DUŠAN VALLO
VLADIMÍR KOBZA

GEOMETRIA KVADRATICKÝCH PLÔCH

2024

Geometria kvadratických plôch

Edícia: Prírodovedec č. 887

Autori: doc. RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Mgr. Vladimír Kobza, PhD.

Recenzenti: prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.

Dr. h. c. prof. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, PhD.

Publikácia vznikla v rámci projektovej aktivity spoločného projektu UMB v Banskej Bystrici a UKF v Nitre s názvom 08I01-20-V05-00002 *Strategický rozvoj infraštruktúry konzorcia UMB a UKF*.
a
s finančnou podporou projektu KEGA s názvom 013UKF-4/2023 *Inovatívne prístupy v problematike zobrazovania priestoru s ohľadom na technicky orientované študijné odbory v kontexte aktuálnych potrieb praxe*.

ISBN: 978-80-558-2238-9

9 788055 822389

Obsah

Pár slov na úvod...

Publikácia s názvom **Geometria kvadratických plôch**, ktorú predkladáme študentom študujúcim na bakalárskych študijných programoch *učiteľstva matematiky v kombinácii* na FPVaI UKF v Nitre a FPV UMB v Banskej Bystrici, je vysokoškolskou učebnicou.

Koncepčne je učebnica rozdelená na dve hlavné časti. Prvá časť obsahuje základné učivo, ktorého znalosť považujeme pre študenta učiteľstva matematiky za nevyhnutnú, zatiaľ čo druhá časť rukopisu je venovaná náročnejším témam pre pokročilých a ctižiadostivejších študentov.

Vlastnosti kvadratických plôch študujeme kvôli názornosti v trojrozmernom euklidovskom priestore a to pomocou analytického prístupu. Plochy sú zavedené algebrickými kvadratickými rovnicami a aj z toho dôvodu problematiku možno obsiahnuť komplexne, teda vhodne doplniť o vizualizáciu objektov použitím dynamických geometrických programov, či iných prostriedkov IKT.

Súčasne zastávame názor, že analytická metóda zodpovedá modernejšiemu prístupu. Tieto objekty a ich vlastnosti totiž nachádzajú široké uplatnenie v architektúre, strojárstve, inžinierskej praxi, v počítačovej grafike, a samozrejme, aj vo vzdelávaní – pri medzipredmetovej výučbe vybraných tematických celkov z matematiky, fyziky i chémie.

Metódou rezov vytvárame názorné predstavy o tvare a umiestnení takých plôch v priestore, akými sú guľová plocha, elipsoidy, paraboloidy a hyperboloidy. Okrem toho sa venujeme aj štúdiu vzájomného prieniku lineárnych útvarov a týchto plôch, čo je kľúčové pre ich aplikácie v rôznych technických odboroch.

V snahe uľahčiť štúdium problematiky, učebnica obsahuje množstvo riešených úloh a príkladov. Mnohé z nich názorne ilustrujú teoretické koncepty a poskytujú aj praktický návod na riešenie ďalších úloh. Zadania mnohých príkladov boli vybrané zo zbierok úloh uvedených v zozname použitej literatúry, ich riešenia sú autorským počinom. Čitateľov s hlbším záujmom o problematiku odkazujeme na uvedené informačné pramene, ktoré môžu poskytnúť dodatočné poznatky a cvičenia.

Milí čitatelia a študenti,

na záver máme milú povinnosť poďakovať recenzentom

prof. RNDr. Pavlovi Hanzelovi, CSc.
(Fakulta prírodných vied UMB v Banskej Bystrici)

Dr. h. c. prof. PaedDr. Tomášovi Lengyelfalusymu, PhD.
(Vysoká škola DTI v Dubnici nad Váhom)

za mnohé podnetné rady a pripomienky, ktoré pomohli vylepšiť rukopis.

