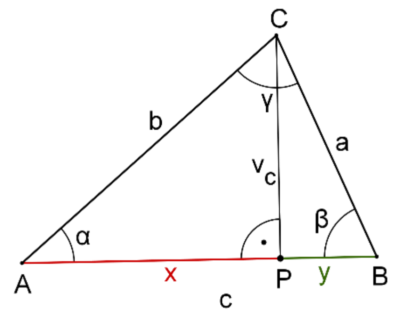
Z pravouhlých trojuholníkov *APC* a *BPC* môžeme zapísať vzťahy (s využitím goniometrických funkcií ostrého uhla pravouhlého trojuholníka):

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha = \frac{v_c}{b} \Rightarrow v_c = b\cdot\sin\alpha \\ \sin\beta = \frac{v_c}{a} \Rightarrow v_c = a\cdot\sin\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Analogicky dokážeme ostatné vzťahy.

Dôkaz kosínusovej vety



V pravouhlom trojuholníku platí Pytagorova veta:

$$\triangle\, APC\colon v_c^2 = b^2 - x^2$$

$$\triangle\, BPC\colon v_c^2 = a^2 - y^2$$

Platí rovnosť: $\quad b^2 - x^2 = a^2 - y^2$

a tiež platí: $c = x + y \implies y = c - x.$

Dosadíme do predchádzajúceho vzťahu a upravíme:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

V trojuholníku *APC* zároveň platí: $\cos\alpha = \frac{x}{b} \Longrightarrow x = b.cos\ \alpha$

Po opätovnom dosadení za *x* dostávame vzťah: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$

V dokazovaní ďalších vzťahov postupujeme analogicky.

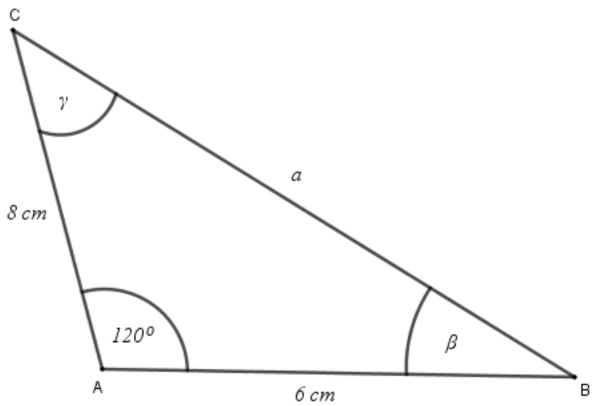
Poznámka. Platí vzťah $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, kde *R* je polomer kružnice opísanej trojuholníku.

Príklad 5.

V trojuholníku *ABC* sú dané: $b = 8\ cm, c = 6\ cm, \alpha = 120°$. Vypočítajte dĺžku strany a, veľkosť vnútorných uhlov β, γ daného trojuholníka.

Riešenie:

Na výpočet ostatných prvkov v trojuholníku *ABC* využijeme sínusovú a kosínusovú vetu.



Dĺžku strany a vypočítame z kosínusovej vety:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$a^2 = 8^2 + 6^2 - 2.8.6.\cos 120\ ° \Rightarrow a \doteq 12{,}17\ cm$$

Na výpočet zvyšných uhlov v trojuholníkov použijeme zase sínusovú vetu:

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}.c = \sin 120°.\frac{6}{12{,}17} \doteq\ 0{,}423$$

$$\gamma \doteq 25°17'$$

Podobne by sme mohli vypočítať aj veľkosť uhla β, no my použijeme na výpočet vlastnosť pre súčet uhlov v trojuholníku:

$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 120° - 25°17' = 34°43'$

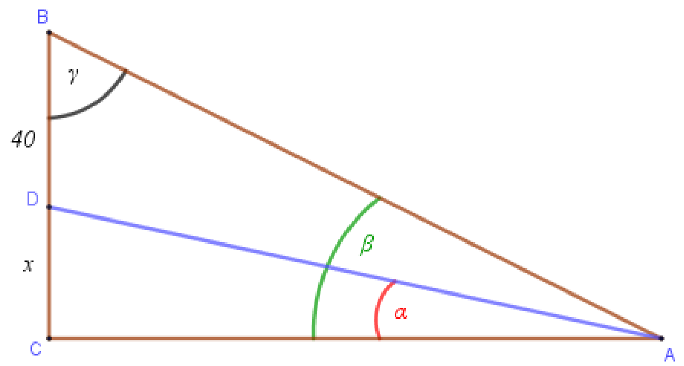
V trojuholníku *ABC* majú uhly veľkosť $25°17'$, $34°43'$ a strana má dĺžku $12{,}17\ cm$.

Príklad 6.

Na kopci stojí rozhľadňa 40 m vysoká. Pätu a vrchol tejto rozhľadne vidíme z určitého miesta v údolí pod výškovými uhlami $\alpha = 35°, \beta = 41°$. V akej výške je vrchol kopca nad rovinou pozorovacieho miesta?

Riešenie:

Situácia zo zadania úlohy je znázornená na obrázku.



Z pravouhlého trojuholníka *ABC* vypočítame veľkosť uhla γ, čo je uhol pri vrchole *B*:

$$\gamma = 90° - 41° = 49°$$

Sínusovú vetu využijeme na výpočet dĺžky úsečky *AD* v trojuholníku *ABD*:

$$\frac{|AD|}{\sin 49°} = \frac{40}{\sin 6°}$$

$$|AD| = \frac{40.\sin 49°}{\sin 6°}$$

$$|AD| = 301{,}9$$

Na výpočet výšky kopca, ktorý je v obrázku označený ako $x = |CD|$, využijeme goniometrickú funkciu sínus v trojuholníku *ABC*:

$$\sin \alpha = \frac{x}{|AD|}$$

$$x = |AD|.\sin \alpha$$

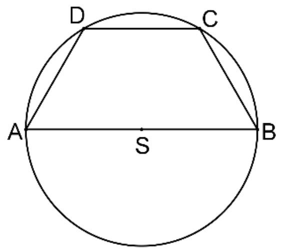
$$x = 301{,}9.\sin 35°$$

$$x = 173{,}16\ m$$

Výška kopca, na ktorej je rozhľadňa, je približne $173{,}16\ m$.

Úlohy na precvičenie

1. Do pravouhlého trojuholníka *ABC* s pravým uhlom pri vrchole A je vpísaná kružnica. Dotykový bod T_1 rozdeľuje odvesnu *AB* v pomere $AT_1 : T_1B = 1:4$. Určte veľkosti ostrých uhlov trojuholníka *ABC*.
2. Lichobežník na obrázku je tetivový, pričom $|BC| = |CD|$, $|AB| = 120\ mm$ je priemerom opísanej kružnice a $|\sphericalangle BCD| 120°$. Vypočítajte jeho obsah a obvod.



3. Obsah rovnoramenného trojuholníka so základňou dlhou 6 cm je 30 cm^2. Vypočítajte dĺžku polomeru kružnice vpísanej a opísanej tomuto trojuholníku.
4. Vypočítajte obvod trojuholníka *ABC*, ak poznáme: $|AB| = 8cm$, $|BC| = 6\ cm$, $|\sphericalangle BAC| = 30°$.
5. Na kopci stojí rozhľadňa 35 m vysoká. Jej pätu i vrchol vidíme z určitého miesta v údolí pod výškovými uhlami *α = 28°, β = 31°.* Ako vysoko je vrchol kopca nad rovinou pozorovacieho miesta?
6. Vypočítajte ostatné prvky trojuholníka *ABC* (dĺžky strán a veľkosť vnútorných uhlov trojuholníka), v ktorom je dané:

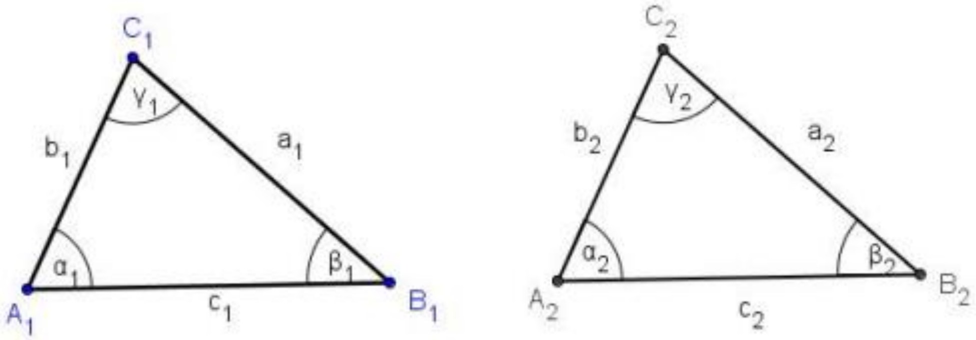
a) $a = 4\ cm, c = 5\ cm, \alpha = 45°$
b) $a = 65\ cm, b = 46\ cm, \alpha = 42°35'$
c) $b = 225\ mm, \alpha = 107°35', \beta = 30°40'$
d) $a = 16\ cm, b = 25\ cm, c = 36\ cm$

2 Zhodnosť a podobnosť útvarov. Zhodné a podobné zobrazenia v rovine. Konštrukčné úlohy

V druhej kapitole uvedieme definíciu a vlastnosti zhodných a podobných zobrazení v rovine. Vysvetlíme pojmy súvisiace so zhodnosťou a podobnosť geometrických útvarov, venujeme sa hlavne trojuholníkom. Podrobnejšie ale popíšeme rôzne zhodné zobrazenia, konkrétne osovú a stredovú súmernosť, posunutie, otočenie, ale aj jedno podobné zobrazenie – rovnoľahlosť. Na konkrétnych príkladoch uvedieme praktické použitie uvedených zobrazení, a to hlavne pri riešení konštrukčných úloh a rôznych aplikačných úloh.

2.1 Zhodnosť trojuholníkov

Dané sú dva trojuholníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$. Hovoríme, že trojuholník $A_1B_1C_1$ je zhodný s trojuholníkom $A_2B_2C_2$, ak sú zhodné každé dve odpovedajúce si strany a každé dva odpovedajúce si vnútorné uhly.

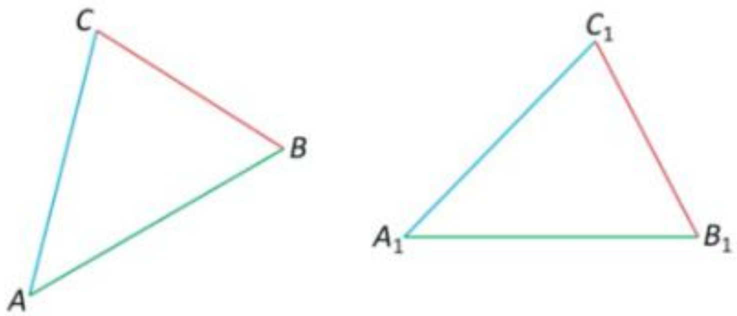


Zhodnosť trojuholníkov $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ označujeme: $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$.

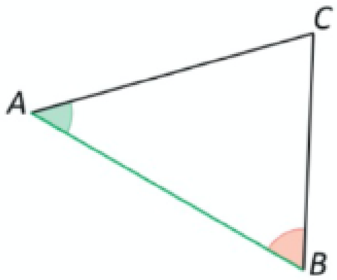
Teda platí: $a_1 \cong a_2,\ b_1 \cong b_2,\ c_1 \cong c_2, \alpha_1 \cong \alpha_2,\ \beta_1 \cong \beta_2,\ \gamma_1 \cong \gamma_2$.

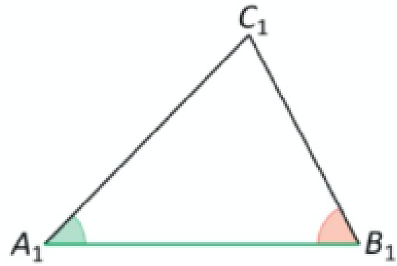
Platia vety:

- Ak sa dva trojuholníky zhodujú vo všetkých troch stranách, tak sú zhodné (veta sss).

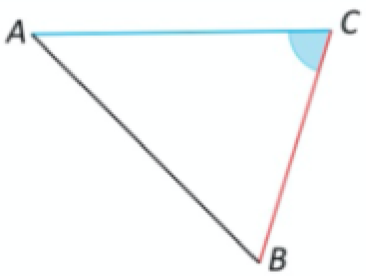


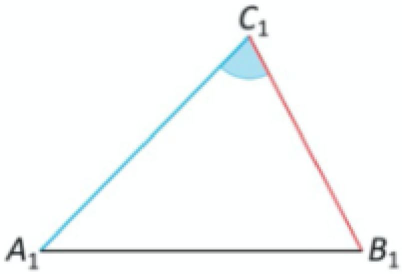
- Ak sa dva trojuholníky zhodujú v jednej strane a v dvoch uhloch priľahlých, tak sú zhodné (veta usu).





- Ak sa dva trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom, tak sú zhodné (veta sus).





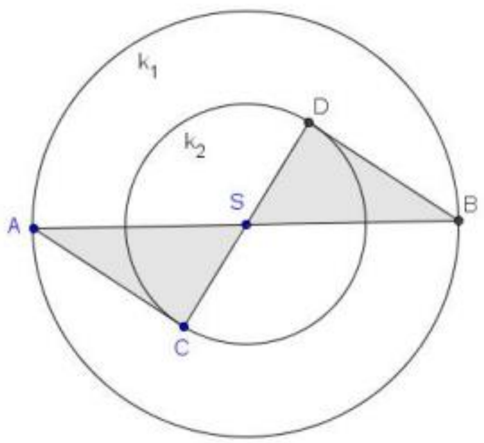
Úlohy na precvičenie

1. Rozhodnite, či trojuholníky *ABC* a *EFG* sú zhodné. Ak áno, ich zhodnosť odôvodnite a zapíšte:

   a) $|AB| = 60\ mm, |\sphericalangle CAB| = 56°, |\sphericalangle ABC| = 71°$
   $|FG| = 6\ cm, |\sphericalangle EFG| = 56°, |\sphericalangle FGE| = 71°$

   b) $|AC| = 9\ cm, |\sphericalangle CAB| = 80°, |\sphericalangle BCA| = 46°$
   $|EF| = 9\ cm, |\sphericalangle EFG| = 46°, |\sphericalangle FGE| = 54°$

2. Kružnice k_1, k_2 majú spoločný stred *S*. Úsečka AB je priemer kružnice k_1, úsečka CD je priemer kružnice k_2. Rozhodnite, či vyfarbené trojuholníky (pozri obrázok) sú zhodné. Ak áno, ich zhodnosť zdôvodnite a zapíšte.



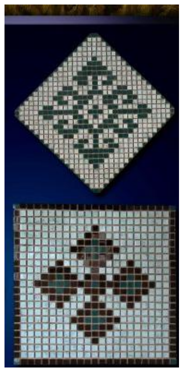
3. Ktoré dva trojuholníky sú zhodné? Zapíš zhodnosť pre všetky odpovedajúce si strany a uhly.
   $\Delta\, ABC$: $|BC| = 8\ cm, |\sphericalangle ABC| = 50°, |\sphericalangle BCA| = 93°$
   ΔDEF: $|DE| = 80\ mm, |\sphericalangle DEF| = 93°, |\sphericalangle FDE| = 37°$
   ΔMNO: $|NO| = 8\ cm, |\sphericalangle OMN| = 50°, |\sphericalangle NOM| = 93°$

2.2 Zhodné zobrazenia v rovine

Zhodné zobrazenia sú zobrazenia, v ktorých vytvorený obraz je zhodný zo vzorom, t. j. obraz závisí od vzoru, mení sa podľa vzoru.

Nájdeme určite veľa ukážok zhodných zobrazení okolo nás, či už v prírode, v umení, v rôznych vedách, ale aj v mozaikách, dlaždiciach. Uvedieme niekoľko konkrétnych ukážkach zo života.





Pod zobrazením *Z* v rovine rozumieme také zobrazenie, ktoré každému bodu *X* v rovine priradí práve jeden bod *X´* v rovine, $X´ = Z(X)$.

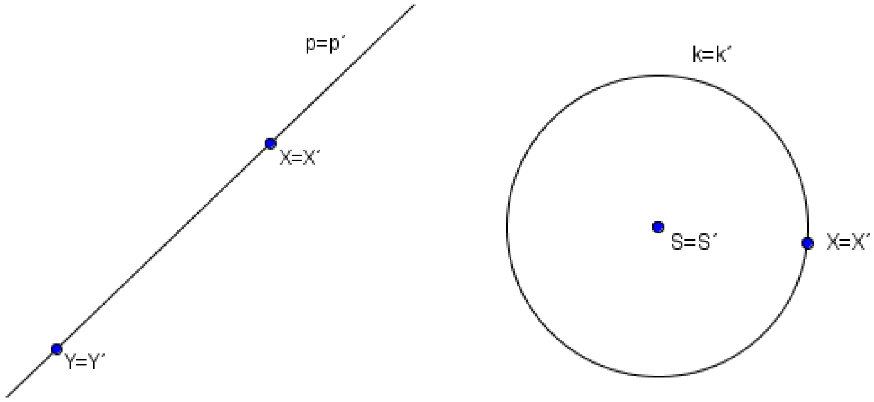
Poznámka. Bod *X* sa nazýva vzor a bod *X´* obraz v danom zobrazení.

Zhodné zobrazenia sú zobrazenia, v ktorých vytvorený obraz je zhodný zo vzorom, t. j. obraz závisí od vzoru, mení sa podľa vzoru.

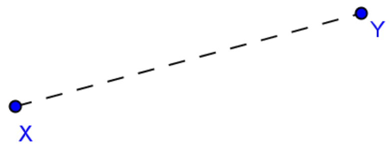
Ak sa bod *X* zobrazí na ten istý bod *X* (zobrazí sa sám do seba), t. j. $X = Z(X) = X´$, tak bod *X* sa nazýva *samodružným* bodom.

Ak sa priamka *p* zobrazí sama do seba, t. j.$p = p´$, tak je priamka *p* samodružnou priamkou v danom zobrazení. Každý bod na samodružnej priamke je samodružný.

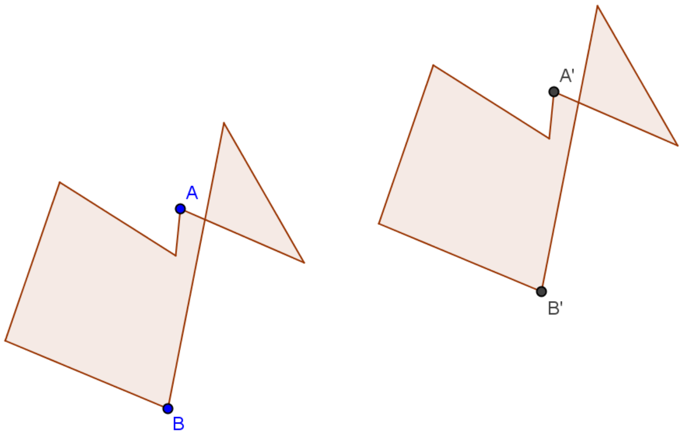
Ľubovoľný rovinný útvar *U* (trojuholník, kružnica, štvoruholník, ...) sa nazýva *samodružným útvarom*, ak sa daný útvar zobrazí sám do seba ($U = Z(U) = U´$), teda každý bod patriaci útvaru je samodružný.



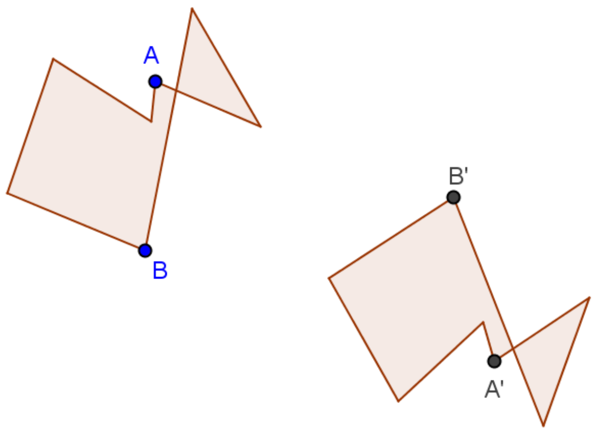
Involútorné zobrazenie je zobrazenie, ktoré ak priradí vzoru *X* obraz *Y*, tak priradí vzoru *Y* obraz *X*.



Priama zhodnosť – orientácia bodov vzoru a obrazu je rovnaká. Útvar sa pri priamej zhodnosti napríklad len posunie alebo otočí (pozri obrázok).



Nepriama zhodnosť – orientácia bodov vzoru a obrazu je opačná, to znamená, že útvar sa v nepriamej zhodnosť „preklopí".



Zhodné zobrazenie v rovine je také zobrazenie, ktoré dvom rôznym bodom *X*, *Y* priradí body *X´*, *Y´* tak, že úsečky *XY*, *X´Y´* sú zhodné.

Pre zhodné zobrazenie základných geometrických útvarov v rovine platia nasledujúce vlastnosti:

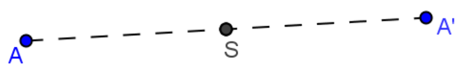
- Obrazom $\overrightarrow{AB}$ v zhodnom zobrazení v rovine je $\overrightarrow{A´B´}$.
- Obrazom $\overleftrightarrow{AB}$ v zhodnom zobrazení v rovine je $\overleftrightarrow{A´B´}$.
- Obrazom $\overrightarrow{pA}$ v zhodnom zobrazení v rovine je $\overrightarrow{p´A´}$.
- Obrazom $\sphericalangle AVB$ v zhodnom zobrazení v rovine je $\sphericalangle A´V´B´$ s ním zhodný.
- Obrazom rovnobežných priamok AB, CD v zhodnom zobrazení v rovine sú rovnobežné priamky $A´B´, C´D´$.
- Dva rovinné útvary sú zhodné práve vtedy, keď sa body jedného útvaru zobrazia do bodov druhého útvaru tak, že úsečky, ktoré si v zobrazení zodpovedajú, sú zhodné.

Ďalej sa konkrétne budeme venovať nasledujúcim zhodným zobrazeniam v rovine:

- stredová súmernosť,
- osová súmernosť,
- posunutie (translácia),
- otočenie (rotácia).

2.3 Stredová súmernosť

Nech *S* je bod v rovine. *Stredovou súmernosťou* podľa bodu *S* rozumieme zobrazenie $S(S)$ v rovine, ktoré každému bodu *A* roviny priradí taký bod *A´* roviny, že bod *S* je stredom úsečky *AA´*.

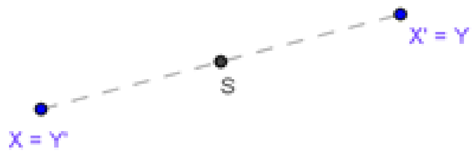


Body *A, A´* sú stredovo súmerné podľa bodu *S*. Bod *S* sa nazýva *stred súmernosti*. Označenie stredovej súmernosti so stredom *S*: $S(S): A \rightarrow A´$.

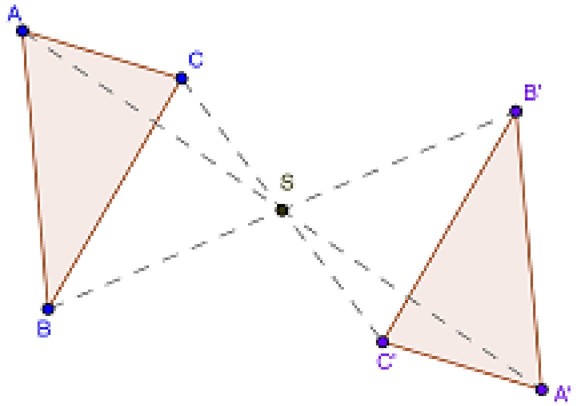
Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom súmernosti *S* alebo dvojicou bodov, ktoré sa na seba zobrazia (vzor – obraz).

Vlastnosti stredovej súmernosti:

- Stredová súmernosť je involutórne zobrazenie.



- Samodružným bodom je stred súmernosti *S*.
- Stredová súmernosť je priama zhodnosť.



- Priamka, ktorá prechádza stredom súmernosti *S*, je samodružná.
- V stredovej súmernosti so stredom *S* je obrazom každej priamky (neprechádzajúcej stredom *S*) priamka s ňou rovnobežná.
- Obrazom úsečky *AB* v stredovej súmernosti je zhodná úsečka *A´B´*, ktorá je rovnobežná s úsečkou *AB*.

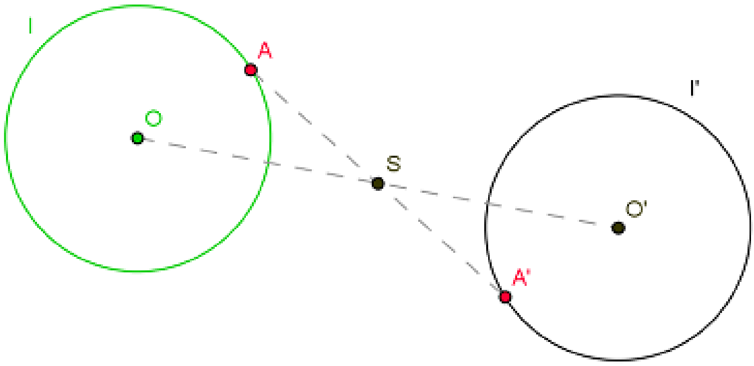
Príklad 1.