Sme presvedčení, že táto vysokoškolská učebnica bude vaším cenným sprievodcom na ceste za poznaním, povedie Vás k hlbšiemu porozumeniu geometrii a pomôže Vám ako budúcim učiteľom inšpirovať seba i vašich žiakov k objavovaniu krás matematiky.

Autori

Základné pojmy

Karteziánska súradnicová sústava

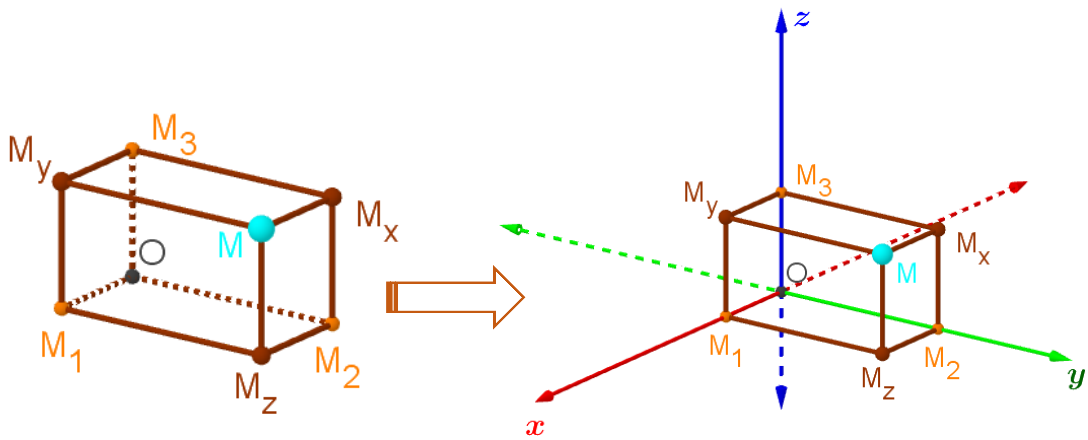
Štúdium kvadratických útvarov si vyžaduje znázorňovanie bodov, priamok, častí rovín a plôch v trojrozmernom euklidovskom priestore E_3 (štandardne je v literatúre euklidovský priestor definovaný nad poľom reálnych čísel).

Budeme používať **pravotočivú karteziánsku súradnicovú sústavu**[1] so začiatkom v bode $O[0,0,0]$ a súradnicovými osami o_x, o_y a o_z. Súradnicovú sústavu označíme jednoducho ako $\langle Oxyz \rangle$. V ďalšom texte budeme prívlastky „pravotočivá karteziánska" z úsporných dôvodov vynechávať.

Súradnicové roviny sú roviny určené jednotlivými súradnicovými osami:

a) rovina Oxy je určená osami o_x, o_y, začiatkom O a má rovnicu $z = 0$.
b) Rovina Oxz je určená osami o_x, o_z, začiatkom O a má rovnicu $y = 0$.
c) Rovina Oyz je určená osami o_y, o_z, začiatkom O a má rovnicu $x = 0$.

Súradnicové roviny rozdelia priestor E_3 na 8 „sektorov", ktoré nazývame **oktanty.** Ako **prvý oktant** nazývame množinu bodov $M[m_1, m_2, m_3] \in E_3$, kde $m_j \geq 0, j = 1,2,3$.



Obr. 1a, b

Bod $M[m_1, m_2, m_3] \in E_3$ znázorníme v súradnicovej sústave $\langle Oxyz \rangle$ ako vrchol kvádra

$$M_1 M_z M_2 O M_y M M_x M_3,$$

kde $M_1[m_1, 0,0]$, $M_2[0, m_2, 0]$, $M_3[0,0, m_3]$. Body M_x, M_y, M_z sú postupne kolmé priemety bodu M do súradnicových rovín a pre ich súradnice platí:

$$M_z[m_1, m_2, 0], \qquad M_y[m_1, 0, m_3], \qquad M_x[0, m_2, m_3].$$

---

[1] Označenie „**karteziánska"** znamená, že sú splnené dve dôležité podmienky:

a) osi o_x, o_y a o_z sú na seba po dvojiciach navzájom kolmé,
b) na každej osi je vyznačená rovnaká mierka, t.j. 1 dielik na každej osi reprezentuje úsečku rovnakej dĺžky. Nemôže nastať situácia, aby na súradnicových osiach boli rôzne jednotkové dĺžky, napr., na osi o_x by 1 dielik predstavoval úsečku dĺžky $1cm$, kým 1 dielik na osi o_y zase $1mm$ a pod.