Daná je kružnica $l(O,r)$. Zostrojte obraz kružnice *l* v stredovej súmernosti podľa stredu *S*, ktorý je vonkajším bodom kružnice *l*.

Riešenie:

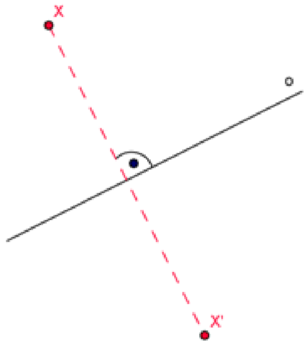
$S(S): l \to l', S \notin l.$

Máme dve možnosti riešenia. Stačí zobraziť v danej stredovej súmernosti len stred *O* kružnice *l*, $S(S): O \to O'$, pretože polomer kružnice *l´* bude mať tiež dĺžku *r*. Iná možnosť riešenia je taká, že zobrazíme v danej stredovej súmernosti stred *O* a ľubovoľný bod *A*, ktoré patria kružnici *l*, $S(S): O \to O', S(S): A \to A'$. Kružnica *l´* bude určená stredom *O´* a polomerom $|O'A'|$.



2.4 Osová súmernosť

Daná je priamka *o* v rovine. *Osová súmernosť v rovine* je zobrazenie $S(o)$, ktoré každému bodu *X* roviny priradí bod *X´* roviny tak, že body *X, X´* ležia na kolmici k priamke *o*, pričom stred úsečky *XX´* leží na priamke *o*.

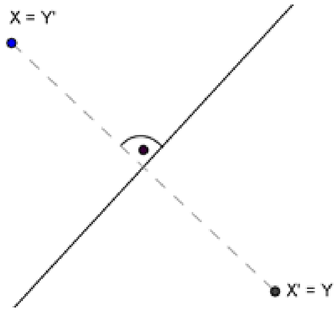


Body *X*, *X´* sú osovo súmerné podľa priamky *o*. Priamku *o* nazývame *os súmernosti*. Označenie osovej súmernosti s osou *o*: $S(o): X \rightarrow X'$.

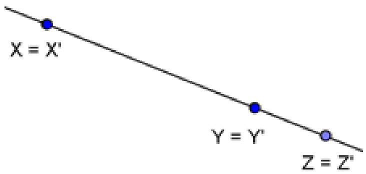
Osová súmernosť je jednoznačne určená osou súmernosti *o* alebo dvojicou bodov, ktoré sa na seba zobrazia (vzor – obraz).

Vlastnosti osovej súmernosti:

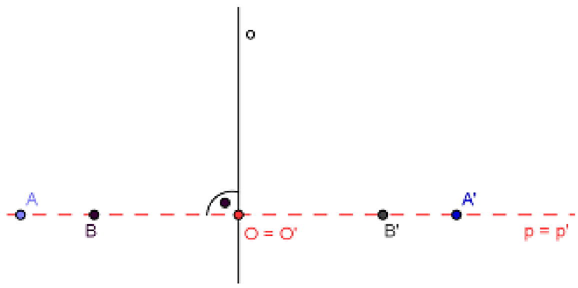
- Osová súmernosť je involutórne zobrazenie.



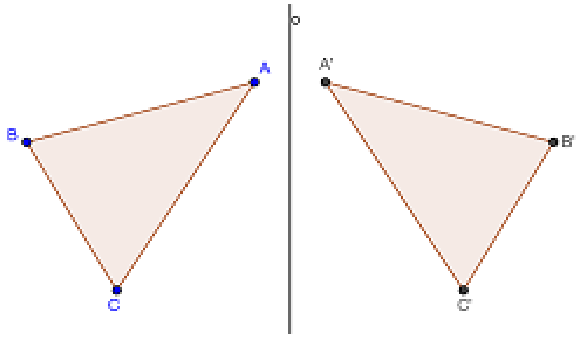
- Samodružné body osovej súmernosti sú všetky body osi súmernosti.



- Priamky kolmé na os súmernosti sú samodružné.



- Osová súmernosť je nepriama zhodnosť.



- Obrazom ľubovoľnej polroviny s hraničnou priamkou *o* je polrovina k nej opačná.
- Osová súmernosť zobrazí útvar na útvar s ním zhodný.

Poznámka. Kružnica sa v osovej súmernosti zobrazí na zhodnú kružnicu, trojuholník na trojuholník s ním zhodný, obrazom ľubovoľnej priamky v osovej súmernosti je priamka, úsečka sa zobrazí na úsečku, ktorá je s ňou zhodná, dvojica rovnobežiek sa zobrazí na dvojicu rovnako vzdialených rovnobežiek.

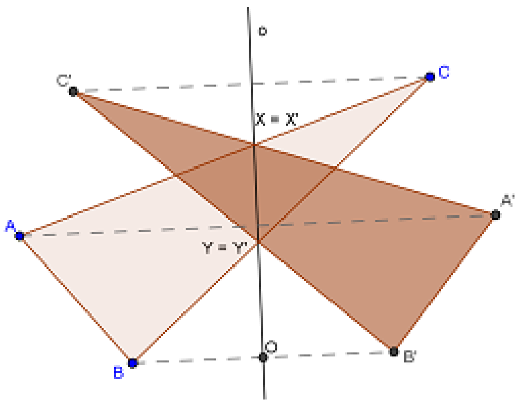
Príklad 2.

Daný je trojuholník *ABC* a priamka *o*, ktorá pretína dve strany trojuholníka. Zostrojte obraz trojuholníka *ABC* podľa osi *o*.

Riešenie:

$S(o): ABC \to A'B'C'.$

Obrazom trojuholníka *ABC* v osovej súmernosti podľa osi *o* je trojuholník *A´B´C´* s ním zhodný. Na jeho zostrojenie stačí zobraziť v danej súmernosti všetky jeho vrcholy. Popíšeme zobrazenie bodu B v osovej súmernosti podľa osi *o*. Bodom *B* vedieme kolmicu na os *o*, kolmica pretne os v bode *O* a bod *B´* dostaneme tak, že bod *O* je stredom úsečky *BB´*. Podobne zostrojíme obrazy zvyšných dvoch vrcholov *A*, *C* trojuholníka *ABC*. Os *o* pretne podľa zadania trojuholník *ABC* v dvoch rôznych bodoch *X*, *Y*, a teda tieto body sú samodružnými bodmi v danej osovej súmernosti $(X = X', Y = Y')$.



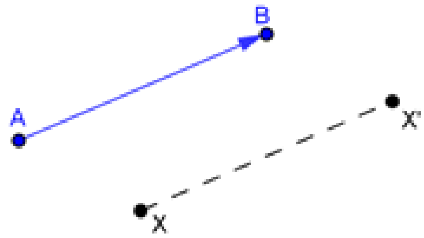
2.5 Posunutie

V posunutí dané útvary posúvame daným smerom o danú vzdialenosť. Keďže môžeme útvar posúvať dvoma smermi o pevne zvolenú vzdialenosť, zavedieme pojem orientovaná úsečka.

Orientovaná úsečka je úsečka $\overrightarrow{AB}$, ktorej krajné body majú určené poradie, t. j. bod *A* je začiatočný bod, bod *B* je koncový bod úsečky. *Dĺžkou orientovanej úsečky* $\overrightarrow{AB}$ nazývame dĺžku úsečky *AB*.

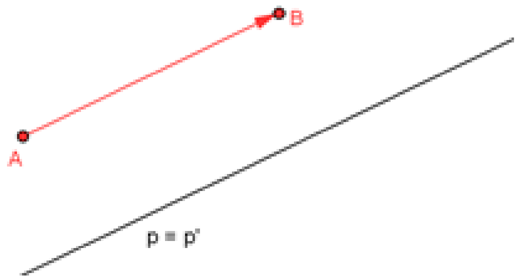
Posunutie (translácia) určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ je zobrazenie $T\left(\overrightarrow{AB}\right)$, ktoré každému bodu *X* priradí bod *X´* tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{XX'}$ sú zhodné a rovnako orientované.

Posunutie je jednoznačne určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, ale aj dvojicou bodov, ktoré sa na seba zobrazia. Označenie posunutia: $T\left(\overrightarrow{AB}\right): X \to X'$.

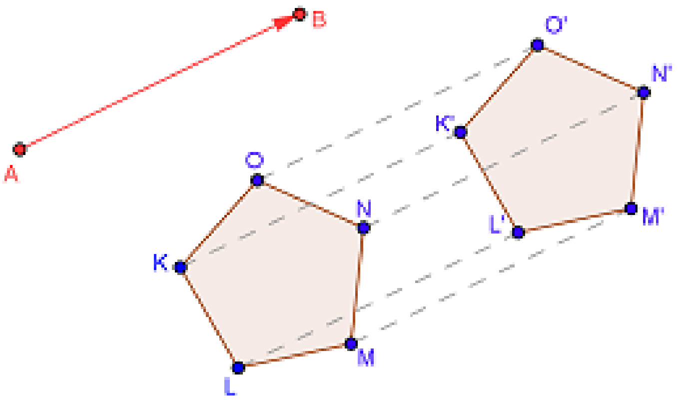


Vlastnosti posunutia:

- Posunutie nie je involutórne zobrazenie.
- Posunutie nemá samodružné body.
- Samodružné priamky sú všetky priamky rovnobežné s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$.



- Posunutie je priama zhodnosť.



- Obrazom ľubovoľnej priamky v posunutí je priamka s ňou rovnobežná.
- Obrazom úsečky *XY* v posunutí je úsečka *X´Y´* s ňou zhodná a rovnobežná.

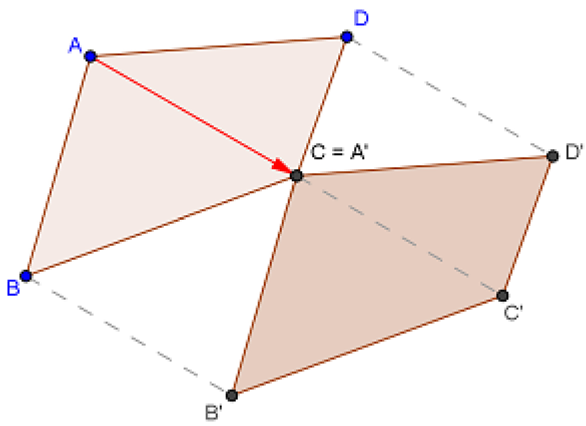
Príklad 3.

Zostrojte obraz štvoruholníka *ABCD* v posunutí určenom orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CA}$.

Riešenie:

$T(\overrightarrow{CA}): ABCD \rightarrow A'B'C'D'.$

Obrazom štvoruholníka *ABCD* v posunutí, ktoré je určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CA}$, je štvoruholník *A´B´C´D´* zhodný so štvoruholníkom *ABCD*. Na jeho zostrojenie nám stačí posunúť napríklad jednotlivé vrcholy daného štvoruholníka. To znamená, že budeme vrcholy posúvať rovnobežne s vektorom $\overrightarrow{CA}$ o dĺžku úsečky *CA*. Bod *A* sa posunie do bodu *C* $(C = A')$.



Príklad môžeme riešiť aj tak, že posunieme len niektoré vrcholy štvoruholníka *ABCD* a obraz štvoruholníka *A´B´C´D´* doplníme podľa vlastnosti, že obrazom úsečky v posunutí je úsečka s ňou zhodná a rovnobežná.

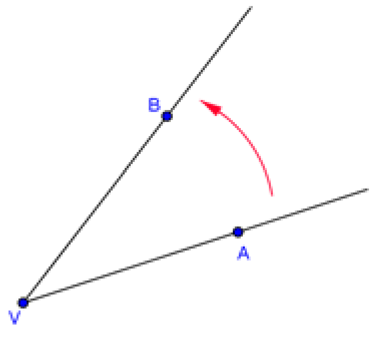
2.6 Otočenie

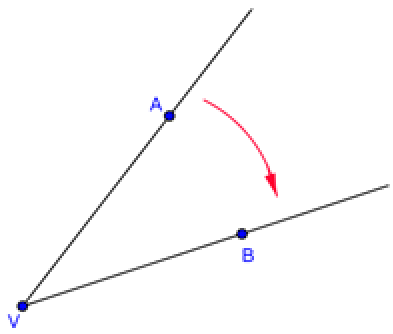
Pri otočení máme znovu dve možnosti otáčania, môžeme otáčať proti smeru a v smere hodinových ručičiek. Zavedieme preto pojem orientovaný uhol.

Orientovaným uhlom AVB rozumieme usporiadanú dvojicu polpriamok $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ so spoločným začiatkom *V*. Polpriamky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ nazývame ramená orientovaného uhla, $\overrightarrow{VA}$ je začiatočné rameno, $\overrightarrow{VB}$ je koncové rameno, bod *V* je vrchol uhla.

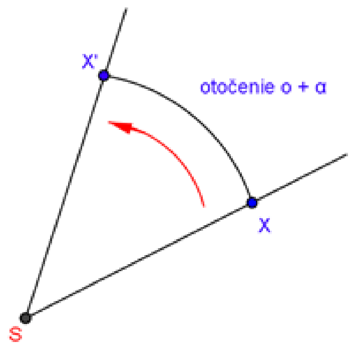
Pod veľkosťou orientovaného uhla AVB budeme rozumieť veľkosť konvexného alebo nekonvexného uhla AVB, ktorý vytvoríme otočením polpriamky $\overrightarrow{VA}$ do polpriamky $\overrightarrow{VB}$ pri pohybe v kladnom zmysle (proti smeru hodinových ručičiek) alebo v zápornom zmysle (v smere hodinových ručičiek).

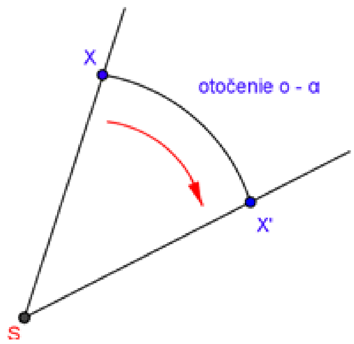
Ak splývajú polpriamky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ rozumieme základnou veľkosťou orientovaného uhla AVB veľkosť nulového uhla.





Nech je daný bod *S* a veľkosť orientovaného uhla α. *Otočenie (rotácia)* určené bodom *S* a uhlom α je zobrazenie $R(S,\alpha)$, ktoré každému bodu *X* priraďuje bod *X´* tak, že platí: $|SX| = |SX'|$a orientovaný uhol *XSX´* je zhodný s orientovaným uhlom α.

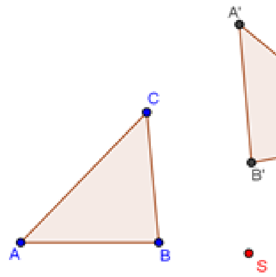




Otočenie je jednoznačne určené stredom a uhlom otáčania. Označenie otočenia: $R(S,\alpha): X \rightarrow X'$.

Vlastnosti otočenia:

- Otočenia pre veľkosť uhla otočenia $\alpha \neq k\pi, k \in R$ nie je involutorným zobrazením.
- Samodružným bodom otočenia je iba bod *S*.
- Otočenie nemá samodružnú priamku pre veľkosť uhla otočenia $\alpha \neq k\pi, k \in R$.
- Otočenie je priama zhodnosť.



- Obrazom ľubovoľnej priamky *p* v otočení so stredom S o uhol α je priamka *p´* rôznobežná s priamkou *p*, pričom vrcholové uhly, ktoré určujú priamky *p*, *p´*, majú veľkosť α.

Poznámka. Otočenie útvaru so stredom *S* a uhlom $180°$ môžeme nahradiť stredovou súmernosťou so stredom *S*. Vyskúšajte to sami na ľubovoľnom útvare.

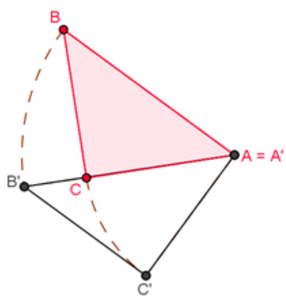
Príklad 4.

Otočte rovnoramenný pravouhlý trojuholník *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C* okolo bodu *A* o uhol $45°$.

Riešenie:

$R(A, 45°): ABC \rightarrow A´B´C´.$

Na zostrojenie otočeného trojuholníka *A´B´C´* využijeme jednotlivé vrcholy trojuholníka, ktoré postupne budeme otáčať okolo stredu *A* o uhol $45°$. Podľa vlastnosti, že samodružným bodom otočenia je iba stred otočenia, vrchol *A* bude samodružným bodom otočenia $(A = A´)$. Zvyšné body *B*, *C* otočíme podľa popisu z definície otočenia, a keďže uhol otočenia je kladné číslo, tak otáčame proti smeru hodinových ručičiek. To znamená, že vedieme polpriamku bodom *A* tak, že uhol polpriamok $|\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB´})| = 45°$, a tiež platí $|AB| = |AB´|$. Podobne otočíme aj vrchol *C*.



2.7 Podobné zobrazenia v rovine. Podobnosť trojuholníkov

Podobné zobrazenie je zvláštnym prípadom zobrazenia.

Zobrazenie f množiny *M* do množiny *M´* sa nazýva *podobné (podobnosťou)* s koeficientom $k \in R^+$ práve vtedy, keď dvom navzájom rôznym bodom *X*, *Y* priradí dva navzájom rôzne body X´, Y´ tak, že platí $\frac{|X'Y'|}{|XY|} = k$. Daný vzťah vieme vysvetliť aj tak, že podobné zobrazenie zachováva pomer dĺžok úsečiek.

Body *X, Y* nazývame vzory, body *X´, Y´* sú ich obrazy. Pre podobnosť útvarov *U*, *U´* sa používa označenie: $U \sim U'$.

V definícii uvedený zápis $k \in R^+$ znamená, že číslo k je reálne a kladné (teda nemôže byť záporné alebo 0). Dôvod je jednoduchý – počítame s dĺžkami úsečiek a každá dĺžka úsečky je vyjadrená kladným číslom.

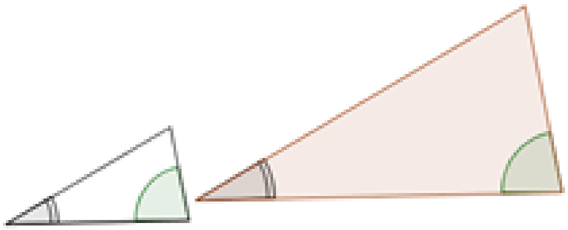
Číslo *k* sa nazýva *koeficient podobnosti* a môže nadobúdať hodnoty:

- $k > 1$, potom hovoríme, že ide o zväčšenie (obraz je „väčší“ ako vzor),
- $k = 1$, potom hovoríme, že ide o zhodnosť (teda obraz a vzor sú rovnako „veľké“), platí teda, že zhodnosť je len špeciálnym prípadom podobnosti,
- $k < 1$, potom hovoríme, že ide o zmenšenie (teda obraz je menší ako vzor).

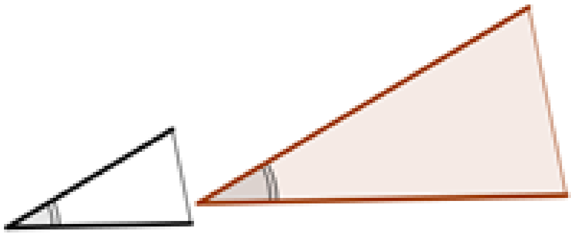
Poznámka. Hodnota koeficientu podobnosti *k* závisí od toho, ktorý útvar považujeme za vzor, a ktorý za obraz.

Platia vety:

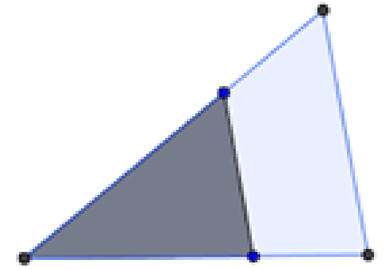
- Ak sú dva útvary podobné, potom sebe odpovedajúce uhly sú zhodné.
- Trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch (veta uu).



- Trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v uhle a v pomere strán ležiacich na jeho ramenách (veta sus).

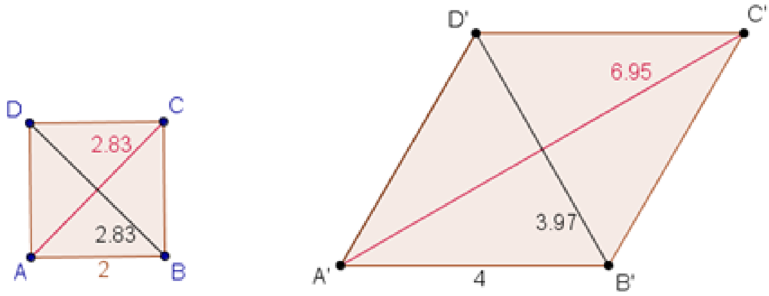


- Trojuholníky sú podobné, ak sú odpovedajúce si strany úmerné (veta sss).



Príklad 5.

Na obrázku sú uvedené dva útvary – štvorec *ABCD* so stranou dĺžky 2 cm a kosoštvorec *A´B´C´D´* so stranou dĺžky 4 cm. Dĺžky uhlopriečok sú vyznačené na obrázku. Zistite, či sú tieto útvary podobné.



Riešenie:

Najskôr vypočítame pomer podobnosti *k*:

$$\frac{|A´B´|}{|AB|} = \frac{4}{2} = 2, \frac{|B´C´|}{|BC|} = \frac{4}{2} = 2, \frac{|C´D´|}{|CD|} = \frac{4}{2} = 2, \frac{|A´D´|}{|AD|} = \frac{4}{2} = 2,$$

pre pomer dĺžok uhlopriečok platí:

$$\frac{|A´C´|}{|AC|} = \frac{6{,}95}{2{,}83} = 2{,}45$$

Z uvedeného vyplýva, že útvary nie sú podobné, pretože nemajú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si úsečiek. Našli sme iný pomer pre dĺžky uhlopriečok $A´C´, AC$, podobne sme mohli uvažovať o dĺžkach uhlopriečok $B´D´, BD$, kde by bol pomer *k* iný než 2.

Príklad 6.

K danému trojuholníku KLM s dĺžkami strán *6 cm, 4 cm, 6 cm* zostrojte dva podobné trojuholníky $K´L´M´, K´´L´´M´´$ postupne s koeficientmi $k´ = \frac{1}{2}, k´´ = \frac{3}{2}$. Sú trojuholníky $K´L´M´, K´´L´´M´´$ tiež podobné?

Riešenie:

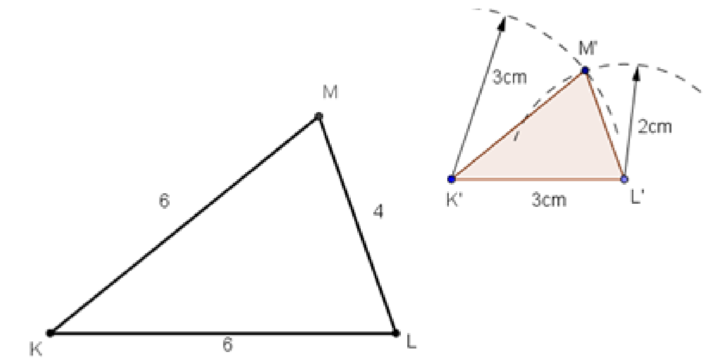
Vypočítame najskôr dĺžky strán $K'L', L'M', K'M'$. Platí:

$$\frac{|K'L'|}{|KL|} = k' = \frac{1}{2} \Rightarrow |K'L'| = \frac{1}{2}|KL| = 3\ cm$$

$$\frac{|L'M'|}{|LM|} = k' = \frac{1}{2} \Rightarrow |L'M'| = \frac{1}{2}|LM| = 2\ cm$$

$$\frac{|K'M'|}{|KM|} = k' = \frac{1}{2} \Rightarrow |K'M'| = \frac{1}{2}|KM| = 3\ cm$$

Trojuholník $K'L'M'$ má polovičné dĺžky strán ako trojuholník KLM. Zostrojíme trojuholník so stranami 3 cm, 2 cm, 3 cm.

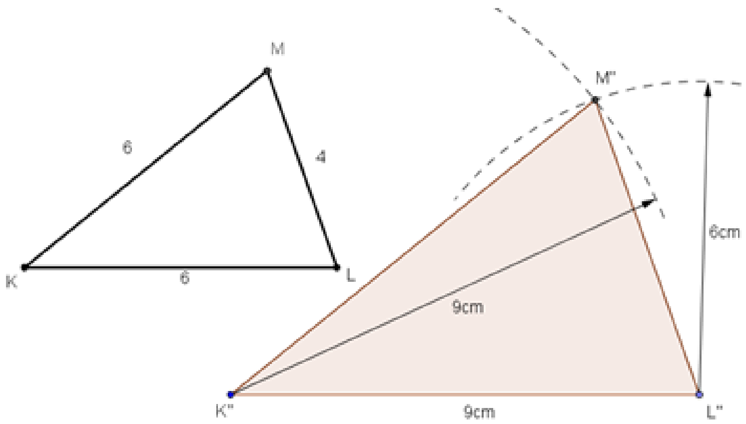


Pre trojuholník $K''L''M''$ platí:

$$\frac{|K''L''|}{|KL|} = k'' = \frac{3}{2} \Rightarrow |K''L''| = \frac{3}{2}|KL| = 9\ cm$$

$$\frac{|L''M''|}{|LM|} = k'' = \frac{3}{2} \Rightarrow |L''M''| = \frac{3}{2}|LM| = 6\ cm$$

$$\frac{|K''M''|}{|KM|} = k'' = \frac{3}{2} \Rightarrow |K''M''| = \frac{3}{2}|KM| = 9\ cm$$



Z uvedených výpočtov je možné vidieť, že v prvom prípade ide o zmenšenie a v druhom o zväčšenie. Trojuholníky $K'L'M', K''L''M''$ sú tiež podobné $(K'L'M' \sim K''L''M'')$ pretože:

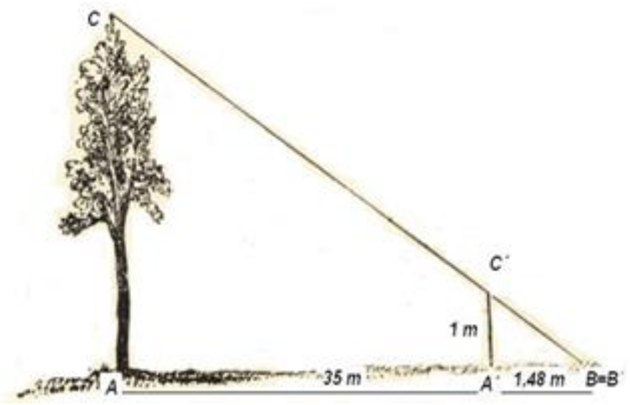
$$\frac{|K''L''|}{|K'L'|} = \frac{|L''M''|}{|L'M'|} = \frac{|K''M''|}{|K'M'|} = \frac{9}{3} = \frac{6}{2} = 3.$$

Príklad 7.

Tieň stromu má dĺžku 35 m, tieň kolmej metrovej tyče má v tom istom čase dĺžku 148 cm. Vypočítajte výšku stromu, ak slnečné lúče považujeme za rovnobežné.

Riešenie:

Označíme si trojuholníky *ABC, A´B´C´*, ktoré sú podobné podľa vety uu, a tiež $B = B'$.



Platí:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

$$\frac{1{,}48}{35} = \frac{1}{|AC|} \Rightarrow |AC| = 23{,}65\ m.$$

Strom je vysoký 23,65 m.

Príklad 8.

Vypočítajte výmeru obdĺžnikového pozemku s rozmermi v pomere 1:2 na pláne v mierke 1:3000, ak v skutočnosti má pozemok 18 ha.

Riešenie:

Označme strany pozemku v skutočnosti ako a', b', pričom tento obdĺžnik je podobný obdĺžniku so stranami a, b. Zo zadania vieme, že platí: $a' = 2b'$ a vypočítame teda skutočné rozmery pozemku nasledovne:

$$S' = 180000\, m^2 = a'.b' = 2.(b')^2$$

$$9.10000\, m^2 = (b')^2$$

$$b' = 300\, m$$

Z uvedeného vyplýva, že pozemok má rozmery 300 m a 600 m. Keďže pozemok v skutočnosti je podobný pozemku, ktorý je zakreslený na mape s mierkou 1:3000, platí 1 mm na mape zodpovedá 3000 mm v skutočnosti, potom

$$\frac{1}{3000} = \frac{a}{300.1000} \Rightarrow a = 100\, mm.$$

Odtiaľ vyplýva, že pre druhý rozmer pozemku je $b = 200\, mm$. Obsah obdĺžnikového pozemku na mape je $S = a.b = 200\, cm^2$.

Príkladom podobného zobrazenia v rovine je *rovnoľahlosť*, ktoré má všetky vlastnosti podobného zobrazenia (uvádzame ich v úvode tejto podkapitoly), ale naviac má takú vlastnosť, že v zobrazení sebe odpovedajúce si priamky (resp. úsečky) sú vždy rovnobežné.

V rovine je daný bod S a $\chi \in R, \chi \neq 0, \chi \neq 1$. Ku každému bodu X (vzor) roviny zostrojíme bod X' (obraz) podľa predpisu:

- Ak $X = S$, potom $X' = S$,
- Ak $X \neq S$, zostrojíme bod X' na priamke $\overleftrightarrow{SX}$ tak, aby pre dĺžky úsečiek SX', SX platil vzťah $\frac{|SX'|}{|SX|} = |\chi|$, pričom, ak $\chi > 0$, zostrojíme bod X' na polpriamke $\overrightarrow{SX}$, ak ale $\chi < 0$, zostrojíme bod X' na opačnej polpriamke k $\overrightarrow{SX}$.

Bod S nazývame *stred rovnoľahlosti*, reálne číslo χ *koeficientom rovnoľahlosti*.

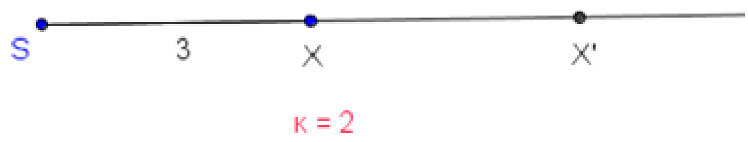
Označenie rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom rovnoľahlosti χ: $H(S, \chi)$: $X \rightarrow X'$.

Príklad 9.

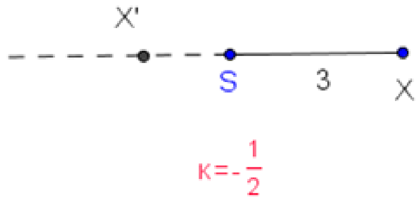
Zobrazte bod *X* v rovnoľahlosti danej stredom rovnoľahlosti *S* ($X \neq S$) a koeficientami $\chi = 2, \chi = -\frac{1}{2}$.

Riešenie:

Keďže $\chi = 2 > 0$, leží bod X' na polpriamke $\overrightarrow{SX}$**.** Zostrojíme teda polpriamku $\overrightarrow{SX}$ a odmeriame vzdialenosť bodov S, X. Zvolili sme si $|SX| = 3\, cm$. Vypočítame vzdialenosť $|SX'| = |SX|.|\chi| = 3.2 = 6\, cm$. Bod X' leží vo vzdialenosti 6 cm od bodu S na polpriamke $\overrightarrow{SX}$**.**



V druhom prípade je $\chi = -\frac{1}{2}$. Keďže $\chi = -\frac{1}{2} < 0$, leží bod X' na opačnej polpriamke k polpriamke $\overrightarrow{SX}$. Zostrojíme opačnú polpriamku k polpriamke $\overrightarrow{SX}$ a odmeriame vzdialenosť bodov S, X. Aj v tomto prípade sme si zvolili $|SX| = 3\ cm$. Vypočítame vzdialenosť $|SX'| = |SX|.|\chi| = 3.\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}\ cm$. Bod X' leží vo vzdialenosti 1,5 cm od bodu S na opačnej polpriamke k $\overrightarrow{SX}$.



Úlohy na precvičenie

1. Dané sú dva štvorce *ABCD, A´B´C´D´* s dĺžkami strán 2cm a 5cm. Zistite, či sú podobné.
2. Dané sú dve kružnice $k(S_1, 3\ cm), l(S_2, 3\ cm)$. Zistite, či sú podobné.
3. Štvorec má dĺžku strany $a = 2\ cm$. Zostrojte podobný štvorec s koeficientom podobnosti $k = 1{,}5$. Ide o zväčšenie?
4. Stredy strán kosoštvorca sú vrcholy rovnobežníka. Sú tieto útvary podobné?
5. Trojuholník *ABC* má vnútorné uhly veľkosti $\alpha = 30°, \gamma = 45°$. Trojuholník *KLM* má vnútorné uhly $\kappa = 105°, \lambda = 30°$. Sú podobné?
6. Rozhodnite, či sú trojuholníky *ABC, A´B´C´* podobné, ak $a = \frac{5}{3}, b = \frac{11}{6}, \gamma = 70°; a' = \frac{5}{2}, b' = \frac{11}{4}, \gamma' = 70°$.
7. Vypočítajte výmeru pozemku, ktorý je na mape v mierke $1{:}10000$ zobrazený plochou $13{,}4\ cm^2$.
8. Budova školy vrhá tieň na rovinu dvora 16 m dlhý a v tom istom čase zvislá metrová tyč vrhá tieň 132 cm dlhý. Zistite výšku budovy školy.

9. Priama cesta rovnomerne stúpa na každých dvoch metroch o 46 cm. O koľko metrov stúpne cesta na vzdialenosti 270 m?

10. Nástupište lanovky, ktorá rovnomerne stúpa, je vzdialené 4200 m od jej cieľového miesta a postavené je o 180 m nižšie. Ako ďaleko od nástupišťa je cestujúci, ak sa nachádza vo výške 50 m nad zemou?

11. Narysujte rovnostranný trojuholník ABC so stranou $a = 3{,}5\ cm$. Zvoľte v jeho vnútri bod M a zostrojte rovnoľahlý trojuholník $A´B´C´$ podľa stredu M a s koeficientom $\chi = -\frac{3}{2}$.

3 Konštrukčné úlohy riešené metódou zhodných a podobných zobrazení

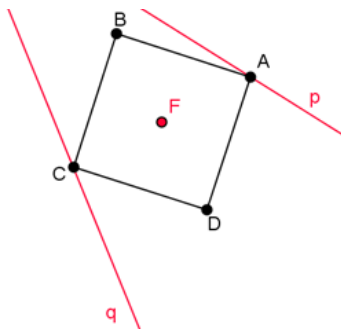
Nasledujúca kapitola bude obsahovať riešené konštrukčné úlohy s využitím metód stredovej súmernosti, osovej súmernosti, otočenia, posunutia, ale aj podobnosti a rovnoľahlosti. Úlohy budú riešené s prihliadaným na jednotlivé fázy riešenia – náčrt, rozbor, postup konštrukcie, konštrukcia, skúška, diskusia, nevyhnutných pri riešení konštrukčných úloh.

Príklad 1.

Dané sú dve rôznobežné priamky *p, q* a bod *F*, ktorý neleží na priamkach. Zostrojte štvorec *ABCD* so stredom *F* tak, aby bod *A* patril priamke *p* a bod *C* priamke *q*.

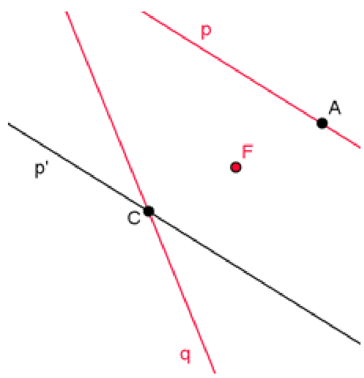
Riešenie:

Náčrt



Rozbor

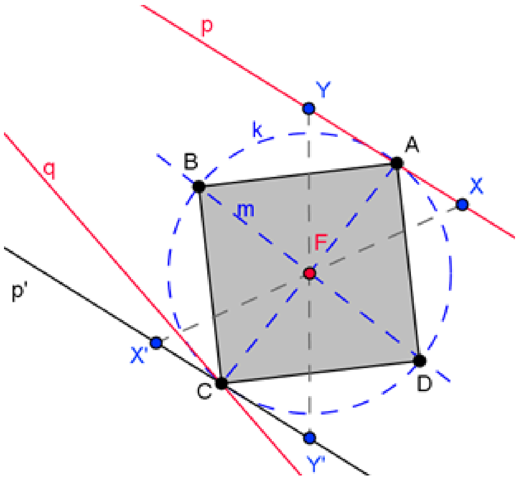
Keď nájdeme z hľadaného štvorca bod *A* alebo bod *C*, tak daný štvorec *ABCD* vieme zostrojiť. Nech máme napríklad bod *A*, ktorý patrí priamke *p*. Potom bod *C* je obrazom bodu *A* v stredovej súmernosti podľa bodu *F*. Tiež platí: bod *A* leží na priamke *p*, tak bod *C* bude ležať na obraze priamky *p´* v stredovej súmernosti podľa bodu *F.* Zo zadania úlohy má teda bod *C* ležať na priamke *q* a zároveň na priamke *p´*.



Postup konštrukcie

1. p, q, F
2. $p\acute{}; S(F): p \rightarrow p\acute{}$
3. $C; C \in q \cap p\acute{}$
4. $A; S(F): C \rightarrow A$
5. $k; k(F, |AF|)$
6. $m; F \in m, m \perp \overleftrightarrow{AC}$
7. $B, D; k \cap m = \{B, S\}$
8. $ABCD$

Konštrukcia



Skúška

Vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia

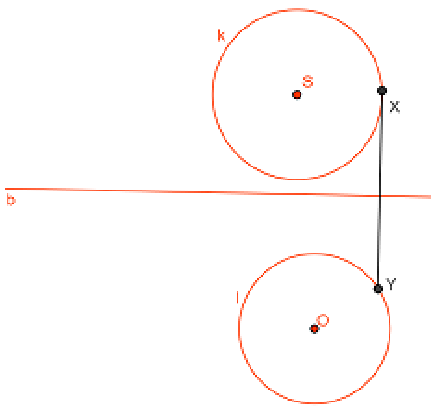
Všetky kroky konštrukcie sú jednoznačné. Úloha má jedno riešenie.

Príklad 2.

Daná je priamka *b* a kružnice *k*, *l*. Zostrojte úsečku *XY* tak, aby bod *X* patril kružnici *k*, bod *Y* patril kružnici *l*, stred úsečky *XY* bol bodom priamky *b*, a aby úsečka *XY* bola kolmá na priamku *b*.

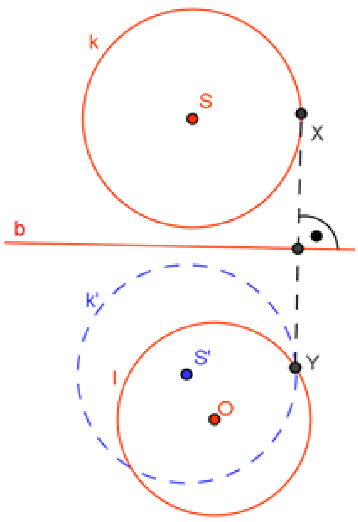
Riešenie:

Náčrt



Rozbor

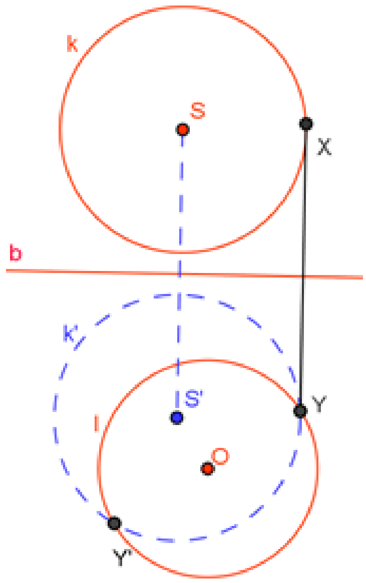
Ak nájdeme bod *X* alebo *Y* podľa podmienok zo zadania úlohy, úsečku *XY* vieme zostrojiť. Nech napríklad máme bod *X*, potom bod *Y* je jeho obraz v osovej súmernosti podľa priamky *b*. Keďže bod *X* leží na kružnici *k*, tak bod *Y* musí ležať na obraze *k´* kružnici *k*, a tiež bod *Y* leží na kružnici *l*.



Postup konštrukcie

1. b, k, l
2. $k'; S(b): k \to k'$
3. $Y; Y \in k' \cap l$
4. $X; S(b): Y \to X$
5. XY

Konštrukcia



Skúška

Vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia

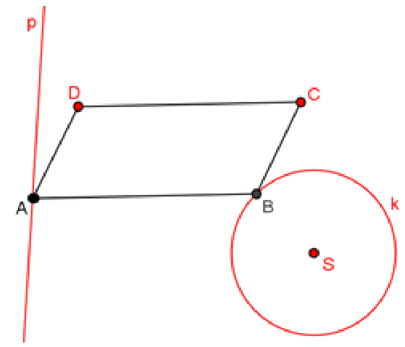
Úloha má najviac dve riešenia, pretože sa kružnice *k´* a *l* pretnú maximálne v dvoch bodoch.

Príklad 3.

Daná je priamka *p*, kružnica *k* a body *C*, *D*. Zostrojte rovnobežník *ABCD*, ak bod *A* patrí priamke *p*, bod *B* patrí kružnici *k*.

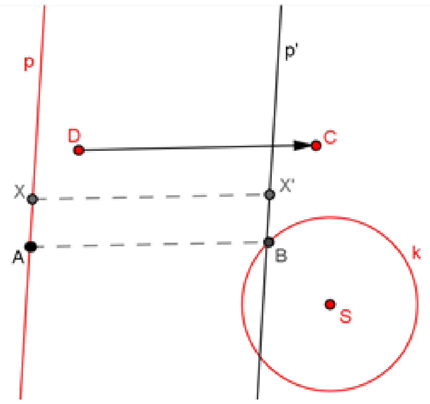
Riešenie:

Náčrt



Rozbor

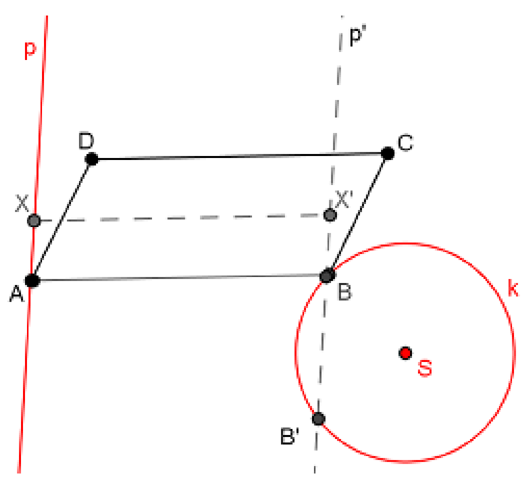
Predpokladajme, že daný rovnobežník *ABCD* máme zostrojený. Keďže máme body *C, D* a strany *AB, CD* rovnobežníka sú navzájom rovnobežné, tak posunutie v smere orientovanej úsečky $\overrightarrow{DC}$ zobrazí bod *A* do bodu *B*. Posunieme preto v smere orientovanej úsečky $\overrightarrow{DC}$ priamku *p*, jej obrazom je priamka *p´*. Bod *B* musí teda ležať aj na priamke *p´*, aj na kružnici *k*.



Postup konštrukcie

1. p, k, C, D
2. $p´; T(\overrightarrow{DC}): p \to p´$
3. $B; B \in p´ \cap k$
4. $A; T(\overrightarrow{CD}): B \to A$
5. $ABCD$

Konštrukcia



Skúška

Vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia

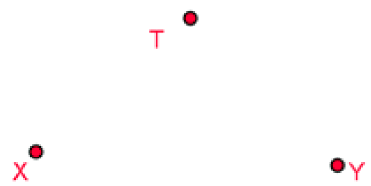
Počet riešení závisí od počtu priesečníkov priamky p' a kružnice k. Úloha má dve riešenia.

Príklad 4.

Z pravidelného šesťuholníka *ABCDEF* zostali len body *T*, *X*, *Y*, pričom bod *T* je stredom šesťuholníka a body *X*, *Y* sú postupne body patriace stranám *AB*, *CD* daného šesťuholníka *ABCDEF*.

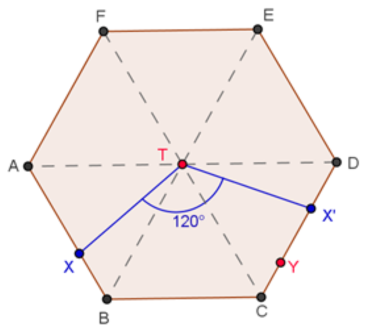
Riešenie:

Náčrt



Rozbor

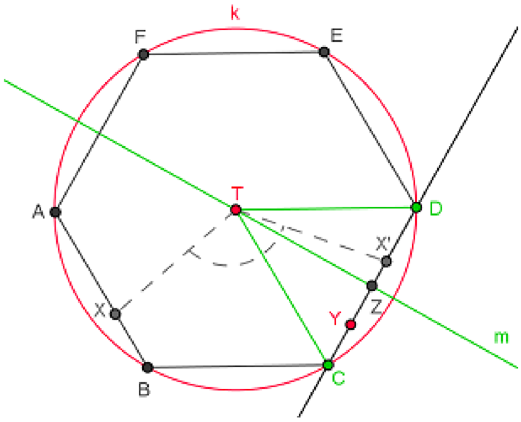
Šesťuholník môžeme otáčať okolo jeho stredu *T* postupne o $60°, 120°, 180°, 240°, 300°$ a vtedy sa zobrazí sám do seba. (Vieme to preto, že šesťuholník vieme rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov, t. j. vnútorné uhly majú veľkosť $60°$). Keďže body *X, Y* ležia na stranách *AB, CD*, vyberieme také otočenie okolo bodu *T*, aby sa otočil bod *X* do bodu *X´*, teda strana *AB* na stranu *CD*. Uhol otočenia bude $120°$. Obrazom bodu *X* v danom otočení je bod *X´*, ktorý sa zobrazí na úsečku *CD*. Potom na priamke $\overleftrightarrow{YX'}$ leží aj úsečka *CD*.



Postup konštrukcie

1. T, X, Y
2. $X'; R(T, 120°): X \rightarrow X'$
3. $m; T \in m, m \perp \overleftrightarrow{YX'}$
4. $Z; Z \in m \cap \overleftrightarrow{YX'}$
5. $C, D;$ C $\in \overleftrightarrow{YX'}, D \in \overleftrightarrow{YX'}, |\sphericalangle CTZ| = |\sphericalangle DTZ| = 30°$
6. $k; k(T, |TC|)$
7. $ABCDEF$

Konštrukcia



Skúška

Vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia

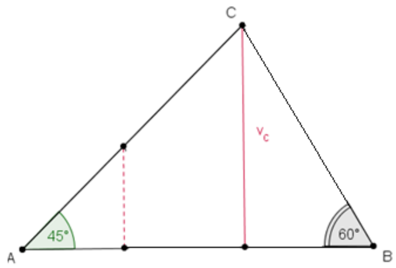
Úloha má jedno riešenie.

Príklad 5.

Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte $\alpha = 45°, \beta = 60°, v_c = 5\ cm$.

Riešenie:

Náčrt



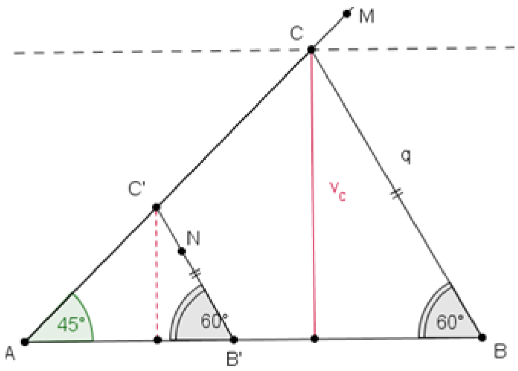
Rozbor

Ak poznáme dva vnútorné uhly α, β, vedeli by sme zostrojiť nekonečne mnoho trojuholníkov, ktoré by mali tieto veľkosti uhlov, ale nemali by predpísanú výšku $v_c = 5\ cm$. Zostrojíme jeden pomocný trojuholník $AB'C'$ s vnútornými uhlami $\alpha = 45°, \beta = 60°$. Ľubovoľne zostrojíme úsečku $A'B'$a dve polpriamky $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'N}$ tak, že $|\sphericalangle B'AM| = 45°$, $|\sphericalangle AB'N| = 60°$. Bod C' je prienikom polpriamok $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'N}$. Pre trojuholníky $AB'C', ABC$ bude platiť, že sú podľa vety *uu* podobné. Vo vzdialenosti $v_c = 5\ cm$ zostrojíme priamku p rovnobežnú s $A'B'$. Bod C je prienikom polpriamky $\overrightarrow{AM}$ a priamky p. Rovnobežka s úsečkou $B'C'$ prechádzajúca bodom C určí bod B.