Pomenovanie „**pravotočivá**" znamená určenie orientácie osí v priestore E_3. Ak by sme abstraktne umiestnili os o_x do pravej ruky tak, že jej kladná časť (polos) je orientovaná v smere prstov; kladná polos osi o_y smeruje z dlane do predlaktia, potom palec ukazuje kladnú časť osi o_z. Orientácia súradnicového systému vplýva na výsledky výpočtov, napr. na skalárny alebo vektorový súčin 2 vektorov.

Znázorňovanie bodov v súradnicovej sústave $\langle Oxyz\rangle$ je možné len v prípadoch, kedy sú súradnice príslušných bodov vyjadrené reálnymi číslami. Ak je niektorá zo súradníc bodu určená komplexným číslom, potom takýto bod nie je možné vizualizovať.

Kvadratická plocha

Kvadratickú plochu zavedieme definíciou.

Definícia

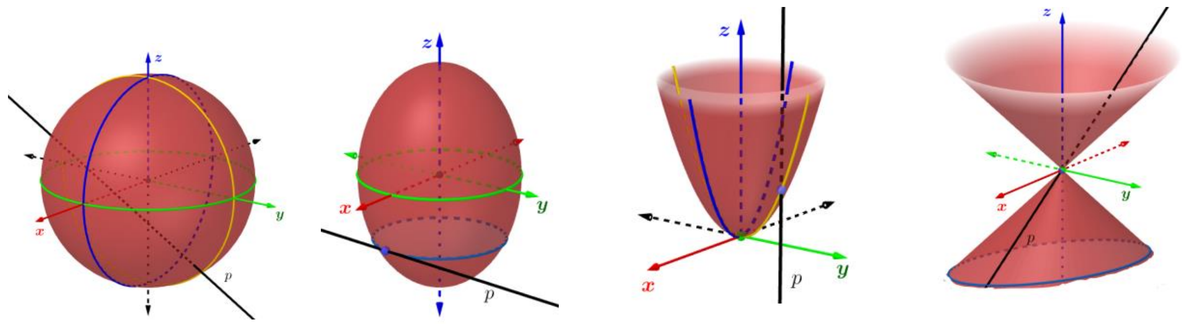
Plocha, ktorá je určená rovnicou druhého stupňa vzhľadom k súradniciam x, y, z a je v tvare

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \qquad (1)$$

kde $a_{ij} \in R, i, j = 1,2,3,4, [a_{11}, a_{22}, a_{33}] \neq [0,0,0]$ sa nazýva ***kvadratickou plochou.***

Kvadratickú plochu niekedy nazývame aj **plochou druhého stupňa**[2].

Ak sa ukáže, že kvadratická plocha má stred (bod, ktorý je stredom súmernosti uvažovanej plochy) hovoríme, že ide o **stredovú** plochu. Ukážky kvadratických plôch s vybranými rovinnými rezmi a prieniky jednotlivých priamok s plochou, sú ilustračne uvedené na obr. 2.



Obr. 2 a, b, c, d

Metóda rezov

Metóda rezov je postup, ktorým zisťujeme prienik plochy s vybranými priamkami a rovinami. Metóda je vhodná v prípadoch, ak si potrebujeme vytvoriť názornú predstavu ploche a jej umiestnení v súradnicovej sústave $\langle Oxyz\rangle$.

Z geometrického pohľadu skúmame spoločné body a krivky súradnicových osí, súradnicových rovín a vybraných rovín s plochou. Z matematického hľadiska riešime algebrické rovnice, ktorých výsledky interpretujeme geometricky.

Štandardný postup je nasledovný:

1. **Zistíme, či bod $O[0,0,0]$ je bodom plochy.**
2. **Určíme spoločné body plochy a súradnicových osí o_x, o_y a o_z.**
3. **Zistíme prieniky plochy so súradnicovými rovinami O_{xy}, O_{xz} a O_{yz}.**
4. **Určíme prienik s rovinami, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými rovinami.**
5. **Znázorníme kvadratickú plochu v súradnicovom systéme $\langle Oxyz\rangle$.**

[2] V tomto základnom učive v nasledujúcich kapitolách sa obmedzíme na rovnice kvadratických plôch, kde koeficienty pri členoch xy, xz, yz sa rovnajú nule.

Guľová plocha a guľa

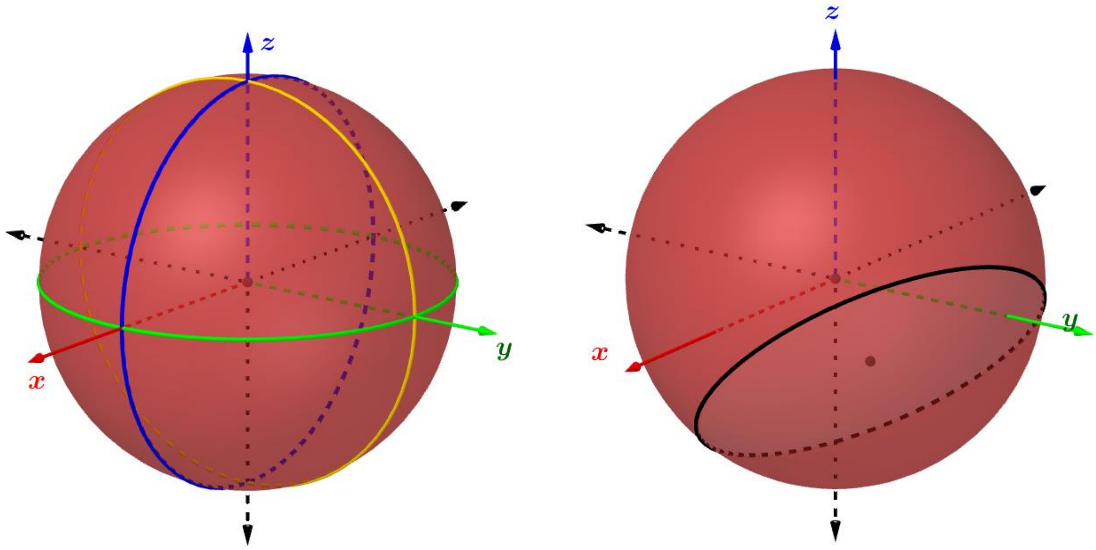
Guľová plocha je jedna zo základných trojrozmerných kvadratických plôch. Najprv túto plochu definujeme ako množinu bodov danej vlastnosti a následne odvodíme jej analytické vyjadrenie vo zvolenej súradnicovej sústave.

Definícia

Nech je v euklidovskom priestore E_3 zvolený bod S a je dané kladné reálne číslo r. ***Guľovou plochou*** *$\mathbb{G}$ nazveme množinu bodov X priestoru E_3, ktorých vzdialenosť od bodu S sa rovná r.*

Zapísané v zmysle definície: $\forall X \in E_3, S \in E_3, r \in R, r > 0\colon\ |SX| = r.$

Bod $\boldsymbol{S}$ nazývame **stredom** guľovej plochy, číslo $\boldsymbol{r}$ nazývame **polomerom**.[3] Najdlhšia tetiva guľovej plochy je **priemer** a jej stredom je stred guľovej plochy S. Guľovú plochu κ so stredom S a polomerom r zapisujeme $\kappa(S, r)$.