Postup konštrukcie

1. AB'; $|AB|' - ľubovoľne$
2. $\overrightarrow{AM}$; $|\sphericalangle B'AM| = 45°$
3. $\overrightarrow{B'N}$; $|\sphericalangle AB'N| = 60°$
4. C'; $C' \in \overrightarrow{AM} \cap \overrightarrow{B'N}$
5. $AB'C'$
6. $p; p \parallel \overrightarrow{AB'}, |p, \overrightarrow{AB'}| = 5\ cm$
7. $C; C \in p \cap \overrightarrow{AM}$
8. $q; q \parallel B'C', C \in q$
9. $B; B \in q \cap \overrightarrow{AB'}$
10. ABC

Konštrukcia



Skúška

Trojuholník ABC má vnútorný uhol pri vrchole B veľkosť $\beta = 60°$, pretože $q \parallel B'C'$. Pri vrchole A je zase uhol veľkosti $\alpha = 45°$, pretože $|\sphericalangle B'AM| = 45°$. Trojuholník ABC má výšku $v_c = 5\ cm$, pretože $|p, AB| = 5\ cm$.

Diskusia

Úloha má jedno riešenie, lebo pomocný trojuholník $AB'C'$ je podľa vety *usu* zostrojený jednoznačne a prienik priamok $q, \overrightarrow{AB'}$ je len jeden bod B.

Príklad 6.

Do daného trojuholníka *ABC* vpíšte štvorec *KLMN* tak, aby strana *KL* ležala na strane *AB*, bod *M* ležal na strane *BC* a bod *N* na strane *AC*.

Riešenie:

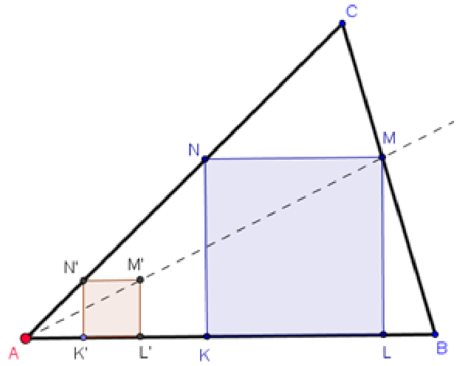
Rozbor

Na konštrukciu štvorec $KLMN$ sú uvedené viaceré podmienky. Zanedbáme podmienku, aby bod M ležal na strane BC. V tomto prípade vieme zostrojiť veľa pomocných štvorcov $K'L'M'N'$ tak, aby jeho strana $K'L'$ ležala na strane AB, bod N' patrí strane AC. Ak použijeme rovnoľahlosť so stredom vo vrchole A trojuholníka ABC, potom zobrazíme pomocný štvorec $K'L'M'N'$ do hľadaného štvorca $KLMN$ tak, že $M \in \overrightarrow{AM'} \cap BC$.

Postup konštrukcie

1. ABC
2. $K'L'M'N' - pomocný\ štvorec$
3. $M; M \in \overrightarrow{AM'} \cap BC$
4. $KLMN$

Konštrukcia



Skúška

Zostrojený štvorec *KLMN* spĺňa podmienky zo zadania úlohy.

Diskusia

Úloha má najviac jedno riešenie. Ak je trojuholník *ABC* tupouhlý s tupým uhlom vo vrchole *A*, úloha nemá riešenie, pretože strana *KL* by neležala na strane *AB*, ale na priamke $\overleftrightarrow{AB}$.

Úlohy na precvičenie

1. Daná je priamka *p*, kružnica *k* a dva rôzne body *S*, *O*. Zostrojte trojuholník *ABC* tak, aby bod *A* ležal na priamke *p*, bod *B* na kružnici *k* a body *S*, *O* boli postupne stredmi strán *AC*, *BC* trojuholníka *ABC*.
2. Body *X*, *Y*, *V* patria stranám postupne ležiacich na priamkach $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ obdĺžnika *ABCD* a bod *Z* je priesečník uhlopriečok daného obdĺžnika. Zostrojte obdĺžnik *ABCD*.
3. Dané sú dve sústredné kružnice *k*, *l* a bod *S*, ktorý leží na kružnici s menším polomerom. Zostrojte rovnobežník so stredom *S*, ktorého vrcholy ležia na daných kružniciach *k*, *l*.
4. Dané sú dve kružnice *k*, *l* a priamka *p*. Zostrojte rovnostranný trojuholník *ABC*, ktorého ťažnica t_c leží na priamke *p* a vrcholy *A*, *B* ležia postupne na kružniciach *k*, *l*.
5. Daná je priamka *p* a dva rôzne body *A*, *B*, ktoré ležia v jednej z polrovín s hraničnou priamkou *p*. Nájdite bod *X* na priamke *p*, aby súčet úsečiek *AX*, *BX* bol minimálny.
6. Dané sú dve rovnobežné priamky *x*, *y* a priamka *z* s nimi rôznobežná. Zostrojte štvorec *XYZV*, ktorého vrchol *X* leží na priamke *x*, vrchol *Z* na priamke *z* a uhlopriečka *YV* je časťou priamky *y*.
7. Dané sú dve kružnice *k*, *l*, priamka *p* a úsečka *AB*. Zostrojte priamku *q* rovnobežnú s priamkou *p* tak, aby vzdialenosť medzi jej priesečníkmi s kružnicami *k*, *l* bola rovná dĺžke úsečky *AB*.

8. Dané sú rôznobežné priamky *x*, *y*, *z* a kladné číslo *w*. Zostrojte také body *X*, *Y*, ktoré ležia postupne na priamkach *x*, *y* tak, aby priamka $\overleftrightarrow{XY}$ bola rovnobežná s priamkou *z* a dĺžka úsečky *XY* sa rovnala číslu *w*.

9. Dané sú dve rôznobežné priamky *p*, *q*, bod *T* a rovnoramenný trojuholník *KLM*. Zostrojte trojuholník *TUV* podobný s trojuholníkom *KLM* tak, aby bod *U* patril priamke *p* a bod *V* patril priamke *q*.

10. Zostrojte rovnostranný trojuholník *ABC*, ktorého vrcholy ležia na troch rovnobežných priamkach.

11. Daná je kružnica *k* a dva rôzne body *P*, *Q*. Zostrojte dve rovnobežné priamky *p*, *q* prechádzajúce postupne bodmi *P*, *Q* tak, aby pretínali kružnicu *k* v bodoch *X*, *Y* ohraničujúcich štvrtinu kružnice.

12. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte $\alpha = 60°, \beta = 45°, t_c = 6\ cm$.

13. Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ak poznáte $a = 5\ cm, e: f = 3: 4$.

14. Do polkruhu s priemerom AB vpíšte štvorec $KLMN$ tak, aby strana štvorca KL ležala na AB.

15. Danému ostrouhlému trojuholníku ABC vpíšte obdĺžnik $KLMN$, ktorého strany sú v pomere 3: 2 tak, aby strana MN ležala na strane BC.

16. Vpíšte do daného uhla AVB kružnicu, ktorá prechádza bodom M.

4 Geometrické miesta bodov. Konštrukčné úlohy

Podobne ako sme sa venovali konštrukčným úlohám v 3. kapitole, tak na ňu nadviažeme, ale teraz v konštrukčných úlohách budeme využívať vlastnosti množín s danou vlastnosťou. V nasledujúcej podkapitole najskôr uvedieme prehľad najdôležitejších geometrických miest bodov s konkrétnou vlastnosťou.

4.1 Geometrické miesta bodov v rovine

Geometrický útvar vytvorený všetkými bodmi s danou vlastnosťou (geometrické miesto bodov) je útvar, ktorého všetky body spĺňajú dve podmienky:

- každý bod, ktorý má predpísanú vlastnosť, patrí tomuto útvaru,
- každý bod tohto útvaru má predpísanú vlastnosť.

Pri riešení konštrukčných úloh v rovine hľadáme a zostrojujeme jeden alebo niekoľko neznámych bodov. Každý z nich je charakterizovaný svojimi vlastnosťami, ktoré musíme zistiť. Tieto vlastnosti nám umožňujú zaradiť neznáme body do niektorých množín všetkých bodov s danou vlastnosťou. Ak poznáme dve takéto vlastnosti neznámeho bodu, resp. neznámych bodov, môžeme zostrojiť dve príslušné množiny všetkých bodov s danou vlastnosťou. Body, ktoré spĺňajú jednu z podmienok, tvoria množinu *M* a body, ktoré spĺňajú druhú podmienku tvoria množinu *M´*. Riešením úlohy sú spoločné body týchto množín, t. j. prienik množín *M* a *M´*. Ak je prienikom prázdna množina, úloha nemá vyhovujúce riešenie.

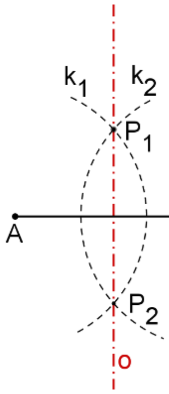
Najznámejšie geometrické miesta bodov využívané v planimetrických konštrukčných úlohách sú:

Os úsečky je množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od krajných bodov úsečky.

Konštrukčný postup osi úsečky *AB*

1. AB
2. $k_1; k_1(A,r), r > \frac{1}{2}|AB|$
3. $k_2; k_2(B,r), k_2; k_2(B,r)$
4. $P_1, P_2; k_1 \cap k_2 = \{P_1, P_2\}$
5. $o; o = \overleftrightarrow{P_1P_2}$

Konštrukcia osi o úsečky *AB*

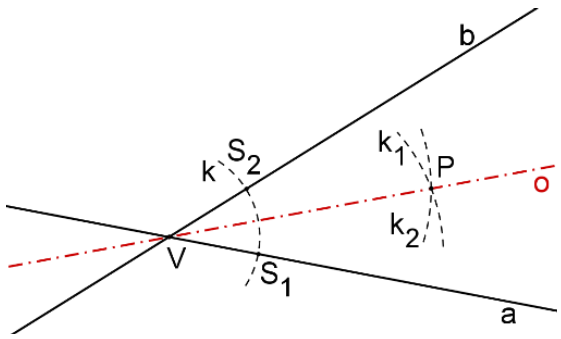


Os uhla rôznobežiek je množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od daných rôznobežiek (uhol rôznobežiek je ostrým uhlom).

Konštrukčný postup osi uhla o rôznobežiek *a*, *b*

1. $a, b, V; a \nparallel b, V \in a \cap b$
2. $k; k(V, r), r$ ... *ľubovoľný*
3. $S_1, S_2;\ S_1 \in k \cap a, S_2 \in k \cap b$
4. $k_1, k_2; k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_1),\ r_1$ ... *ľubovoľný*
5. $P; P \in k_1 \cap k_2, P \in \sphericalangle S_1VS_2$
6. $o; o = \overleftrightarrow{VP}$

Konštrukcia osi uhla o rôznobežiek *a*, *b*



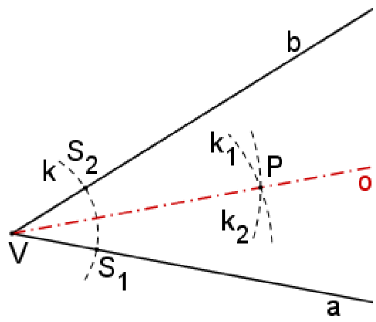
Os konvexného uhla je množinou všetkých bodov daného uhla (polpriamka), ktoré majú rovnakú vzdialenosť od jeho ramien.

Konštrukčný postup osi *o* konvexného uhla

1. $a, b, V; a \nparallel b, V \in a \cap b$
2. $k; k(V, r), r$ ... *ľubovoľný*
3. $S_1, S_2;\ S_1 \in k \cap a, S_2 \in k \cap b$
4. $k_1, k_2; k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_1),\ r_1$ ... *ľubovoľný*

5. $P; P \in k_1 \cap k_2, P \in \sphericalangle S_1VS_2$
6. $o; o = \overrightarrow{VP}$

Konštrukcia osi *o* konvexného uhla

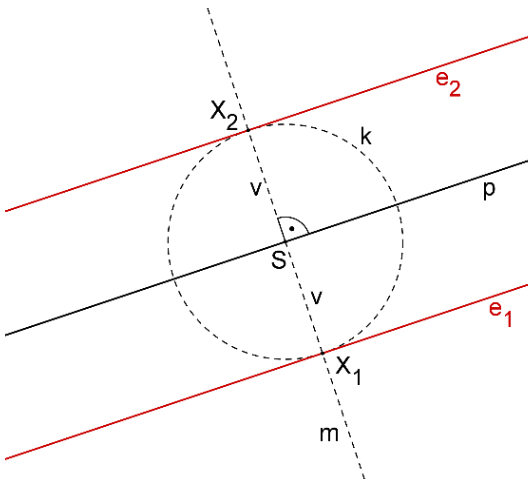


Ekvidištanta priamky je množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť *v* od danej priamky.

Konštrukčný postup ekvidištanty e_1, e_2 priamky *p*

1. $p, m; m \perp p$
2. $S; S \in m \cap p$
3. $k; k(S, r = v)$
4. $X_1, X_2; m \cap k = \{X_1, X_2\}$
5. $e_1;\ X_1 \in e_1, e_1 \perp m$
6. $e_2;\ X_2 \in e_2, e_2 \perp m$

Konštrukcia ekvidištanty e_1, e_2 priamky *p*

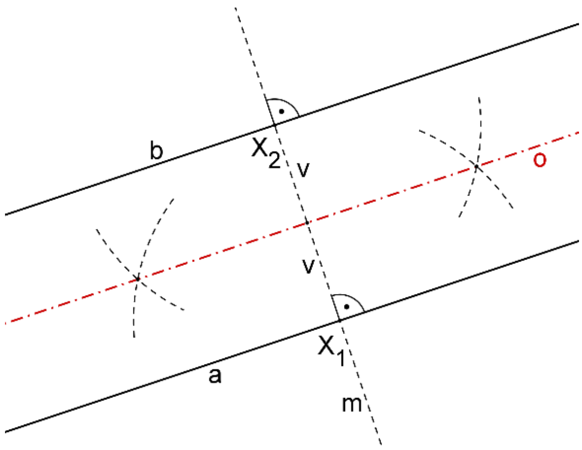


Os rovinného pása je množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť *v* od dvoch rovnobežných priamok.

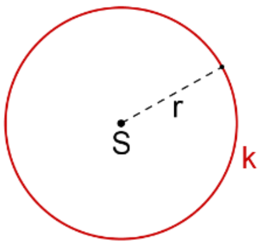
Konštrukčný postup osi o rovinného pása

1. $a, b; a \parallel b$
2. $X_1; X_1 \in a$
3. $m;\ X_1 \in m, m \perp a$
4. $X_2; X_2 \in m \cap b$
5. $o; o$ ... os X_1X_2

Konštrukcia osi o rovinného pása



Kružnica je množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť *r* od daného bodu *S*. Vzdialenosť *r* nazývame polomer kružnice a bod *S* je stred kružnice.

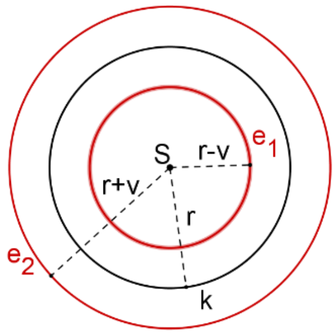


Ekvidištanta kružnice je množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť *v* od danej kružnice, pričom $0 < v < r$. Ekvidištanta kružnice je sústredná kružnica s danou kružnicou.

Konštrukčný postup ekvidištanty e_1, e_2 kružnice k

1. $k; k(S, r)$
2. $e_1;\ e_1(S, r - v), 0 < v < r$
3. $e_2;\ e_2(S, r + v)$

Konštrukcia ekvidištanty e_1, e_2 kružnice k

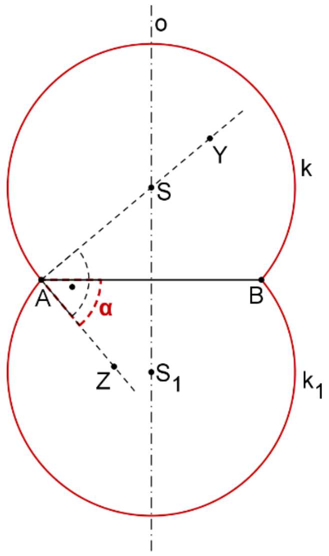


Nech je daná úsečka AB a uhol α, $0° < \alpha < 180°$. Množinou všetkých vrcholov X uhlov $\sphericalangle AXB$ v rovine, pre ktoré platí $|\sphericalangle AXB| = \alpha$, je kružnicový oblúk AXB a jeho obraz v osovej súmernosti s osou $\overleftrightarrow{AB}$ okrem bodov A, B. Túto množinu často označujeme ako *množinu G*.

Konštrukčný postup množiny *G*

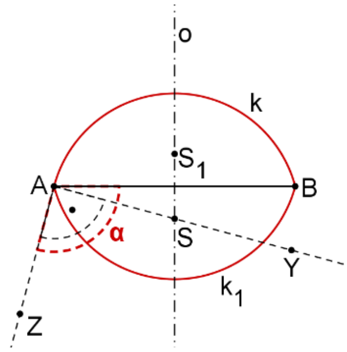
1. AB
2. $\sphericalangle BAZ$; $|\sphericalangle BAZ| = \alpha$
3. $\overrightarrow{AY}$; $\overrightarrow{AY} \perp \overrightarrow{AZ}$
4. o; o … os AB
5. $S; S \in o \cap \overrightarrow{AY}$
6. $S_1; O(\overleftrightarrow{AB}): S \rightarrow S_1$
7. $k; k(S, r = |SA|)$
8. $k_1; k_1(S_1, r = |S_1A|)$
9. množinou G sú väčšie oblúky kružníc k, k_1 nad úsečkou AB

Konštrukcia množiny *G* $(0° < \alpha < 90°)$



Ak pre uhol α platí $90° < \alpha < 180°$, tak v konštrukcii množiny *G* využijeme predchádzajúci postup. Množinou *G* sú potom menšie oblúky kružníc k, k_1 nad úsečkou AB.

Konštrukcia množiny *G* $(90° < \alpha < 180°)$



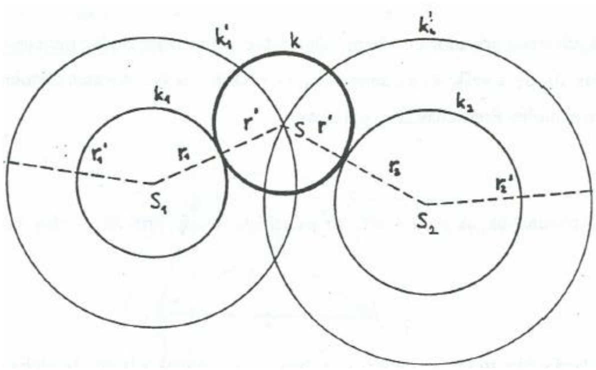
Poznámka. Ak uhol $\alpha = 90°$, tak množinu *G* nazývame Tálesova kružnica, ktorej stredom je stred úsečky *AB* a pre polomer *r* kružnice platí $r = \frac{|AB|}{2}$ okrem bodov *A*, *B*.

Príklad 1.

Zostrojte kružnicu, ktorá má polomer *r* a dotýka sa dvoch daných kružníc $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ zvonka.

Riešenie:

Náčrt



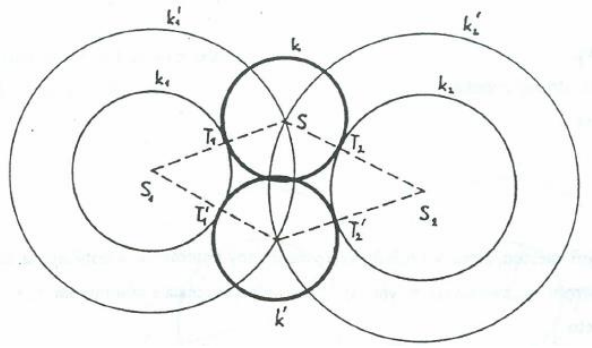
Rozbor

Geometrickým miestom stredov kružníc, ktoré majú daný polomer *r* a dotýkajú sa danej kružnice s polomerom r_1 zvonka, je sústredná kružnica s polomerom $r_1 + r$. Preto platí, že stredy kružníc, ktoré sa daných kružníc k_1 a k_2 dotýkajú zvonka, sú spoločné body kružníc $k_1'(S_1, r_1 + r)$, $k_2'(S_2, r_2 + r)$.

Postup konštrukcie

1. $k_1, k_2;\ k_1(S_1, r_1),\ k_2(S_2, r_2)$
2. $k_1';\ k_1'(S_1, r_1' = r_1 + r)$
3. $k_2';\ k_2'(S_2, r_2' = r_2 + r)$
4. $S;\ S \in k_1' \cap k_2'$
5. $k;\ k(S, r)$

Konštrukcia



Skúška

Stredom kružnice *k* je bod *S*, ktorý je od kružníc k_1, k_2 vzdialený o daný polomer *r*. Teda kružnica *k* sa dotýka kružnice k_1 v bode T_1, kružnice k_2 v bode T_2 a stred *S* leží na kružniciach k_1', k_2' s polomermi $r_1 + r, r_2 + r$. Kružnica *k* vyhovuje podmienkam úlohy.

Diskusia

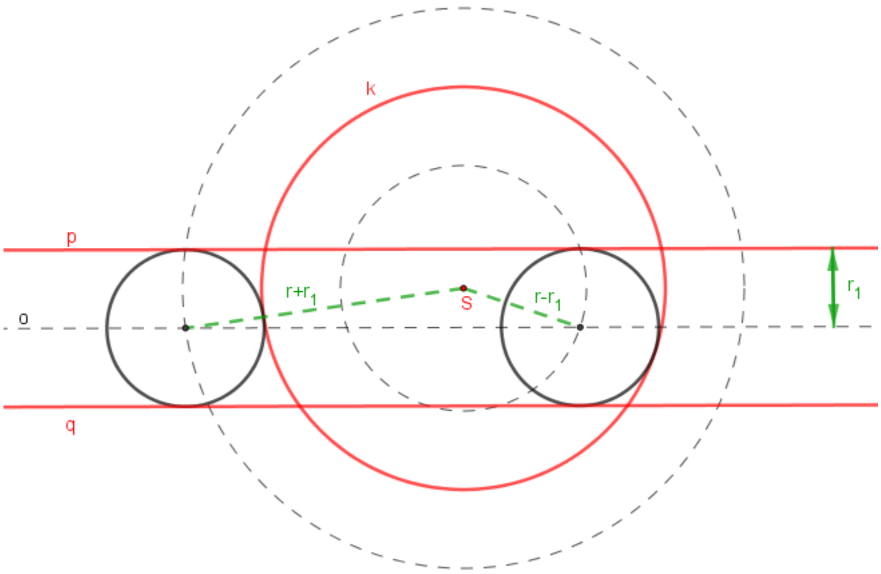
Úloha môže mať dve, jedno alebo žiadne riešenie podľa polohy stredov S_1, S_2 a dĺžky polomerov r_1, r_2, r.

Príklad 2.

Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka dvoch daných rovnobežných priamok *p*, *q* a danej kružnice $k(S, r)$.

Riešenie:

Náčrt



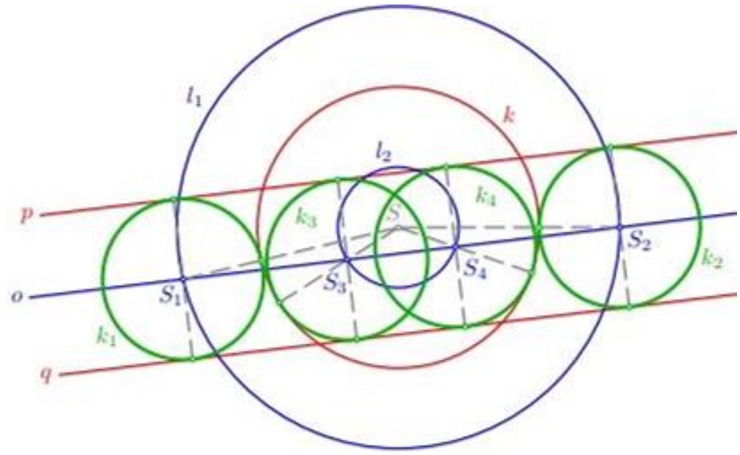
Rozbor

Geometrickým miestom bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od dvoch rôznych rovnobežných priamok, je os rovinného pásu (vzdialenosť osi od priamok označme r_1). Geometrickým miestom stredov kružníc, ktoré majú polomer r_1 a dotýkajú sa danej kružnice s polomerom r zvonka aj zvnútra, sú sústredné kružnice s polomerom $r + r_1, r - r_1$.