Obr. 3 a, b

Prienikom roviny α s guľovou plochou $\kappa(S, r)$ je:

a) **bod** T, ak $|S, \alpha| = r$. Bod T je dotykovým bodom roviny α, ktorá je dotykovou rovinou,
b) **kružnica** k, ak $|S, \alpha| < r$.
   - Ak stred kružnice k je totožný so stredom guľovej plochy S, kružnica k sa nazýva **hlavná kružnica** guľovej plochy jej polomer sa rovná r.
   - Ak stred kružnice k nie je totožný so stredom guľovej plochy S, kružnica k má menší polomer ako je polomer r uvažovanej guľovej plochy $\kappa(S, r)$.

Guľa je teleso, ktoré definujeme:

Definícia

Nech je v euklidovskom priestore E_3 zvolený bod S a je dané kladné reálne číslo r. ***Guľou*** *κ nazveme množinu bodov X priestoru E_3, ktorých vzdialenosť od bodu S sa* ***rovná alebo je menšia*** *ako r.*

Z definície vyplýva, že guľová plocha je súčasťou gule. Guľová plocha je hranicou gule.

[3] Slovensko - anglicky: bod – **point**; stred – **center**; guľová plocha/guľa – **sphere**; plocha – **surface**; polomer – **radius**; tetiva – **chord**; priemer - **diameter**

Guľová plocha ako rotačná plocha

Rotačné plochy[4] sa vo všeobecnosti definujú nasledovne:

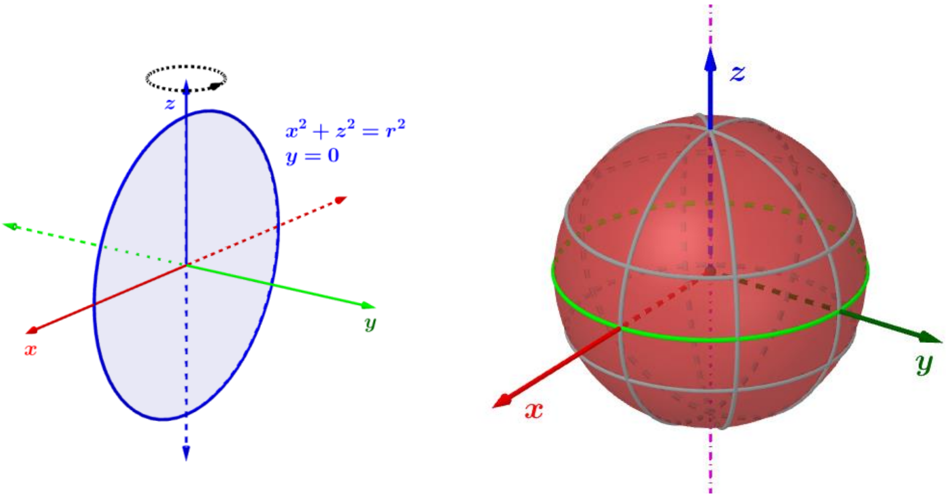
Definícia

Rotačnou plochou *nazývame každú plochu priestoru E_3, ktorá vznikne rotáciou danej rovinnej krivky okolo zvolenej priamky (osi rotácie).*

Každý bod rotujúcej krivky opisuje pri tejto rotácii tzv. „***rovnobežkovú kružnicu***“ alebo leží na si rotácie.

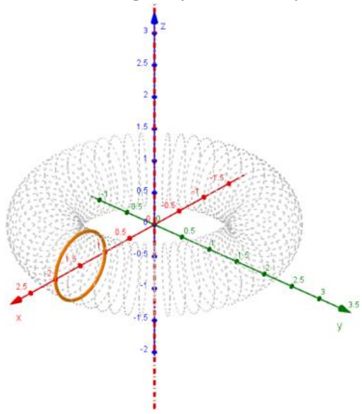
Prienik rotačnej plochy s rovinou prechádzajúcou osou rotácie je krivka, ktorú nazývame **meridiánom** rotačnej plochy.

Ak v rovine $y = 0$ umiestnenú kružnicu $x^2 + z^2 = r^2$ necháme rotovať okolo osi o_z, pričom uhol otočenia (v rovine $z = 0$) bude $\varphi = 180°$, vytvorí sa guľová plocha[5] $\kappa(\mathrm{S}, \mathrm{r})$, kde $\mathrm{S}[0,0,0]$. Os $\mathrm{o_z}$ je (v tejto situácii) **osou rotácie** (skrátene len **os**). V prípade, že rotuje kruh, vznikne guľa[6].



Obr. 4 a, b

[4] Slovensko - anglicky: rotačná plocha – **surface of revolution**;



[6] Pri rotácii kružnice okolo vybranej osi môže vzniknúť aj iná než guľová plocha. Napr., ak sa v rovine $y = 0$ ležiaca kružnica $(x - \frac{3}{2})^2 + z^2 = 1$ otáča okolo súradnicovej osi o_z, vznikne plocha, ktorú nazývame **torus** (anuloid, kruhový prstenec).

[7] V kartografii sú zavedené pojmy: ***referenčná guľová plocha*** – ideálny model zemského telesa (***geoidu***). ***Poludníky*** sú hlavné kružnice - meridiány a prechádzajú bodmi (***pólmi***) , v ktorých rotačná os pretína referenčnú guľovú plochu). ***Rovnobežkami*** sa nazývajú kružnice ležiace v rovinách kolmých na os rotácie a ***rovník*** je geografická rovnobežka maximálneho polomeru. Poludníky a rovnobežky určujú na referenčnej guľovej ploche tzv. ***geografickú sieť***.

Stredová rovnica guľovej plochy

Ak je pevne určená súradnicová sústava $\langle Oxyz \rangle$ v priestore E_3 a súčasne bude daný bod $S[m,n,p]$ a polomer r. Ak ľubovoľný bod $X[x,y,z]$ leží na guľovej ploche, potom platí:

$$|SX| = r$$

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2} = r.$$

Úpravou (umocnením) odvodíme **stredovú rovnicu guľovej plochy**

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Naopak, každý bod $X[x,y,z]$, ktorého súradnice vyhovujú rovnici (1), leží na uvažovanej guľovej ploche.

Príklad

Určte stredovú rovnicu guľovej plochy, ktorá má stred $S[0,-1,3]$ a prechádza bodom $A[6,-1,-5]$.

Riešenie.

Pre polomer r guľovej plochy $\kappa(S,r)$ vypočítame:

$$r = |SA| = \sqrt{(0-6)^2 + (-1-(-1))^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{36+0+64} = 10.$$

Použijeme (1) a dostaneme:

$$(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 100.$$

Príklad

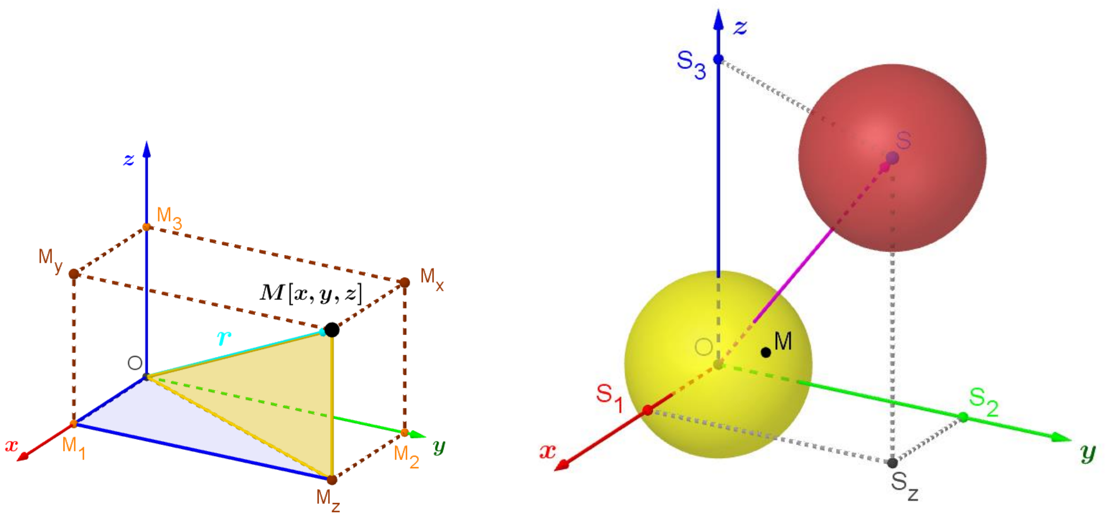
Pomocou Pytagorovej vety a posunutia odvoďte stredovú rovnicu guľovej plochy so stredom $S[m,n,p]$ a polomerom r.