Postup konštrukcie

1. $p, q, k; p \parallel q, k(S, r)$
2. $o;\ o = \{X \in \rho, |X, p| = |X, q| = r_1\}$
3. $l_1;\ l_1(S, r + r_1)$
4. $l_2;\ l_2(S, r - r_1)$
5. $S_1, S_2; o \cap l_1 = \{S_1, S_2\}$
6. $k_1, k_2; k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_1)$
7. $S_3, S_4; o \cap l_2 = \{S_3, S_4\}$
8. $k_3, k_4; k_3(S_3, r_1), k_4(S_4, r_1)$

Konštrukcia



Skúška

Stredmi kružníc k_1, k_2, k_3, k_4 sú body S_1, S_2, S_3, S_4, ktoré ležia na osi rovinného pásu ohraničeného priamkami *p*, *q* (vzdialenosť tejto osi od priamky *p*, resp. od priamky *q*, je r_1) a sú od kružnice *k* vzdialené o polomer r_1. Kružnice k_1, k_2 sa dotýkajú kružnice k zvonka, kružnice k_3, k_4 sa dotýkajú kružnice k zvnútra. Kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 vyhovujú podmienkam úlohy.

Diskusia

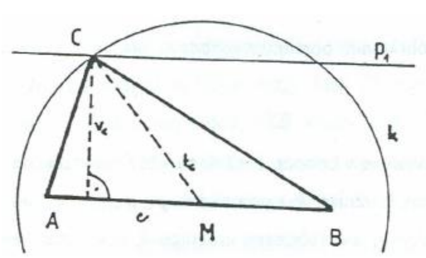
Úloha môže mať štyri alebo žiadne riešenie podľa polohy stredov S_1, S_2, S_3, S_4 a dĺžky polomerov r_1, r.

Príklad 3.

Zostrojte trojuholník *ABC*, ak sú dané dĺžky strany *c*, výšky v_c a ťažnice t_c.

Riešenie:

Náčrt



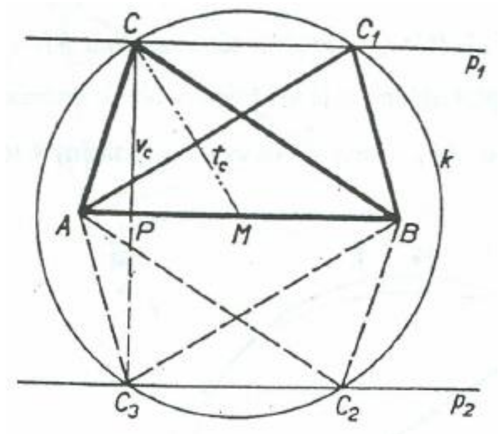
Rozbor

Daná je úsečka *AB* s dĺžkou strany *c*, preto hľadáme vrchol *C*. Ten musí spĺňať dva podmienky, a to, že musí mať od priamky *AB* vzdialenosť v_c, preto geometrickým miestom bodov *C* sú dve rovnobežky p_1, p_2 s priamkou *AB* vo vzdialenosti v_c a zároveň musí mať od stredu *M* strany *AB* vzdialenosť t_c, preto geometrickým miestom bodov *C* je kružnica $k(M, t_c)$.

Postup konštrukcie

1. AB; $|AB| = c$
2. p_1; $p_1 \parallel AB, |p_1, AB| = v_c$
3. M; $|MA| = |MB|$
4. k; $k(M, t_c)$
5. C; $C \in p_1 \cap k$
6. ABC

Konštrukcia



Skúška

Trojuholník *ABC* spĺňa podmienky uvedené v zadaní úlohy, pretože jeho strana je $|AB| = c$, vrchol *C* leží na kružnici *k*, ktorej stred *M* je stredom strany AB a polomer má dĺžku ťažnice t_c, a tiež bod *C* leží na priamke p_1 rovnobežnej so stranou *AB*, pričom vzdialenosť týchto priamok sa rovná dĺžke výšky v_c.

Diskusia

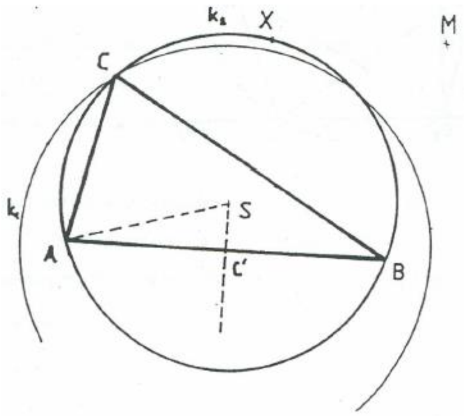
Prvé štyri body uvedené v postupe konštrukcie sú jednoznačné. Počet riešení úlohy závisí od počtu priesečníkov kružnice *k* s priamkami p_1, p_2. Ak je $v_c < t_c$, sú priamky p_1, p_2 sečnicami kružnice *k*, úloha má dve rôzne riešenia, t. j. trojuholníky ABC, ABC_1 pre priamku p_1 a trojuholníky ABC_2, ABC_3 pre priamku p_2. Ak $v_c = t_c$, sú priamky p_1, p_2 dotyčnicami kružnice *k*. Úloha má jedno riešenie pre priamku p_1 (jedno riešenie pre priamku p_2). V každom prípade výsledkom riešenia je rovnoramenný trojuholník. Ak je $v_c > t_c$, sú priamky p_1, p_2 nesečnicami kružnice *k*, úloha nemá žiadne riešenie.

Príklad 4.

Zostrojte trojuholník *ABC*, ak sú dané dĺžky strany *c*, ťažnice t_c a veľkosť uhla γ.

Riešenie:

Náčrt



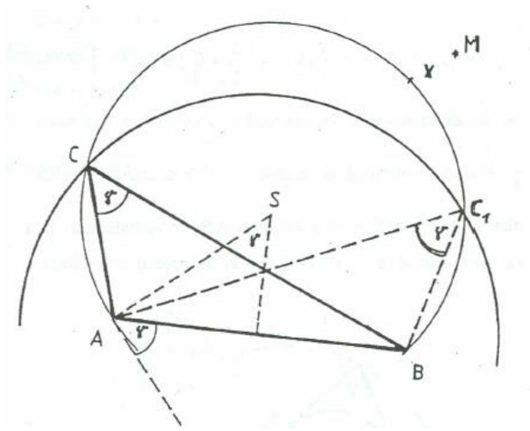
Rozbor

Úsečku *AB* s dĺžkou strany *c* vieme zostrojiť, preto hľadáme vrchol *C*. Vzdialenosť vrcholu *C* od stredu *C′* strany *c* je t_c, t. j. všetky body *C* spĺňajúce túto vlastnosť, a teda ležia na kružnici k_1 (*C′*; t_c). Danú množinu bodov označme ako množinu M_1. Množinou M_2 bodov *C*, z ktorých vidieť úsečku *c* pod uhlom γ, je kružnicový oblúk kružnice k_2 (v jednej polrovine s určujúcou priamkou *AB*), ktorej stredový uhol príslušný k tetive dĺžky *c* má veľkosť 2γ.

Postup konštrukcie

1. AB; $|AB| = c$
2. k_1; $k_1(C', t_c)$
3. k_2; $k_2 = \{X \in \rho, |\sphericalangle AXB| = \gamma\}$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. ABC

Konštrukcia



Skúška

Trojuholník *ABC* spĺňa podmienky úlohy, pretože jeho strana je $|AB| = c$, vrchol *C* leží na kružnicovom oblúku *ACB* kružnice k_2, preto je $|\sphericalangle ACB| = \gamma$.

Diskusia

Počet riešení úlohy závisí od vzájomnej polohy kružníc k_1, k_2, preto môže mať daná úloha dve, jedno alebo žiadne riešenie.

Úlohy na precvičenie

1. Zostrojte trojuholník *ABC*, v ktorom poznáte: $c = 5;\ v_c = 2;\ a = 3.$
2. Zostrojte trojuholník *KLM*, ak poznáte: $|LM| = 6{,}3;\ |\sphericalangle LKM| = 106°;$ $|\sphericalangle LMK| = 47°.$
3. Zostroj trojuholník *KLM*, ak poznáte: $m = 6{,}9;\ v_k = 5{,}9;\ v_l = 4{,}6.$
4. Zostroj trojuholník *KLM*, ak poznáte: $m = 6;\ t_m = 5;\ v_m = 4.$
5. Daná je priamka *w*, na nej leží bod *R* a mimo nej leží bod *Q*. Zostroj kružnicu *k*, ktorá bude prechádzať bodom *Q* a dotýkať sa priamky *w* v bode *R*.
6. Daná je kružnica *k(S,4cm)* a bod *A*. Zostrojte množinu všetkých bodov, ktoré majú od kružnice *k* vzdialenosť 2 cm a od bodu *A* vzdialenosť 3 cm, ak bod *A* leží na kružnici *k*.
7. Daná je kružnica *k(S,3cm)* a priamka *p*, pričom vzdialenosť $|S, p| = 7\ cm.$ Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú kružnice *k*, priamky *p* a majú polomer *2 cm*.
8. Zostrojte trojuholník *ABC* daný dĺžkou strany *c*, ťažnicou t_b a polomerom r kružnice opísanej.
9. Zostrojte trojuholník *ABC*, ak poznáte dĺžku strany *c* a dĺžky ťažníc t_c, t_b.
10. Zostrojte trojuholník *KLM*, ak poznáte dĺžky všetkých troch jeho ťažníc.
11. Zostrojte trojuholník *PQR*, ak poznáte dĺžky všetkých troch jeho výšok.

5 Základné vety stereometrie. Polohové a metrické vlastnosti lineárnych útvarov v priestore

V tretej kapitole sa budeme venovať rovnobežnému premietania z pohľadu jeho definovania a popisu vlastností. Uvedieme najdôležitejšie pojmy a vlastnosti súvisiace s výkladom danej problematiky. Taktiež sme v kapitole spracovali problematiku súvisiacu so zisťovaním polohových a metrických vlastností rôznych lineárnych geometrických útvarov v priestore. Popísané vlastnosti geometrických útvarov budeme demonštrovať aj konkrétnymi príkladmi, ktoré sú vhodne doplnené aj o názorné obrázky.

5.1 Voľné rovnobežné premietanie

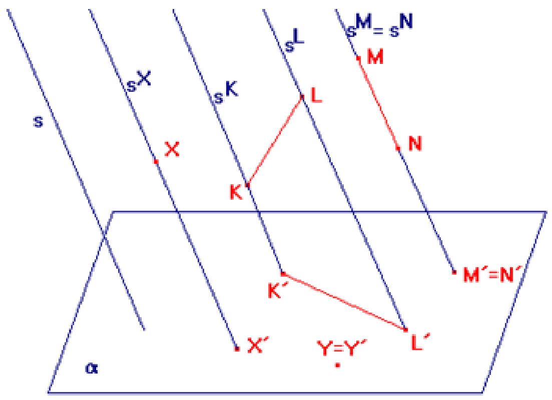
Medzi najpoužívanejšiu metódu zobrazovania v sekundárnom matematickom vzdelávaní patrí voľné rovnobežné premietanie. Ako teda správne znázorniť trojrozmerné teleso v rovine s využitím uvedenej metódy?

Pri riešení úloh v priestore majú významnú úlohu obrázky a náčrtky, a preto treba vedieť s nimi aj pracovať. Priemetom geometrického útvaru vo voľnom rovnobežnom premietaní je geometrický útvar, ktorý pozostáva z rovnobežných priemetov významných bodov zobrazovaného útvaru.

Základom zobrazovania geometrických útvarov vo voľnom voľnobežnom premietaní je rovnobežné premietanie útvaru z trojrozmerného priestoru do jednej roviny. Rovnobežné premietanie je jedna z najjednoduchších zobrazovacích metód, a pritom je dostatočne názorná. Najčastejšie sa vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazujú telesá ako kocka, kváder, kužeľ, valec, guľa a rôzne skupiny telies z nich kombinované (Rumanová a kol., 2022).

Poznámka. Častejšie ako rovnobežné premietanie sa v školskej praxi používa pojem voľné rovnobežné premietanie. Toto premietanie je prípadom rovnobežného premietania z priestoru do roviny, ktoré ale nie je viazané na žiadnu súradnicovú sústavu v priestore.

Uveďme definíciu rovnobežného premietania z priestoru do roviny, ktorú nazývame priemetňa. Daná je ľubovoľná priamka *s* a ľubovoľná rovina α (priamka *s* je rôznobežná s rovinou α). Zobrazenie *f* z priestoru do roviny α, ktoré priraďuje ľubovoľnému bodu *X* bod *X*´, ktorý vznikne prienikom priamky s^X a roviny α, sa nazýva *rovnobežné premietanie s daným smerom premietania s a priemetňou* α (pozri obrázok). Priamka s^X prechádza bodom *X* a je rovnobežná so smerom premietania *s*.



V prípade, že je priamka *s* kolmá na priemetňu *α*, tak premietanie nazývame *kolmým (pravouhlým) premietaním*.

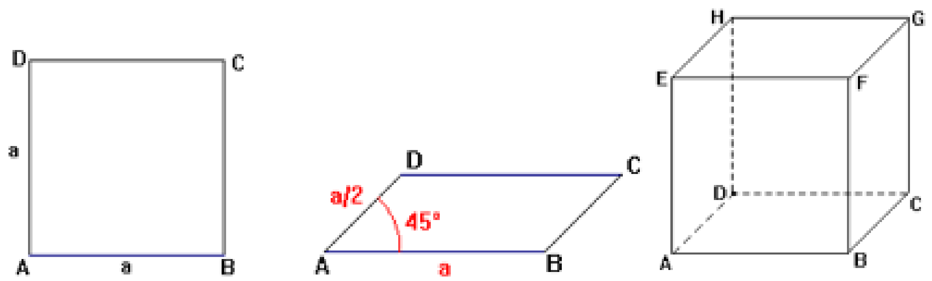
Základné vlastnosti rovnobežného premietania sú:

- Rovnobežným priemetom priamky, ktorá je rovnobežná so smerom premietania, je bod.
- Rovnobežným priemetom priamky, ktorá nie je rovnobežná so smerom premietania, je priamka.
- Rovnobežným priemetom roviny, ktorá je rovnobežná so smerom premietania, je priamka.
- Rovnobežným priemetom roviny, ktorá nie je rovnobežná so smerom premietania, je celá priemetňa.
- Rovnobežné a zhodné úsečky, ktoré nie sú rovnobežné so smerom premietania, sa v rovnobežnom premietaní zobrazia do rovnobežných a zhodných úsečiek.
- Stred úsečky sa v rovnobežnom premietaní zobrazí do stredu úsečky.
- Rovinný útvar, ktorý leží v rovine rovnobežnej s priemetňou, sa v rovnobežnom premietaní zobrazí do zhodného útvaru s daným rovinným útvarom.
- V rovnobežnom premietaní sa zachováva rovnobežnosť a usporiadanie bodov na priamke.
- Ak priamky sú navzájom kolmé (ale žiadna z nich nie je kolmá na priemetňu), tak ich priemety sú tiež kolmé priamky práve vtedy, keď je aspoň jedna z priamok rovnobežná s priemetňou.

Poznámka. Z vlastností rovnobežného premietania je zrejmé, že priemetom bodu je bod. Ak bod leží na priamke, tak aj jeho obraz bude potom ležať na obraze priamky. Zároveň platí, že všetky body priemetne *α* sa zobrazia samé do seba. Rovina rovnobežná s priemetňou sa nazýva priečelná rovina. O telese, ktoré má niektorú zo stien rovnobežnú s priemetňou, potom hovoríme, že je v priečelnej polohe.

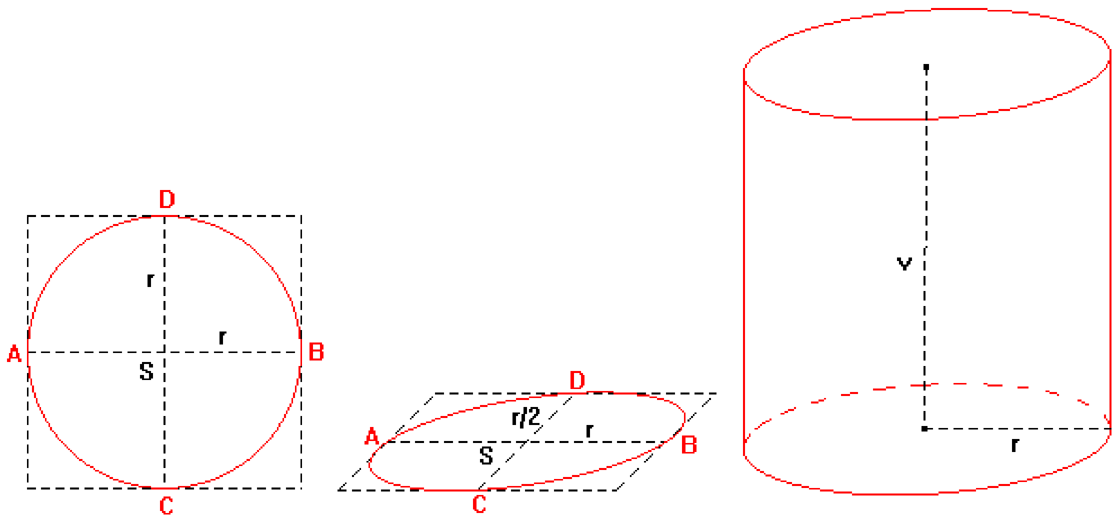
Zobrazovanie telies z priestoru do roviny by malo spĺňať zásady správnosti, názornosti, ale aj jednoduchosti. Niekedy aj správne zostrojený priemet telesa nemusí byť dostatočne názorný (nevieme zistiť vzťahy medzi jednotlivými hranami, stenami telesa alebo iné dôležité vlastnosti telesa). Ďalej popíšeme zobrazenie niektorých základných telies (priestorových geometrických útvarov) vo voľnom rovnobežnom premietaní tak, aby spĺňali všetky spomenuté zásady.

V školskej praxi sa najčastejšie používa také voľné rovnobežné premietanie, v ktorom sa úsečka kolmá na priemetňu zobrazí do úsečky, ktorá zviera uhol 45˚ s obrazom úsečky rovnobežnej s priemetňou. Dĺžka zobrazenej úsečky sa zmenší na polovicu. Na obrázku je naznačená konštrukcia kocky *ABCDEFGH* vo voľnom rovnobežnom premietaní s hranou dĺžky *a*. Priemety úsečiek *AD*, *BC*, *EH* a *FG* sú rovnobežné a rovnako dlhé úsečky.



Poznámka. Pohľady na teleso delíme podľa toho, ako sa na teleso pozeráme, čo u žiakov vzhľadom na ich rôzne úrovne priestorovej predstavivosti môže pri riešení geometrických úloh v priestore spôsobovať problémy. Pohľady na telesá poznáme nasledujúce: pohľad na teleso zdola (podhľad), pohľad na teleso zhora (nadhľad), pohľad zľava a pohľad sprava.

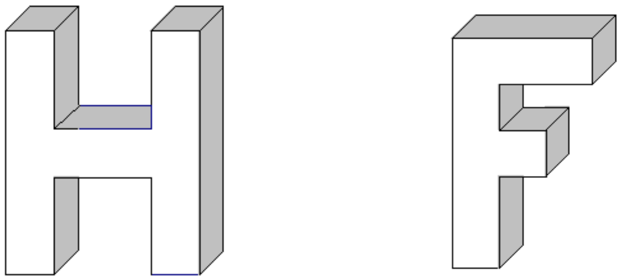
Na ďalšom obrázku je zostrojený priemet valca vo voľnom rovnobežnom premietaní s danou výškou *v* a polomerom podstavy *r*.



Príklad 1.

Zobrazte písmená v tvare H a F vo voľnom rovnobežnom premietaní.

Riešenie:

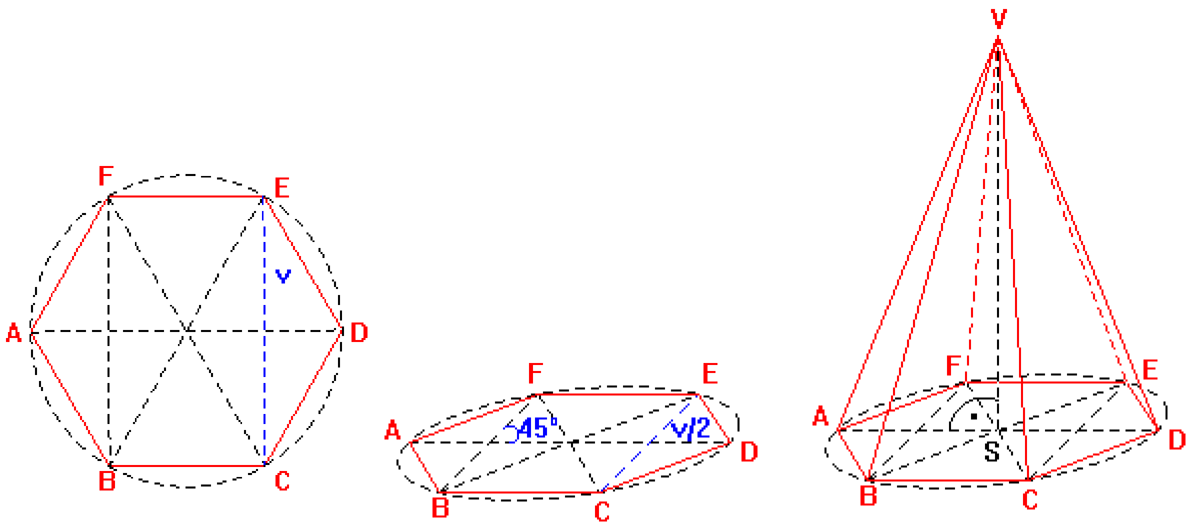


Príklad 2.

Zobrazte pravidelný šesťboký ihlan vo voľnom rovnobežnom premietaní, ktorého podstava leží vo vodorovnej rovine.

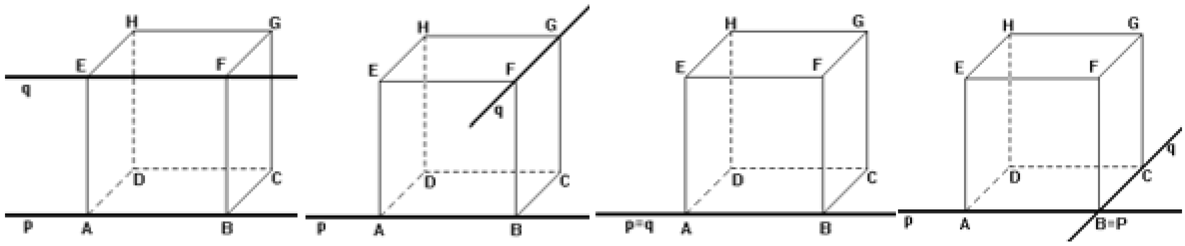
Riešenie:

Pri konštrukcii obrazu pravidelného šesťuholníka si treba uvedomiť vlastnosť zobrazenia vhodnej úsečky podstavy. Konštrukcia daného obrazu podstavy je zrejmá z obrázka.

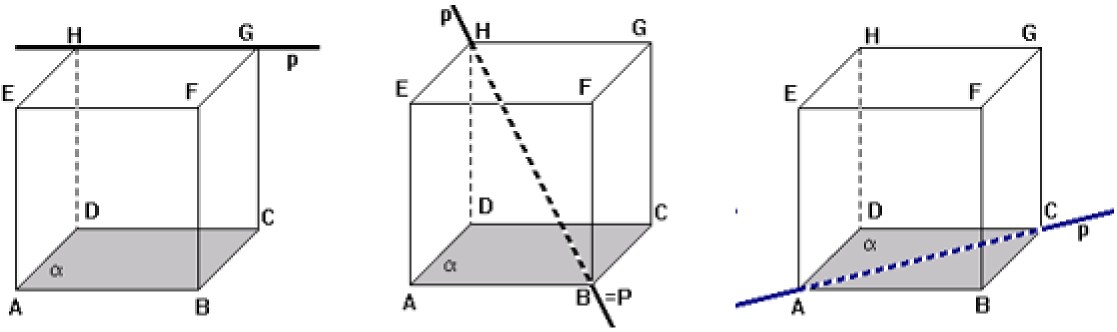


5.2 Polohové vlastnosti lineárnych útvarov v priestore

Pri zisťovaní vzájomnej polohy geometrických útvarov v priestore skúmame, či útvary ležia alebo neležia v spoločnej rovine a či majú spoločné body. Vzájomné polohy dvoch priamok môžeme znázorniť aj na konkrétnom telese, napríklad na kocke *ABCDEFGH*, kde vidieť, že dve priamky môžu byť *rovnobežné, mimobežné, totožné* alebo *rôznobežné*.