Riešenie.

Nech $O[0,0,0]$ a je zvolené číslo $r > 0$. Ak bod $M[x,y,z]$ je bodom guľovej plochy $\kappa(O,r)$, potom podľa Pytagorovej vety (použitej v trojuholníku $OM_{:1}M_z$) platí:

$$|OM_z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

kde $M_z[x,y,0]$.



Obr. 5 a, b

Následne z Pytagorovej vety pre trojuholník OM_zM odvodíme

$$|OM|^2 = |OM_z|^2 + |M_zM|^2$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Posunutie $S_{\overrightarrow{OS}}$ s vektorom $\overrightarrow{OS} = (m,n,p)$ je definované rovnicami:

$$x' = x + m, \qquad y' = y + n, \qquad z' = z + p$$

a platí:

$$x = x' - m, \qquad y = z' - n, \qquad z = y' - p.$$

V posunutí $\mathcal{S}_{\overrightarrow{OS}}$ zobrazíme guľovú plochu do guľovej plochy s rovnicou (1) v tvare:

$$(x' - m)^2 + (y' - n)^2 + (z' - p)^2 = r^2.$$

Všeobecná rovnica guľovej plochy

Uvažujme guľovú plochu určenú stredovou rovnicou (3). Algebrickými úpravami odvodíme:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz + m^2 + n^2 + p^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \tag{3}$$

kde $\quad a = -2m,\ \ b = -2n,\ \ c = -2p,\ \ d = m^2 + n^2 + p^2 - r^2,$ pre $\ a, b, c, d \in R.$

Rovnicu (5) nazývame **všeobecnou rovnicou guľovej plochy**.

Nie každá rovnica v tvare (5) je však analytickým vyjadrením guľovej plochy.

Uvedieme dva jednoduché príklady:

a) rovnica $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 16z + 138 = 0$ po úpravách (na „úplné štvorce“) má tvar

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 8)^2 = -64.$$

Nejde o vyjadrenie guľovej plochy, pretože $r^2 = -64$. Neexistuje bod s reálnymi súradnicami, ktorého súradnice by vyhovovali uvedenej rovnici.

b) Rovnica $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 16z - 64 = 0$ taktiež nevyjadruje guľovú plochu, keďže $r^2 = 0$. Existuje však jediný bod s reálnymi súradnicami, ktorého súradnice vyhovujú danej rovnici - bod $S[-1, 3{,}8]$.

Skutočnosť, že guľovú plochu v priestore E_3 jednoznačne určujú 4 body neležiace v jednej rovine, je algebricky zdôvodnená rovnicou (5), resp. (3).

Koeficienty $a, b\,, c, d \in R$ sú štyri (výberom na sebe nezávislé) reálne čísla. Ak „rozumne“ stanovíme ich hodnoty (výpočtom odvodené $r > 0$), určíme guľovú plochu jednoznačne.