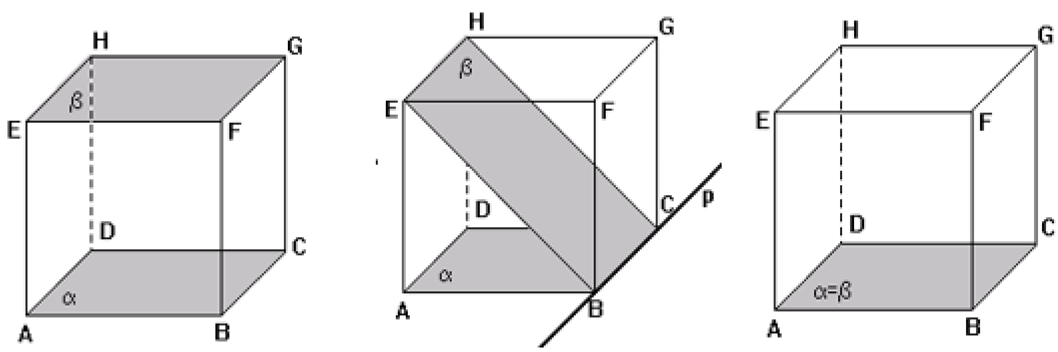
Podobne môžeme prezentovať vzájomné polohy priamky a roviny znázornením v telese, napríklad na kocke *ABCDEFGH*, kde sme zvolili rovinu $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$. Potom priamka môže byť s rovinou *rovnobežná, rôznobežná* alebo *priamka leží v rovine*.



Definícia rovnobežnosti priamky s rovinou je: „Priamka *p* je rovnobežná s rovinou α práve vtedy, keď s ňou nemá spoločný bod." Kritérium rovnobežnosti priamky s rovinou je: „Priamka *p* je rovnobežná s rovinou α práve vtedy, keď je priamka *p* rovnobežná s niektorou priamkou *q* roviny α, $(p \parallel \alpha) \Leftrightarrow \exists q \subset \alpha: (p \parallel q)$."

Uvedené kritérium aplikujeme aj na konkrétnej úlohe (pozri prvý obrázok vyššie). Priamka $p = \overleftrightarrow{HG}$ rovnobežná s rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$, pretože vieme nájsť aspoň jednu priamku z roviny α (napríklad priamka $q = \overleftrightarrow{CD}$), ktorá je s priamkou *p* rovnobežná. Spomenieme, že rovnobežnosť priamok *p, q* vyplýva z vlastností štvorca *CDHG*.

Vzájomné polohy dvoch rovín sú znázornené na kocke *ABCDEFGH* na ďalších jednotlivých obrázkoch. Dve roviny môžu byť *rovnobežné, rôznobežné* alebo *totožné*.

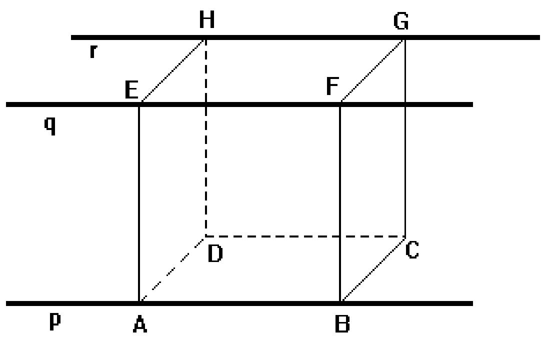


Dôležitá je aj nasledujúcu vlastnosť: „Ak majú dve roviny spoločný aspoň jeden bod, potom majú spoločnú priamku, ktorú nazývame priesečnicou alebo roviny sú totožné".

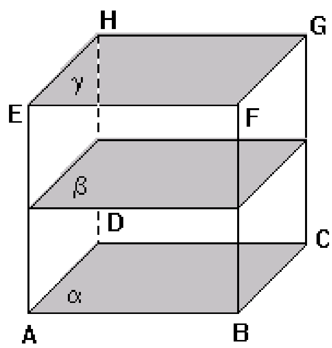
Definícia rovnobežnosti dvoch rovín je: „Dve roviny α, β sú rovnobežné práve vtedy, keď každá priamka jednej roviny je rovnobežná s druhou rovinou, $(\alpha \parallel \beta) \Leftrightarrow \forall p \subset \alpha : (p \parallel \beta)$." A následne vyslovíme aj kritérium rovnobežnosti dvoch rovín: „Dve roviny α, β sú rovnobežné práve vtedy, keď v rovine α existujú dve rôznobežné priamky *p, q*, z ktorých každá je rovnobežná s rovinou β, $(\alpha \parallel \beta) \Leftrightarrow \exists p, q \subset \alpha, p \nparallel q : (\beta \parallel p) \wedge (\beta \parallel q)$."

Uvedieme ďalej vety o rovnobežnosti priamok a rovín aj so symbolickým zápisom a názornými obrázkami, ktoré danú vlastnosť konkrétne prezentujú:

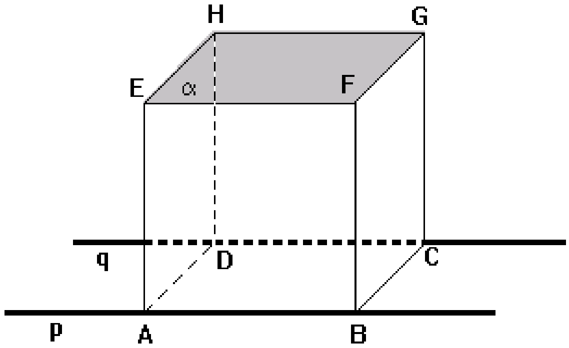
- Ak je priamka *p* rovnobežná s priamkou *q* a priamka *q* je rovnobežná s priamkou *r*, potom je priamka *p* rovnobežná aj s priamkou *r*. $\forall p, q, r \in E_3 : \big((p \parallel q) \wedge (q \parallel r)\big) \Rightarrow (p \parallel r)$



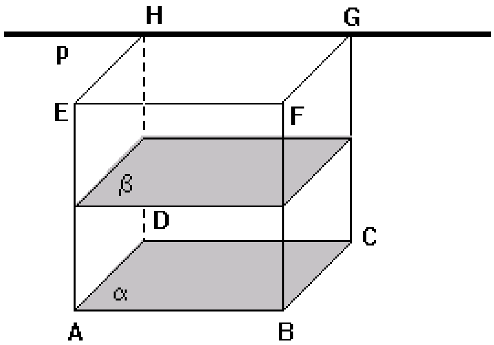
- Ak je rovina α rovnobežná s rovinou β a rovina β je rovnobežná s rovinou γ, potom je rovina α rovnobežná aj s rovinou γ. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in E_3 : \big((\alpha \parallel \beta) \wedge (\beta \parallel \gamma)\big) \Rightarrow (\alpha \parallel \gamma)$



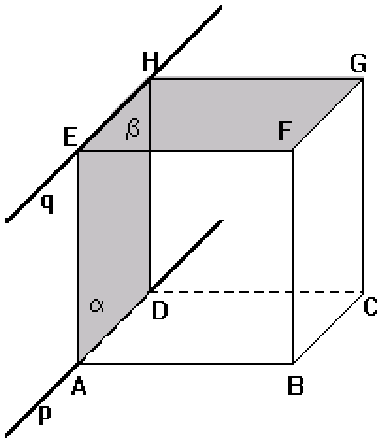
- Ak je priamka *p* rovnobežná s priamkou *q* a priamka *q* je rovnobežná s rovinou *α*, potom je priamka *p* rovnobežná aj s rovinou *α*. $\forall p, q, \alpha \in E_3 : \big((p \parallel q) \wedge (q \parallel \alpha)\big) \Rightarrow (p \parallel \alpha)$



- Ak je priamka *p* rovnobežná s rovinou α a rovina α je rovnobežná s rovinou β, potom je priamka *p* rovnobežná aj s rovinou β. $\forall p, \alpha, \beta \in E_3: \big((p \parallel \alpha) \wedge (\alpha \parallel \beta)\big) \Longrightarrow (p \parallel \beta)$



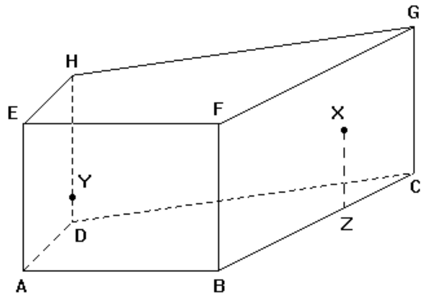
- Ak je priamka *p* rovnobežná s dvoma navzájom rôznobežnými rovinami α, β, potom je priamka *p* rovnobežná aj s ich priesečnicou *q*. $\forall p, q, \alpha, \beta \in E_3: \big((p \parallel \alpha) \wedge (p \parallel \beta) \wedge q \subset \alpha \cap \beta\big) \Longrightarrow (p \parallel q)$



Ak majú dve roviny spoločný bod, majú spoločnú priamku, ktorú je potrebné tiež nájsť. Uvedieme ďalej postup, ako konštrukčne zostrojiť priesečnicu dvoch rovín.

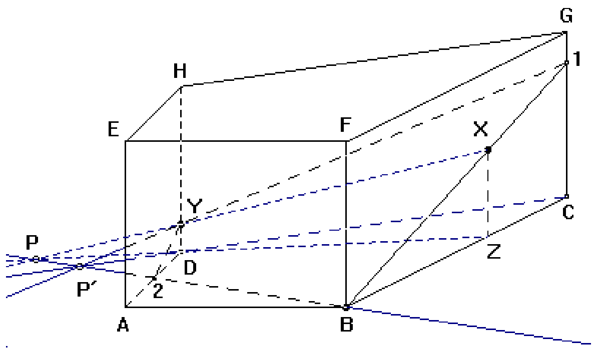
Príklad 3.

Zostrojte priesečnicu rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{BXY}$ v nepravidelnom štvorbokom kolmom hranole *ABCDEFGH*, ak bod *X* leží v stene $\overleftrightarrow{BCG}$ a bod *Y* leží na hrane *DH*.



Riešenie:

Treba si najskôr uvedomiť, čo to predstavuje hľadať spoločnú priesečnicu dvoch rovín. A teda, na zostrojenie priesečnice potrebujeme nájsť dva spoločné body rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{BXY}$. Jedným spoločným bodom je bod *B*, druhý spoločný bod nájdeme ako priesečník priamky $\overleftrightarrow{XY}$ s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$. Kolmým priemetom bodu *Y* do roviny $\overleftrightarrow{ABC}$ je bod *D* a kolmý priemet bodu *X* označíme *Z*. Priesečník priamok $\overleftrightarrow{XY}$ a $\overleftrightarrow{DZ}$ je hľadaným bodom, označíme ho *P*. Hľadanou priesečnicou rovín je teda priamka $\overleftrightarrow{BP}$.

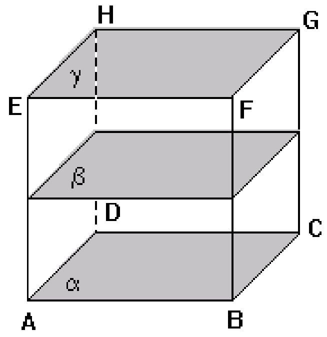


Poznámka. Uvedieme aj iný spôsob ako nájsť priesečnicu dvoch rovín. Najskôr zostrojíme rez hranola rovinou $\overleftrightarrow{BXY}$. Rezovým útvarom je štvoruholník *B1Y2*, a preto priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{BXY}$ je priamka $\overleftrightarrow{BP'}$. Na obrázku je možné vidieť, že body *P´* a *P* ležia na priamke $\overleftrightarrow{B2}$, ktorá je priesečnicou rezovej roviny $\overleftrightarrow{BXY}$ s rovinou podstavy $\overleftrightarrow{ABC}$.

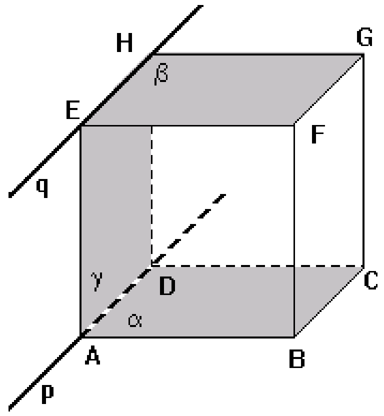
Ďalšou vzájomnou polohou geometrických útvarov, ktorej sa budeme venovať, je vzájomná poloha troch rovín. Uvedieme ich jednotlivo aj pomocou názorných obrázkov a symbolických zápisov. Budeme uvažovať *tri rôzne roviny*. Ale ak by sme nepoužili slovo „rôzne“, tak by dve roviny z týchto troch rovín mohli byť aj totožné. Potom musíme uvažovať takisto o vzájomnej polohe dvoch rovín, kde nastanú tri prípady vzájomnej polohy rovín, t. j. roviny sú rovnobežné alebo totožné alebo rôznobežné.

Tri rôzne roviny α, β, γ môžu mať tieto vzájomné polohy:

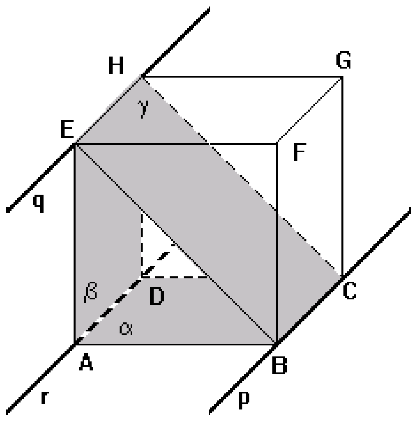
- Všetky tri roviny sú navzájom rovnobežné rôzne. $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$



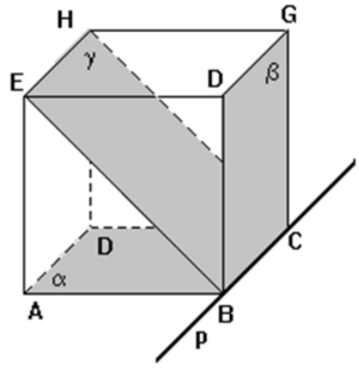
- Dve roviny sú navzájom rovnobežné rôzne a tretia je s nimi rôznobežná, priesečnice sú navzájom rôzne rovnobežky. $\big((\alpha \parallel \beta) \wedge (\gamma \nparallel \alpha) \wedge (\gamma \nparallel \beta)\big) \Rightarrow \big((p \subset \alpha \cap \gamma) \wedge (q \subset \beta \cap \gamma)\big) \wedge (p \parallel q)$



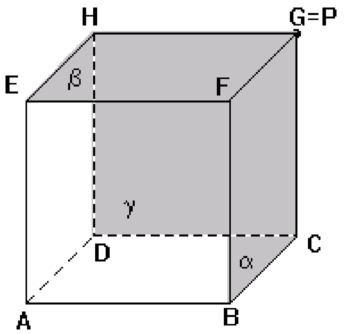
- Každé dve roviny sú navzájom rôznobežné, priesečnice sú navzájom rôzne rovnobežky. $(\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma) \wedge \big((p \subset \alpha \cap \gamma) \wedge (q \subset \beta \cap \gamma) \wedge (r \subset \alpha \cap \beta) \wedge (p \parallel q \parallel r)\big)$



- Každé dve roviny sú navzájom rôznobežné a majú jedinú spoločnú priesečnicu. $(\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma) \wedge (p \subset \alpha \cap \beta \cap \gamma)$



- Každé dve roviny sú navzájom rôznobežné a majú spoločný jediný bod. $(\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma) \wedge (P \in \alpha \cap \beta \cap \gamma)$



Poznámka. Vzájomná poloha troch rovín je problematika, ktorú je potrebné spomenúť aspoň stručne, pretože sa niektoré vlastnosti tejto vzájomnej polohy tiež využívajú pri zostrojovaní rezu telesa rovinou.

Ďalšou dôležitou témou, súvisiacou s vlastnosťami geometrických útvarov v priestore, je zostrojenie rovinného rezu danou rovinou. Zadefinujme teda pojem *rez telesa rovinou*. Rez telesa je prienik telesa a roviny, alebo rovinný útvar, ktorého hranica vznikne ako prienik stien telesa s rovinou rezu.

Pri konštrukcii rezu telesa rovinou využívame nasledujúce vety:

- Ak dve rovnobežné roviny pretína tretia rovina, potom ich pretína v rovnobežných priamkach.
- Ak je priamka rovnobežná s dvoma rôznobežnými rovinami, tak je rovnobežná aj z ich priesečnicou.
- Nech každé dve z troch rovín sú rôznobežné. Potom ak dve z priesečníc prechádzajú jedným bodom, tak ním prechádza aj tretia priesečnica, alebo ak dve z priesečníc nemajú spoločný bod, tak sú rovnobežné a je s nimi rovnobežná aj tretia priesečnica.

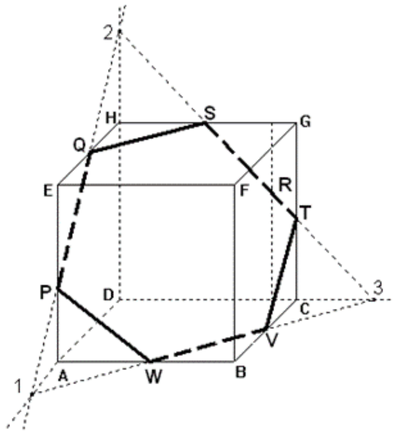
Príklad 4.

Zostrojte rez kocky *ABCDEFGH* rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde body *P, Q* sú postupne vnútorné body hrán *AE, EH* a bod *R* leží v stene kocky *CDHG.*

Riešenie:

Pri zostrojovaní rezu kocky rovinou α môže postupovať podľa nasledujúceho postupu, pričom budeme aj symbolicky zapisovať jednotlivé body tohto postupu.

Body *P, Q* ležia v rovine steny *ADHG* ($\overleftrightarrow{PQ} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ADH}$). Priamka $\overleftrightarrow{PQ}$ pretne rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ v bode *1* a rovinu $\overleftrightarrow{DCG}$ v bode *2* ($1 \in \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \left(\overleftrightarrow{ADH} \cap \overleftrightarrow{ABC}\right) = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AD}$, $2 \in \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{DCG} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \left(\overleftrightarrow{ADH} \cap \overleftrightarrow{DCG}\right) = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{DH}$). Body *2* a *R* ležia v rovine steny DCGH ($\overleftrightarrow{2R} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{DCG}$) a priesečnica roviny α so stenou kocky *DCGH* je úsečka *ST* ($S \in \overleftrightarrow{GH}$, $T \in \overleftrightarrow{CG}$). Priamka $\overleftrightarrow{2R}$ pretne rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ v bode *3* ($3 \in \overleftrightarrow{2R} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{2R} \cap \left(\overleftrightarrow{DCG} \cap \overleftrightarrow{ABC}\right) = \overleftrightarrow{2R} \cap \overleftrightarrow{DC}$). Body *1* a *3* ležia v rovine steny *ABCD* ($\overleftrightarrow{13} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ABC}$) a priesečnica roviny α so stenou kocky *ABCD* je úsečka *WV* ($W \in \overleftrightarrow{AB}$, $V \in \overleftrightarrow{BC}$). Keďže roviny $\overleftrightarrow{ADH}, \overleftrightarrow{BCG}$ sú rovnobežné, tak aj priamky $\overleftrightarrow{PQ}, \overleftrightarrow{VT}$ sú rovnobežné. Podobne rovnobežnosť platí aj pre priamky $\overleftrightarrow{QS}, \overleftrightarrow{WV}$ a $\overleftrightarrow{ST}, \overleftrightarrow{PW}$. Rovinným rezom kocky *ABCDEFGH* rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$ je šesťuholník *PQSTVW*.



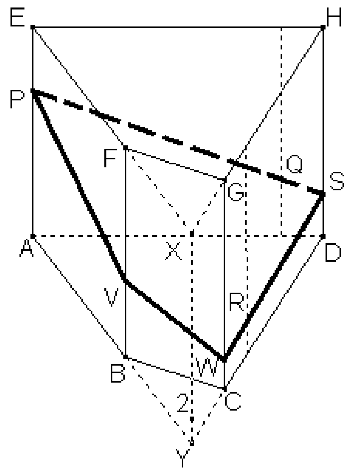
Príklad 5.

Zostrojte rez hranola *ABCDEFGH* s podstavou ľubovoľného štvoruholníka rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde bod *P* je vnútorným bodom hrany *AE* a body *Q, R* sú postupne body ležiace v stenách hranola *ADHE, CDHG.*

Riešenie:

Predtým uvedené vety teraz využijeme pri konštrukcii rezu hranola danou rovinou. Uvedieme aj symbolický zápis jednotlivých bodov riešenia.

Body *P, Q* ležia v rovine $\overleftrightarrow{ADH}$ ($\overleftrightarrow{PQ} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ADH}$) a rovina α pretne stenu hranola *ADHE* v úsečke *PS* ($S \in DH$). Body *S, R* ležia v rovine $\overleftrightarrow{CDH}$ ($\overleftrightarrow{SR} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{CDH}$) a rovina α pretne stenu hranola *CDHG* v úsečke *SW* ($W \in CG$). Priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{CDH}, \overleftrightarrow{ABF}$ je priamka $\overleftrightarrow{XY}$ ($\overleftrightarrow{XY} \subset \overleftrightarrow{CDH} \cap \overleftrightarrow{ABF}$). Priamka $\overleftrightarrow{SR}$ pretne rovinu $\overleftrightarrow{ABF}$ v bode *2* ($2 \in \overleftrightarrow{SR} \cap \overleftrightarrow{ABF} = \overleftrightarrow{SR} \cap \left(\overleftrightarrow{CDH} \cap \overleftrightarrow{ABF}\right) = \overleftrightarrow{SR} \cap \overleftrightarrow{XY}$). Body *2* a *P* ležia v rovine $\overleftrightarrow{ABF}$ ($\overleftrightarrow{2P} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ABF}$) a rovina α pretne stenu hranola *ABFE* v úsečke *PV* ($V \in BF$). Rovinným rezom hranola *ABCDEFGH* rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$ je štvoruholník *PSWV*.



Ďalšou podstatnou geometrickou problematikou je hľadanie priesečníka priamky s rovinou. Najskôr je potrebné podrobne vysvetliť jednotlivé kroky postupu konštrukcie pri hľadaní tohto priesečníka, aby sme si uvedomili, že tieto kroky boli už samostatne riešené v predchádzajúcich úlohách.

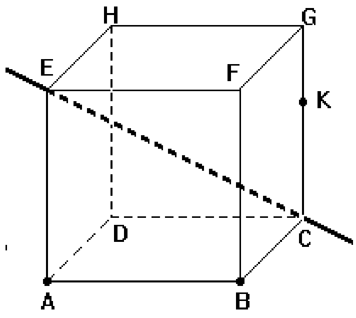
Zostrojenie priesečníka priamky *p* s rovinou α vysvetlíme na nasledujúcom postupe konštrukcie:

- priamkou *p* položíme rovinu β, ktorá je s rovinou α rôznobežná ($\beta, (p \subset \beta) \wedge (\alpha \nparallel \beta)$),
- zostrojíme priesečnicu *q* rovín α a β ($q, q \subset \alpha \cap \beta$),
- priesečník *P* priamok *p* a *q* je hľadaným priesečníkom priamky *p* a roviny α ($P, P \in p \cap q = p \cap \alpha$).

Poznámka. Odporúčame si voliť pri hranoloch rovinu β kolmú na rovinu podstavy telesa a pri ihlanoch tzv. vrcholovú rovinu, ktorá prechádza vrcholom ihlana.

Príklad 6.

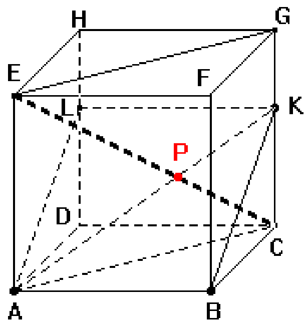
Daná je kocka *ABCDEFGH* a bod *K*, ktorý leží na hrane *CG*. Zostrojte priesečník telesovej uhlopriečky *EC* s rovinou $\overleftrightarrow{ABK}$.



Riešenie:

Budeme postupovať podľa jednotlivých krokov už uvedeného postupu a zároveň zostrojíme na kocke príslušnú konštrukciu.

Zostrojíme najskôr rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ABK}$, čo je štvoruholník *ABKL*. Zvolíme si rovinu, v ktorej bude ležať priamka $\overleftrightarrow{EC}$. Môže to byť napríklad rovina $\overleftrightarrow{AEC}$, rôznobežná s rovinou $\overleftrightarrow{ABK}$, v ktorej leží určite priamka $\overleftrightarrow{EC}$ $\left(\left(\overleftrightarrow{EC} \subset \overleftrightarrow{AEC}\right) \wedge \left(\overleftrightarrow{AEC} \nparallel \overleftrightarrow{ABK}\right)\right)$. Následne treba zostrojiť priesečnicu rovín $\overleftrightarrow{AEC}$ a $\overleftrightarrow{ABK}$, ktorou je priamka $\overleftrightarrow{AK}$ $\left(\overleftrightarrow{AK} \subset \overleftrightarrow{AEC} \cap \overleftrightarrow{ABK}\right)$. Priesečník priamok $\overleftrightarrow{EC}$, $\overleftrightarrow{AK}$ je bod *P* a tento bod *P* je teda priesečníkom priamky $\overleftrightarrow{EC}$ a roviny $\overleftrightarrow{ABK}$ $\left(P \in \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{AK} = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{ABK}\right)$.



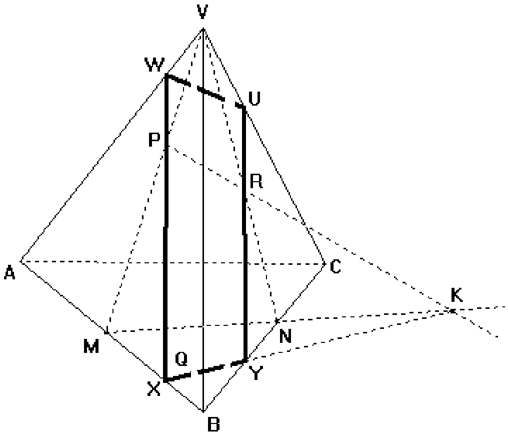
Keď máme osvojenú problematiku zostrojovania rezov rôznych telies rovinou a vieme nájsť priesečník priamky s rovinou, vieme zostrojiť rez telesa rovinou, kde je nutné najskôr zostrojiť priesečník jednej priamky danej roviny s niektorou stenovou rovinou daného telesa.

Príklad 7.

Zostrojte rovinný rez štvorstena *ABCV* rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde body *P, Q, R* sú postupne body ležiace v stenách štvorstena *ABV*, *ABC*, *BCV*, teda žiadne dva body z daných bodov neležia v jednej rovine.

Riešenie:

Úlohu začneme riešiť tak, že si zvolíme priamku z roviny α, nech je to napríklad priamka $\overleftrightarrow{PR}$. Aby sme v reze telesa rovinou mohli pokračovať, zostrojíme najskôr priesečník nami zvolenej priamky $\overleftrightarrow{PR}$ s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$. A teda na zostrojenie rezu daného štvorstena využijeme bod *K*, ktorý je práve priesečníkom priamky $\overleftrightarrow{PR}$ s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$ ($K \in \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{PR} \cap \left(\overleftrightarrow{PRV} \cap \overleftrightarrow{ABC}\right) = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{MN}$). Body *K, Q* ležia už v jednej rovine $\overleftrightarrow{ABC}$ ($\overleftrightarrow{KQ} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ABC}$) a rovina α pretne stenu štvorstena *ABC* v úsečke *XY* ($X \in AB$, $Y \in BC$). Body *X, P* ležia v rovine $\overleftrightarrow{ABV}$ ($\overleftrightarrow{XP} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ABV}$) a rovina α pretne stenu štvorstena *ABV* v úsečke *XW* ($W \in AV$). Tiež body *Y, R* ležia v rovine $\overleftrightarrow{BCV}$ ($\overleftrightarrow{YR} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{BCV}$) a rovina α pretne stenu štvorstena *BCV* v úsečke *YU* ($U \in CV$). Podobne aj body *W, U* ležia v rovine $\overleftrightarrow{ACV}$ ($\overleftrightarrow{WU} \subset \alpha \cap \overleftrightarrow{ACV}$). Rovinným rezom štvorstena *ABCV* rovinou α je štvoruholník *XYUW*.



Úlohy na precvičenie

1. Zistite vzájomnú polohu priamok *a*, *b*:

   a) v kocke *ABCDEFGH*, ak $a = \overleftrightarrow{KL}, b = \overleftrightarrow{MN}$, kde body *K, L, M, N* sú postupne stredmi hrán *AB*, *CG*, *BC*, *EH*,

   b) v pravidelnom šesťbokom hranole *ABCDEFA´B´C´D´E´F´*, ak $a = \overleftrightarrow{BC'}, b = \overleftrightarrow{DA'}$.

2. Zistite vzájomnú polohu dvoch rovín α, β v danom telese. V prípade, že sú roviny rôznobežné, zostrojte aj ich priesečnicu:

   a) štvorsten *ABCD*, ak $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}, b = \overleftrightarrow{ACD}$, kde body *M, N, P* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BC, AB, BD*,

   b) kocka *ABCDEFGH*, $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}, b = \overleftrightarrow{PQR}$, kde body *P, Q, R* sú postupne stredmi hrán *BC, GH, AE*, body *K* , *M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BF*, *BC* a bod *L* je vnútorným bodom steny *ADHE*.

3. Zostrojte rez kocky *ABCDEFGH* rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$, ak:

   a) bod *K* leží v stene *ABCD* a body *L, M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *EF, FG*,

   b) body *K*, *M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *AE*, *CG* a bod *L* leží na polpriamke za bodom *B*,

c) bod *K* leží na polpriamke $\overrightarrow{EA}$ za bodom *A*, bod *L* leží na polpriamke $\overrightarrow{CG}$ za bodom *G* a bod *M* leží na polpriamke $\overrightarrow{EH}$ za bodom *H*.

4. Zostrojte rez daného telesa rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$:

a) štvorboký hranol *ABCDEFGH*, jeho podstava je lichobežník a body *K, L, M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *AB, HG, DM*,
b) trojboký hranol *ABCDEF*, bod *K* leží v stene *ABED* a body *L, M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *EF, DF*,
c) pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*, bod *K* leží na polpriamke $\overrightarrow{AB}$ za bodom *B*, bod *L* je vnútorným bodom hrany *DC* a bod *M* leží na polpriamke $\overrightarrow{CV}$ za bodom *V*,
d) štvorsten *ABCD*, bod *K* leží v stene *ABD* a body *L, M* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BC, CD*.

5. Zostrojte priesečník priamky $p = \overleftrightarrow{KL}$ s rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$ v uvedenom telese:

a) kocka *ABCDEFGH*, body *K, L, P, Q* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BF, CD, GH, EH*, bod *R* leží na polpriamke $\overrightarrow{DA}$ za bodom *A*,
b) trojboký hranol *ABCDEF*, body *K, L, P, R* sú postupne vnútornými bodmi hrán *AC, EF, CF, DE* a bod *Q* je totožný s vrcholom *B*,
c) štvorsten ABCD, body *P, Q, R* sú postupne vnútornými bodmi hrán *CD, CB, AD* a bod *L* leží v stene *ABC*,
d) pravidelný šesťboký ihlan *ABCDEFV*, bod *K* je vnútorným bodom steny *CDV*, bod *L* leží na polpriamke $\overrightarrow{VA}$ za bodom *A*, body *P, Q, R* sú postupne vnútornými bodmi hrán *BC, CD, EF*.

5.3 Metrické vlastnosti lineárnych útvarov v priestore

V rámci metrických vlastností geometrických útvarov budeme zisťovať uhly a vzdialenosti medzi jednotlivými útvarmi (bod, priamka, rovina).

Pre vzájomnú polohu priamok platia nasledujúce vlastnosti:

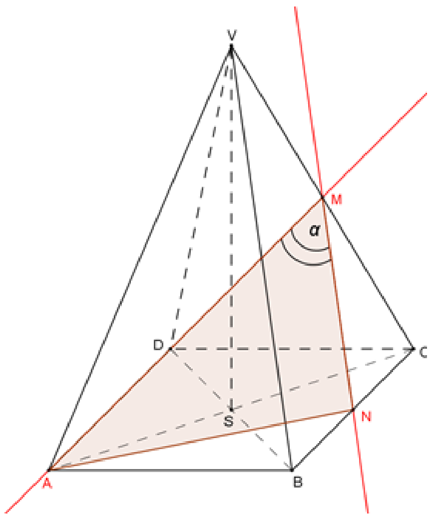
- uhlom priamok *a, b* nazývame uhol ľubovoľných nedisjunktných priamok a', b' pre ktoré platí: $a' \parallel a, b' \parallel b$,
- kolmé priamky sú priamky, ktorých uhol je pravý,
- priamka kolmá na rovinu je priamka kolmá na všetky priamky roviny,
- priamka kolmá na rovinu je s touto rovinou rôznobežná, v opačnom prípade by totiž v rovine existovala priamka, ktorá je s danou priamkou rovnobežná, čo je v spore s predchádzajúcou vlastnosťou.

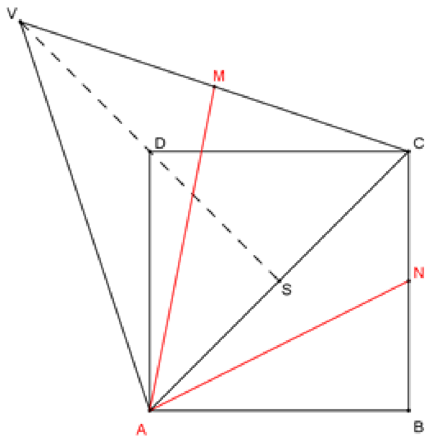
Príklad 8.

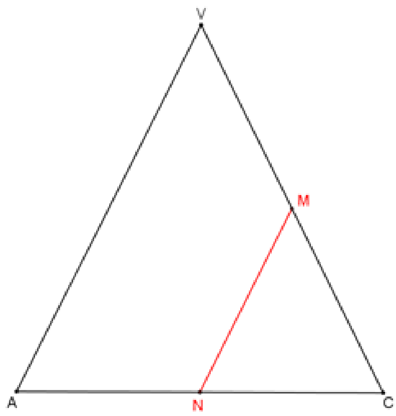
Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV* s dĺžkami hrán $|AB| = a, |AV| = b$, pričom bod *M* je stred hrany *CV* a bod *N* je stred hrany *BC*. Konštrukčne zostrojte uhol priamok $\overleftrightarrow{MN}, \overleftrightarrow{AM}$.

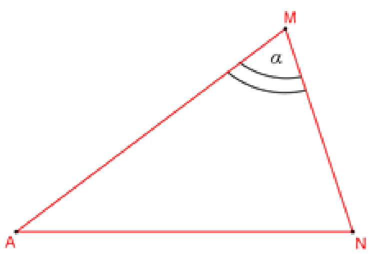
Riešenie:

Priamky $\overleftrightarrow{MN}, \overleftrightarrow{AM}$ sú navzájom rôznobežné, preto uhol týchto priamok je menší uhol, ktorý dané priamky zvierajú. Konštrukčne zistíme tento uhol priamok tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach trojuholník *AMN*. Pre jednotlivé jeho dĺžky strán platí: úsečka *AM* je ťažnicou trojuholníka *ACV*, úsečka *MN* je stredná priečka trojuholníka *BCV* a dĺžku úsečky *AN* zostrojíme v štvorci *ABCD*. Potom platí: $\sphericalangle(\overleftrightarrow{MN}, \overleftrightarrow{AM}) = \sphericalangle(AMN) = \alpha$.



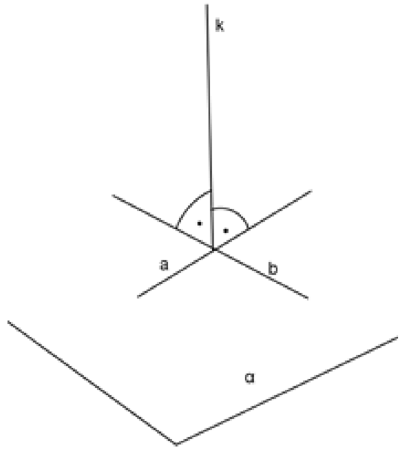




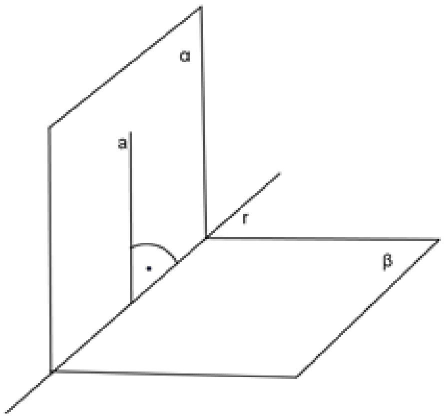


Uvedieme kritérium kolmosti priamky a roviny, tiež kritérium kolmosti dvoch rovín:

- Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežné priamky tejto roviny. $k \perp \alpha \Leftrightarrow \exists a, b \in \alpha: a \perp k, b \perp k$



- Dve roviny sú kolmé práve vtedy, keď jedna z rovín obsahuje priamku kolmú na druhú roviny. $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists a \in \alpha: a \perp \beta$

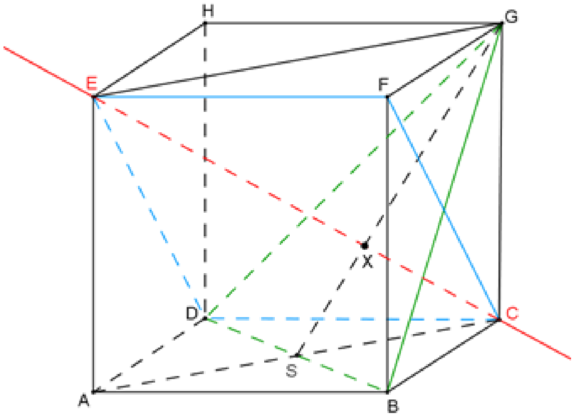


Príklad 9.

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zistite, či je kolmá priamka $\overleftrightarrow{EC}$ na rovinu $\overleftrightarrow{DBG}$.

Riešenie:

Využijeme kritérium kolmosti priamky a roviny, t. j. dokážeme, že priamka $\overleftrightarrow{EC}$ je kolmá na dve rôznobežky roviny $\overleftrightarrow{DBG}$. Uvažujme napríklad priamku $\overleftrightarrow{BD}$. Priamka $\overleftrightarrow{BD}$ je kolmá na priamky $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AE}$, pretože je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ACE}$, a teda je kolmá aj na priamku $\overleftrightarrow{EC}$. Podobne priamka $\overleftrightarrow{BG}$ je kolmá na priamky $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{CF}$, preto je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ECF}$ a je kolmá aj na priamku $\overleftrightarrow{EC}$. Z uvedených kolmostí priamok vyplýva, že priamka $\overleftrightarrow{EC}$ je kolmá na priamky $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BG}$, a preto aj na rovinu $\overleftrightarrow{DBG}$.

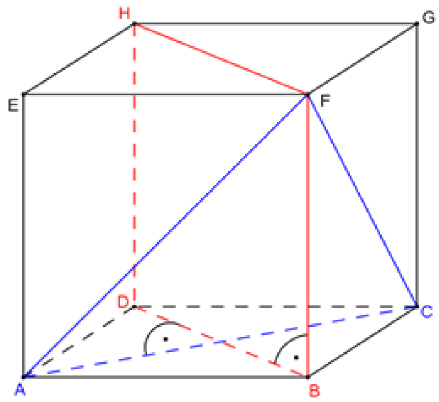


Príklad 10.

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zistite, či roviny $\overleftrightarrow{DHB}$, $\overleftrightarrow{ACF}$ sú kolmé.

Riešenie:

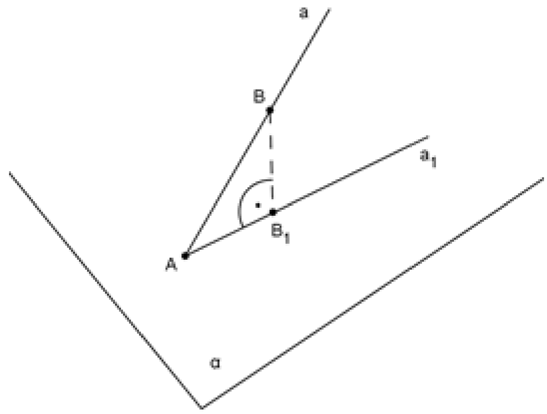
Z kritéria kolmosti dvoch rovín stačí dokázať, že napríklad priamka $\overleftrightarrow{AC}$ roviny $\overleftrightarrow{ACF}$ je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{DHB}$. Priamka $\overleftrightarrow{AC}$ je určite kolmá na priamku $\overleftrightarrow{BD}$ roviny $\overleftrightarrow{DHB}$ a zároveň je kolmá aj na priamku $\overleftrightarrow{BF}$ roviny $\overleftrightarrow{DHB}$. Preto priamka $\overleftrightarrow{AC}$ je kolmá na dve rôznobežné priamky roviny $\overleftrightarrow{DHB}$, a teda je kolmá aj na rovinu $\overleftrightarrow{DHB}$. Potom vyplýva, že aj rovina $\overleftrightarrow{DHB}$ je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ACF}$ a opačne.



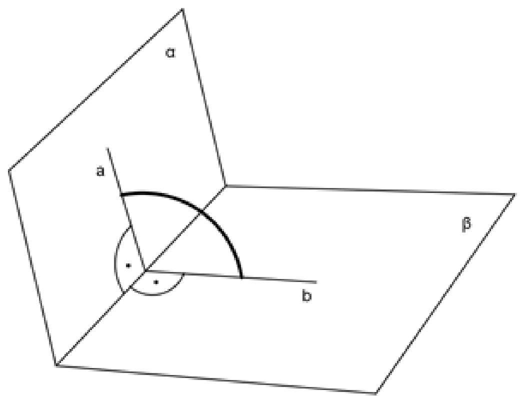
Nasledujúce vety súvisia s kolmosťou priamky a roviny:

- Existuje jediná priamka prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú rovinu.
- Všetky priamky kolmé na tú istú rovinu sú navzájom rovnobežné.

Popíšeme ďalšie prípady, ako zistiť uhol priamky s rovinou a uhol dvoch rovín. *Uhol priamky s rovinou* je uhol priamky s jej kolmým priemetom do roviny.

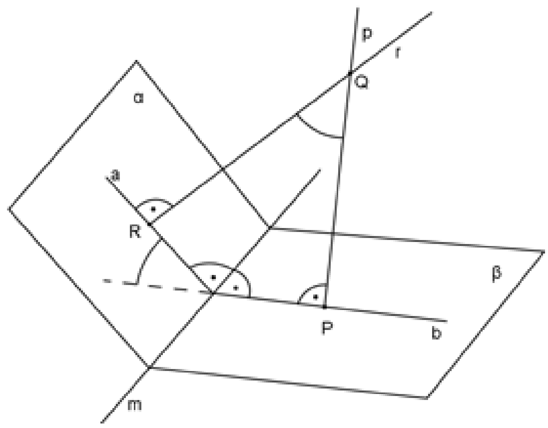


Uhlom dvoch rovnobežných rovín je nulový uhol. *Uhlom dvoch rôznobežných rovín* je uhol priamok ležiacich v daných rovinách a kolmých na priesečnicu rovín. Ak je tento uhol pravý, tak hovoríme, že roviny sú kolmé.



Platia nasledujúce vety ako dôsledky uvedených viet:

- Uhol priamky m s rovinou α (priamka nie je kolmá na rovinu) je najmenší zo všetkých uhlov dvojíc priamok m, a $(a \subset \alpha)$.
- Uhol priamky s rovinou je zhodný s doplnkovým uhlom k uhlu priamky s kolmicou na rovinu.
- Uhol dvoch rovín je zhodný s uhlom kolmíc na tieto roviny.

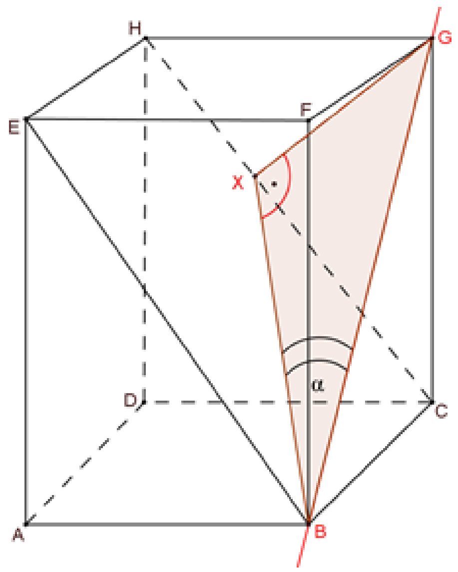


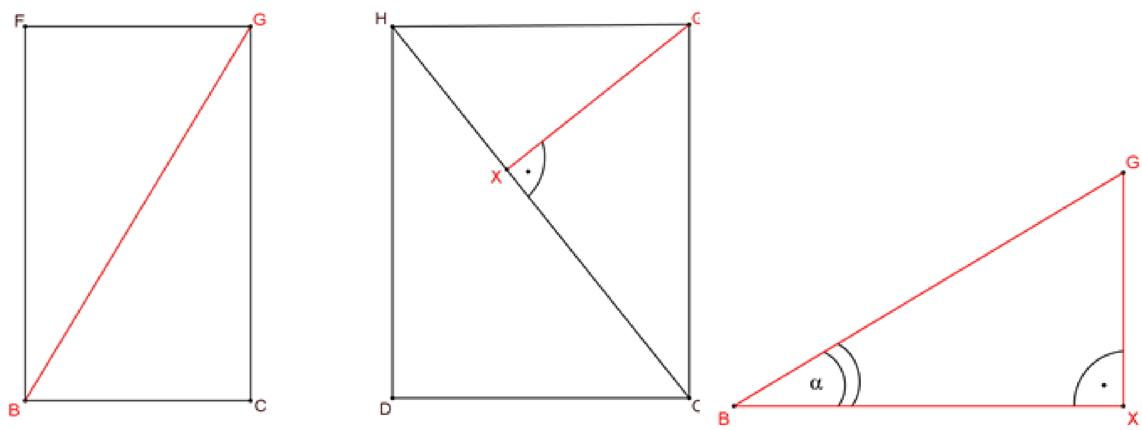
Príklad 11.

Daný je kváder *ABCDEFGH* s dĺžkami hrán $|AB| = a, |BC| = b, |AE| = c$. Konštrukčne zostrojte uhol priamky $\overleftrightarrow{BG}$ a roviny $\overleftrightarrow{EBC}$.

Riešenie:

V danom kvádri zostrojme kolmý priemet priamky $\overleftrightarrow{BG}$ do roviny $\overleftrightarrow{EBC}$. Týmto priemetom je priamka $\overleftrightarrow{BX}$, pretože sme našli kolmé priemety dvoch rôznych bodov priamky do roviny $\overleftrightarrow{EBC}$. Preto uhol priamky $\overleftrightarrow{BG}$ a roviny $\overleftrightarrow{EBC}$ je uhol priamok $\overleftrightarrow{BG}, \overleftrightarrow{BX}$. Konštrukčne zistíme tento uhol tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach trojuholník *BGX*, ktorý je navyše aj pravouhlý (priamka $\overleftrightarrow{GX}$ je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{EBC}$, preto je kolmá na všetky priamky z tejto roviny, a teda aj na priamku $\overleftrightarrow{BX}$). Skutočnú dĺžku strany *BG* zostrojíme z obdĺžnika *BCGF* a dĺžku strany *GX* zostrojíme z obdĺžnika *DCGH*. Preto platí: $\sphericalangle(\overleftrightarrow{BG}, \overleftrightarrow{EBC}) = \sphericalangle(GBX) = \alpha$.



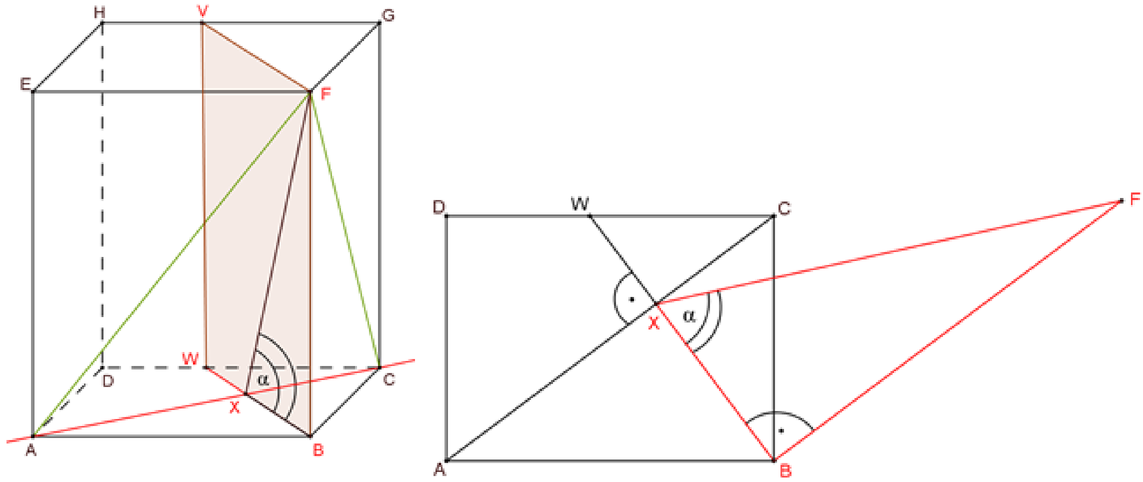


Príklad 12.

Daný je kváder *ABCDEFGH* s dĺžkami hrán $|AB| = a, |BC| = b, |AE| = c$. Konštrukčne zostrojte uhol rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ACF}$.

Riešenie:

Uhol rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ACF}$ je uhol kolmých priamok na priesečnicu týchto rovín, teda na priamku $\overleftrightarrow{AC}$. Najskôr nájdeme kolmú rovinu na priamku $\overleftrightarrow{AC}$. Keďže priamky $\overleftrightarrow{BF}, \overleftrightarrow{BW}$ sú kolmé na danú priesečnicu, preto aj rovina $\overleftrightarrow{BFW}$ je kolmá na $\overleftrightarrow{AC}$ podľa kritéria kolmosti priamky a roviny. Priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{BFW}$ je priamka $\overleftrightarrow{BW}$ a priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{BFW}$ je priamka $\overleftrightarrow{XF}$. Preto uhol rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ACF}$ je uhol priamok $\overleftrightarrow{BW}, \overleftrightarrow{XF}$. Konštrukčne zistíme tento uhol tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach trojuholník *BXF*, ktorý je tiež pravouhlý. Skutočnú dĺžku strany *BX* zostrojíme z obdĺžnika *ABCD* a dĺžka strany *BF* je známa zo zadania úlohy. Platí teda: $\sphericalangle(\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ACF}) = \sphericalangle(BXF) = \alpha$.



Medzi ďalšie metrické vlastnosti geometrických útvarov patrí vzdialenosť medzi nimi. Preto *vzdialenosť dvoch geometrických útvarov U, V* je číslo, ktoré je minimom množiny dĺžok úsečiek *XY*, kde *X* je ľubovoľný bod útvaru *U* a bod *Y* je ľubovoľný bod útvaru *V*.
$|U, V| = \min\{|XY|; X \in U \wedge Y \in V\}$

Poznámka. Ak útvary majú spoločný aspoň jeden bod, potom ich vzdialenosť je 0.

Pri vzdialenosti geometrických útvarov môžu nastať nasledujúce prípady:

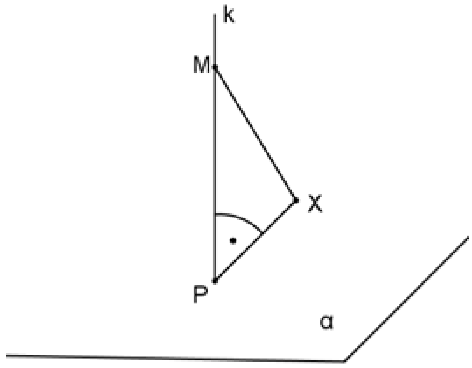
- vzdialenosť dvoch bodov,
- vzdialenosť bodu od priamky,
- vzdialenosť bodu od roviny,
- vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok,
- vzdialenosť dvoch mimobežných priamok,

- vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín,
- vzdialenosť priamky od roviny.

Ďalej sa budeme jednotlivým vzdialenostiam.

Vzdialenosť dvoch bodov A, B je dĺžka úsečky *AB*; označujeme $|A, B|$. $|A, B| = |AB|$

Vzdialenosť bodu M od roviny α je dĺžka úsečky *MP*, kde bod *P* je päta kolmice z bodu *M* na rovinu α; označenie danej vzdialenosti je $|M, \alpha|$. $|M, \alpha| = |M, P| = |MP|, P \in k \cap \alpha \wedge M \in k$



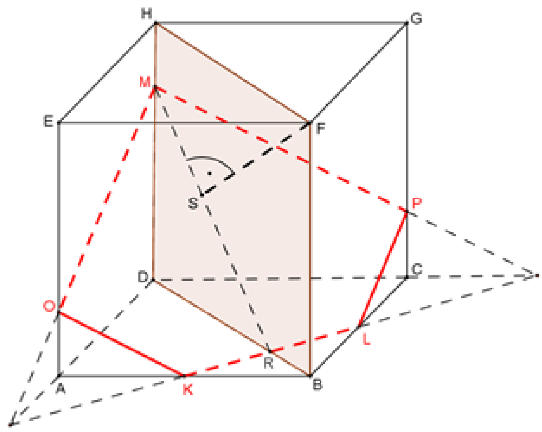
Poznámka. Ak $|M, \alpha| = |M, P| = |MP|$, tak $|MP|$ je zrejme kratšia ako $|MX|$ pre ľubovoľný bod *X*, kde $X \in \alpha \wedge X \neq P$.

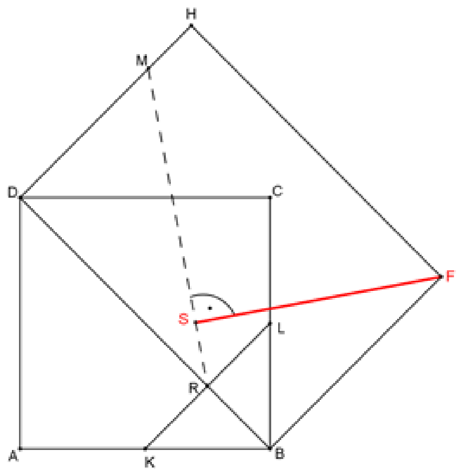
Príklad 13.

Daná je kocka *ABCDEFGH* s dĺžkou hrany $|AB| = a$. Konštrukčne zostrojte vzdialenosť bodu *F* od roviny $\overleftrightarrow{KLM}$, pričom body *K*, *L* sú postupne stredy hrán *AB*, *BC* a pre bod *M* platí: $|DM| = 3|MH|$.

Riešenie:

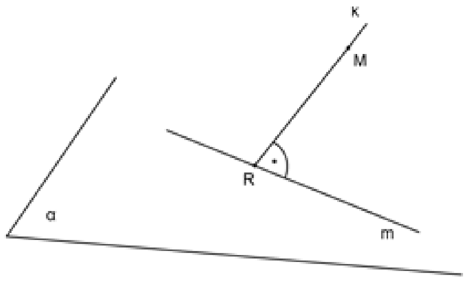
Vzdialenosť bodu *F* od roviny $\overleftrightarrow{KLM}$ je dĺžka úsečky *FS*, pričom bod *S* je kolmým priemetom bodu *F* do roviny $\overleftrightarrow{KLM}$. Zostrojíme rovinu (s využitím kritéria kolmosti dvoch rovín) kolmú na rovinu $\overleftrightarrow{KLM}$ a prechádzajúcu bodom *F*. Uvedená kolmica *FS* leží potom v tejto kolmej rovine. Zvoľme si napríklad rovinu $\overleftrightarrow{BFH}$: $\overleftrightarrow{KL} \subset \overleftrightarrow{KLM}, \overleftrightarrow{KL} \perp \overleftrightarrow{BD} \wedge \overleftrightarrow{KL} \perp \overleftrightarrow{FB}$, preto $\overleftrightarrow{KLM} \perp \overleftrightarrow{BFH}$. Taktiež aj kolmý priemet *S* bodu *F* do roviny $\overleftrightarrow{KLM}$ leží na priesečnici $\overleftrightarrow{RM}$ rovín $\overleftrightarrow{KLM}, \overleftrightarrow{BFH}$. Konštrukčne zistíme túto vzdialenosť tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach obdĺžnik *BFHG*, pričom dĺžku jednej jeho strany zostrojíme zo štvorca *ABCD* a druhá dĺžka obdĺžnika je zhodná s dĺžkou hrany kocky *ABCDEFGH*. Preto platí: $\left|F, \overleftrightarrow{KLM}\right| = |F, S| = |FS|$.



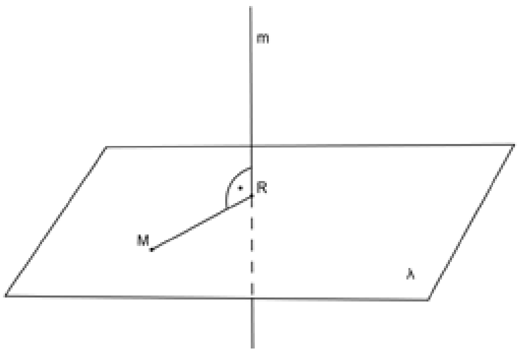


Vzdialenosť bodu M od priamky m je definovaná ako:

- planimetrické riešenie: dĺžka úsečky *MR*, kde bod *R* je päta kolmice z bodu *M* na priamku *m*; označenie $|M,m|$; $|M,m| = |M,R| = |MR|, R \in k \cap m \wedge M \in k$,



- stereometrické riešenie: dĺžka úsečky *MR*, kde bod *R* je prienikom roviny λ (rovina λ je kolmá na priamku *m* a prechádza bodom *M*) a priamky m; označenie $|M,m|$; $|M,m| = |M,R| = |MR|, R \in \lambda \cap m \wedge M \subset \lambda \wedge \lambda \perp m$.



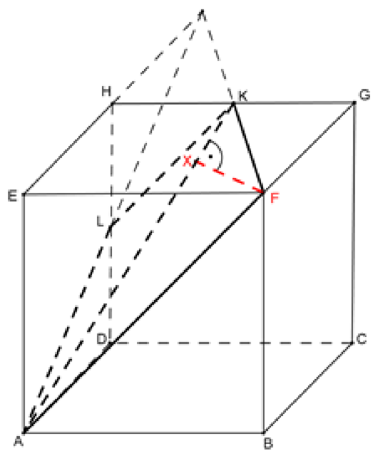
Príklad 14.

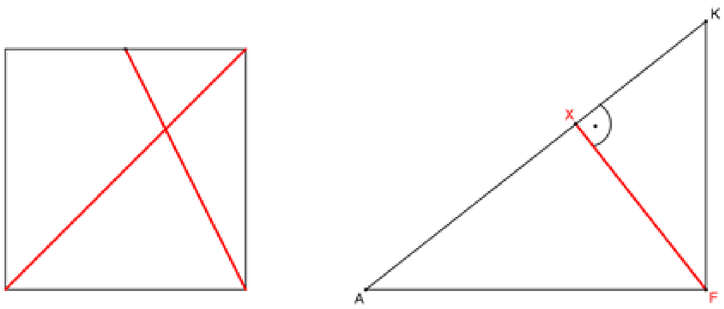
Daná je kocka *ABCDEFGH* s dĺžkou hrany $|AB| = a$. Konštrukčne určte vzdialenosť bodu *F* od priamky $\overleftrightarrow{AK}$, pričom bod *K* je stredom hrany *GH*.

Riešenie:

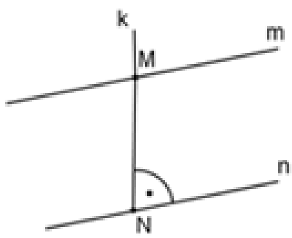
Na zostrojenie vzdialenosti bodu *F* od priamky $\overleftrightarrow{AK}$ využijeme vyššie popísané planimetrické riešenie. Zostrojíme najskôr rovinu, ktorá je určená priamkou $\overleftrightarrow{AK}$

a bodom *F*. V danej rovine $\overleftrightarrow{AFK}$ hľadaná vzdialenosť je dĺžka úsečky *FX*, kde bod *X* je päta kolmice z bodu *F* na priamku $\overleftrightarrow{AK}$. Konštrukčne zistíme túto vzdialenosť tak, že zostrojíme v skutočných dĺžkach lichobežník AFKL, prípadne iba trojuholník *AFK*, ktorý je navyše aj pravouhlý. Dĺžky strán *AF* a *FK* tohto pravouhlého trojuholníka *AFK* zostrojíme z jednotlivých stien kocky, t. j. zo štvorca *ABFE* a štvorca *EFGH*. Platí: $|F, \overleftrightarrow{AK}| = |F, X| = |FX|$.

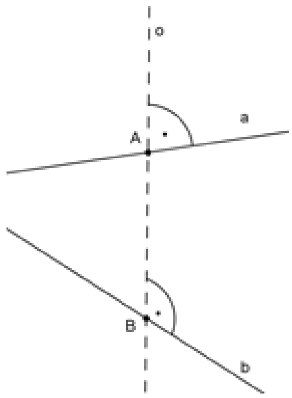




Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok m, n je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej priamky od druhej priamky; označujeme $|m,n|$. $|m,n| = |M,n| = |MN|, M \in m \wedge N \in k \cap n \wedge M \in k \wedge k \perp n$



Vzdialenosť dvoch mimobežných priamok a, b je vzdialenosť dvoch bodov *A, B*, ktoré sú prienikom priamok *a*, *b* a osi *o* daných mimobežných priamok *a*, *b*; označenie $|a,b|$. $|a,b| = |A,B| = |AB|, A \in a \wedge B \in b \wedge \overleftrightarrow{AB} \perp a \wedge \overleftrightarrow{AB} \perp b$



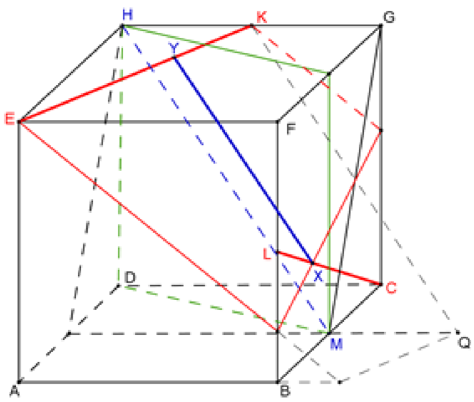
Poznámka. Os mimobežných priamok zostrojíme podľa nasledujúceho postupu: na priamke napr. *a* si zvolíme ľubovoľný bod *X* a daným bodom zostrojíme rovnobežku *b´* s druhou priamkou *b*; nech rovina $\alpha = \overleftrightarrow{a, b'}$, potom zostrojíme ľubovoľnú kolmicu *k* na rovinu α a rovina β je určená $\beta = \overleftrightarrow{a, k}$; rovina β pretne priamku *b* v bode *B* a týmto bodom vedieme rovnobežku *o* s priamkou *k*; priamka *o* pretne priamku *a* v bode *A*; os *o* mimobežiek *a*, *b* je teda priamka $\overleftrightarrow{AB}$, pričom je jedinou osou mimobežiek.

Príklad 15.

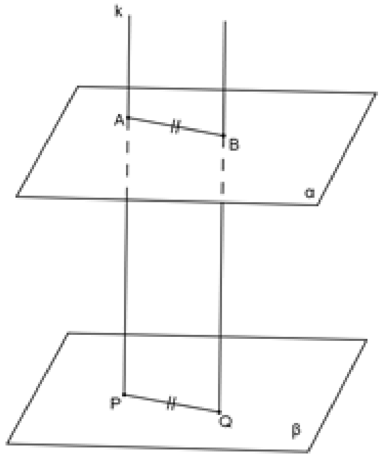
Daná je kocka *ABCDEFGH* s dĺžkou hrany $|AB| = a$. Zostrojte os mimobežných priamok $\overleftrightarrow{EK}, \overleftrightarrow{LC}$, pričom body *K*, *L* sú postupne stredy hrán *GH*, *BF*.

Riešenie:

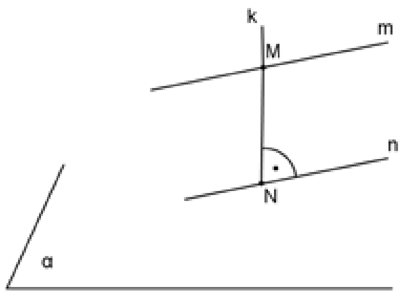
Keďže os mimobežných priamok je kolmá na obidve mimobežky $\overleftrightarrow{EK}, \overleftrightarrow{LC}$, tak najskôr nájdeme tento kolmý smer. Následne budeme už riešiť úlohu, kde budeme hľadať priečku daných mimobežiek rovnobežnú s daným smerom. Z kritéria kolmosti priamky a roviny vyplýva, že rovina $\overleftrightarrow{GHM}$ je kolmá na priamku $\overleftrightarrow{LC}$ a rovina $\overleftrightarrow{DMH}$ je kolmá na priamku $\overleftrightarrow{EK}$. Potom ich priesečnica $\overleftrightarrow{MH}$ je kolmá na obidve mimobežné priamky, a teda priamka $\overleftrightarrow{MH}$ je hľadaný smer osi daných mimobežných priamok. Zostrojíme ďalej rovinu $\overleftrightarrow{EKQ}$, ktorá obsahuje priamku $\overleftrightarrow{EK}$ a je rovnobežná so smerom $\overleftrightarrow{MH}$. Bod *X* je priesečníkom priamky $\overleftrightarrow{LC}$ s rovinou $\overleftrightarrow{EKQ}$, a týmto bodom *X* už prechádza hľadaná os mimobežiek. Os pretína priamku $\overleftrightarrow{EK}$ v bode *Y*.



Vzdialenosť rovnobežných rovín α, β je vzdialenosť ľubovoľného bodu z jednej roviny od druhej roviny; označenie je $|\alpha, \beta|$. $|\alpha, \beta| = |A, \beta| = |AP|, A \in \alpha \wedge P \in k \cap \beta \wedge A \in k \wedge k \perp \beta$



Vzdialenosť priamky m od roviny α je vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky od roviny; označenie je $|m, \alpha|$. $|m, \alpha| = |M, \alpha| = |MN|, M \in m \wedge N \in k \cap \alpha \wedge M \in k \wedge k \perp \alpha$



Úlohy na precvičenie

1. V danom telese konštrukčne zostrojte uhol priamok:

   a) kocka *ABCDEFGH*, priamky $\overleftrightarrow{AF}, \overleftrightarrow{BG}$,
   b) kocka *ABCDEFGH*, priamky $\overleftrightarrow{BH}, \overleftrightarrow{DM}$, kde bod *M* je stred hrany *BC*,
   c) pravidelný trojboký hranol *ABCDEF*, priamky $\overleftrightarrow{EG}, \overleftrightarrow{AF}$,
   d) pravidelný šesťboký hranol *ABCDEFGHIJKL*, priamky $\overleftrightarrow{CG}, \overleftrightarrow{BI}$.

2. V danom telese konštrukčne zostrojte uhol priamky a roviny:

   a) kváder *ABCDEFGH*, priamka $\overleftrightarrow{KF}$, rovina $\overleftrightarrow{ACK}$, ak bod *K* je stred hrany *HD*,
   b) kocka *ABCDEFGH*, priamka $\overleftrightarrow{DF}$, rovina $\overleftrightarrow{BKL}$, ak bod *K* je stred hrany *AE* a bod *L* je stred hrany *CG*,
   c) pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*, priamka $\overleftrightarrow{AV}$, rovina $\overleftrightarrow{ABC}$.

3. V danom telese konštrukčne zostrojte uhol rovín:

   a) kocka *ABCDEFGH*, roviny $\overleftrightarrow{BKH}, \overleftrightarrow{ABG}$, ak bod *K* je stred hrany *AE*,
   b) pravidelný šesťboký ihlan *ABCDEFV*, roviny $\overleftrightarrow{BCV}, \overleftrightarrow{ABC}$,
   c) pravidelný štvorsten *ABCD*, uhol bočných stien štvorstena.

4. Dokážte, že v kocke *ABCDEFGH* platí: $\overleftrightarrow{ADK} \perp \overleftrightarrow{BCL}$, ak bod *K* je stred hrany *EF* a bod *L* je stred hrany *AE*.

5. Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zostrojte priamku prechádzajúcu bodom *F* a kolmú na rovinu $\overleftrightarrow{\mathrm{EKL}}$, ak bod *K* je stred hrany *AB* a bod *L* je stred hrany *GH*.

6. Dokážte, že v pravidelnom štvorstene *ABCD* sú každé dve mimobežné hrany na seba kolmé.

7. Daný je pravidelný štvorsten *ABCD* a bod *M* je stred hrany *CD*. Zostrojte vzdialenosť bodu *M* od priamky $\overleftrightarrow{AB}$.

8. Daná je kocka *ABCDEFGH* a bod *O* je stred steny *ABCD*. Zostrojte vzdialenosť bodu *E* od priamky $\overleftrightarrow{OG}$.

9. Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV* a bod *K* je stred hrany *AB*. Zostrojte vzdialenosť bodu *K* od priamky $\overleftrightarrow{CV}$.

10. Daná je kocka *ABCDEFGH* a bod *S* je stred hrany *AE*. Zostrojte vzdialenosť bodu *C* od roviny $\overleftrightarrow{HSG}$.

11. Daný je pravidelný šesťboký ihlan *ABCDEFV*. Zostrojte vzdialenosť bodu *F* od roviny $\overleftrightarrow{ABV}$.

12. Daná je kocka *ABCDEFGH*. Zostrojte vzdialenosť priamok $\overleftrightarrow{HF}$ a $\overleftrightarrow{BG}$.

13. Daný je pravidelný osemsten *ABCDEF*. Zostrojte vzdialenosť priamky $\overleftrightarrow{CE}$ od roviny $\overleftrightarrow{ABF}$.

14. Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*. Zostrojte vzdialenosť rovín $\overleftrightarrow{BCV}$ a $\overleftrightarrow{KLM}$, ak body *K, L, M* sú postupne stredy hrán *AB, CD, DV*.

15. Daný je pravidelný štvorsten *ABCD* a body *K, L, M* sú postupne stredy hrán *BC, AC, CD*. Zostrojte vzdialenosť rovín $\overleftrightarrow{ABD}$ a $\overleftrightarrow{KLM}$.

Literatúra

[1] Jirotková, D. (1990). Rozvoj prostorové představivosti žáků. Komenský, 114 (5), s. 278 – 281.

[2] Molnár, J. (2004). Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Katedra algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty.

[3] Ostatníková, D., Laznibatová, J. a Dohnányiová, M. (1996). Testosterone influence on spatial ability in prepubertal children. Studia Psychologica, 38(4), s. 237 – 245.

[4] Pavlovičová, G., Rumanová, L. (2008). Polohové úlohy zo stereometrie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 86 s. ISBN 978-80-8094-344-8.

[5] Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vidermanová, K. (2010). Zábavné úlohy z geometrie. Nitra: Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2010. 90 s. ISBN 978-80-8094-789-7.

[6] Pavlovičová, G., Švecová, V. (2016). Pracovné dielne z matematiky. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre. 155 s. ISBN 978-80-558-1046-1.

[7] Páleníková, K., Záhorská, J., Vargová, M., Rumanová, L. (2020). Základy matematiky 2. 1 vydanie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2020. 276 s. ISBN 978-80-558-1606-7.

[8] Rumanová, L., Drábeková, J., Laššová, K. (2022). Metódy zobrazovania vo vyučovacom procese s prepojením na prax. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2022. 102 s. ISBN 978-80-558-1924-2.

[9] Rumanová, L., Hnyk, D. (2012). Niekoľko úloh o štvorstene na rozvoj priestorovej predstavivosti. In Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky: zborník príspevkov z vedeckého seminára organizovaného Katedrou matematiky dňa 4. novembra 2011v Nitre, Nitra: UKF v Nitre, s. 36 – 43.

[10] Rumanová, L., Pavlovičová, G. (2014). Metrické úlohy zo stereometrie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre. 64 s. ISBN 978-80-558-0718-8.

[11] Rumanová, L., Záhorská, J. (2019). Chyby v riešeniach vybraných úloh z geometrie. In Acta Mathematica Nitriensia, 5(2), Nitra: FPV UKF v Nitre, s. 23 – 29.

[12] Rumanová, L., Záhorská, J. (2022). Pytagorova veta v školskej praxi. Nitra: UKF, 2022. 59 s. ISBN 978-80-558-1953-2.

[13] Šedivý, O., Rumanovská, H. (1988). Niekoľko metodických poznámok k rozvoju priestorovej predstavivosti, Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre č. 4, Nitra.

[14] Šedivý, O., Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vallo, D. (2007). Stereometria: umenie vidieť a predstavovať si priestor. Nitra: FPV UKF v Nitre.

[15] Šedivý, O., Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vallo, D., Vidermanová, K., Záhorská,

J. (2013). Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Nitra: FPV UKF v Nitre.

[16] Šedivý, O., Vallo, D. (2012). Geometria V: kužeľovečky a kvadratické plochy. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2012. 85 s. Prírodovedec č. 526. ISBN 978-80-558-0197-1.

[17] ŠPÚ. (2014). Štátny vzdelávací program pre primárne vzdelávanie – 1. stupeň základnej školy. Bratislava: Štátny pedagogický ústav.

[18] ŠPÚ. (2011). Štátny vzdelávací program pre gymnáziá (úplné stredné všeobecné vzdelávanie). ISCED 3A. Bratislava: Štátny pedagogický ústav.

[19] ŠPÚ. (2015). Štátny vzdelávací program pre nižšie sekundárne vzdelávanie – 2. stupeň základnej školy. Bratislava: Štátny pedagogický ústav.

[20] Vallo, D., Ďuriš, V., Záhorská, J. (2014). Specific method how to solve selected stereometry tasks in educational process. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 116, s. 2957 – 2961.

[21] Vallo, D., Rumanová, L., Ďuriš, V. (2015). Spatial Imagination Development through Planar Section of Cube Buildings in Educational Process. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 191, s. 2146 – 2151.

[22] Vallo, D., Rumanová, L., Ďuriš, V., Rybanský, L. (2020). Examination of Spatial Ability with Emphasis on Solving Cube Tasks. TEM Journal, 9(1), s. 361 – 366.

Názov:	**Vybrané kapitoly z geometrie**
Autor:	Lucia Rumanová
Vydavateľ:	Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Edícia:	Prírodovedec č. 859
Rok vydania:	2024
Miesto vydania:	Nitra
Počet strán:	88

ISBN 978-80-558-2181-8

9 788055 821818