Všeobecná rovnica guľovej plochy určenej 4 bodmi $[x_k, y_k, z_k], k = 1{,}2{,}3{,}4$, má rovnicu vyjadrenú determinantom: [7]

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

[7] Weisstein, Eric W. "Sphere." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. Originálny zdroj: Beyer, W. H. (Ed.). CRC Standard Mathematical Tables, 28th ed. Boca Raton, FL: CRC Press, p. 227, 1987.

Príklad

Určte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza bodmi $O[0,0,0], A[3,0,0], B[0,4,0], C[0,0,3]$.

Riešenie.

a) Body A, B, C a O neležia v jednej rovine. Všeobecná rovnica guľovej plochy bude v tvare (3), preto za premenné x, y, z postupne dosadíme súradnice daných bodov . Odvodíme:

$$O[0,0,0] \to \; 0^2+0^2+0^2+a.0+b.0+c.0+d=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d=0}\,.$$
$$A[3,0,0] \to \; 3^2+0^2+0^2+a.3+b.0+c.0+d=0 \quad \Rightarrow \quad a=-3$$
$$B[0,4,0] \to \; 0^2+4^2+0^2+a.0+b.4+c.0+d=0 \quad \Rightarrow \quad b=-4\,.$$
$$C[0,0,3] \to \; 0^2+0^2+3^2+a.0+b.0+c.3+d=0 \quad \Rightarrow \quad c=-3\,.$$

Rovnica guľovej plochy je

$$x^2+y^2+z^2-3x-4y-3z=0,$$

z ktorej po úpravách „na štvorce“ odvodíme stredovú rovnicu:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}.$$

Stred guľovej plochy je $S\left[\frac{3}{2},2,\frac{3}{2}\right]$ a polomer $r=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

b) Použijeme determinant.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Rozvojom determinant podľa 2. riadku dostaneme:

$$1.(-1)^{5+2}.\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z \\ 9 & 3 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Následne rozvojom podľa 1. riadku a použitím Sarrusovho pravidla odvodíme:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z \\ 9 & 3 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=(x^2+y^2+z^2).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}+x.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{vmatrix}+y.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{vmatrix}+$$

$$+z.(-1)^{1+4}.\begin{vmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 16 & 0 & 4 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=36x^2+36y^2+36z^2-108x-144y-108z=0.$$

Po úprave

$$x^2+y^2+z^2-3x-4y-3z=0.$$

Poznámka k metóde rezov na guľovej ploche

Aplikovať metódu rezov na guľovú plochu znamená zistiť, či guľová plocha určená rovnicou

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0:$$

a) prechádza bodom $O[0,0,0]$.
   Ak je začiatok súradnicovej sústavy bodom guľovej plochy, potom všeobecná rovnica guľovej plochy má absolútny člen $d = 0$.
b) Zistíme prieniky so súradnicovými osami.
   Ak bod $X[x_0, 0,0], x_0 \neq 0$ leží na guľovej ploche, potom x_0 je reálnym riešením kvadratickej rovnice $x_0^2 + ax_0 + d = 0$.
   Analogicky sa zistia spoločné body guľovej plochy s osami o_y, o_z.
c) Ak existujú neprázdne prieniky guľovej plochy so súradnicovými rovinami, resp. s rovinami s nimi rovnobežnými, potom sú to **body** alebo **kružnice**.
   Ak rovina $\alpha: z = m, m \in R$ pretína guľovú plochu v kružnici, potom je kružnica (ako rovinná krivka) určená práve dvomi rovnicami:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cm + d = 0 \quad \text{a súčasne} \quad z = m.$$

   Kružnica v priestore E_3 je určená ako parametrické riešenie sústavy dvoch rovníc s tromi neznámymi x, y, z.

Cvičenie

1. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ak je daný:
   a) stred $S[0,1,-1]$ a polomer $r = 3$,
   b) stred $S[0,1,-1]$ a prechádza začiatkom súradnicovej sústavy,
   c) stred $S[-2,1,0]$ a bod guľovej plochy $A[0,3,-1]$,
   d) priemer určený úsečkou AB, kde $A[-1,2,3], B[3,2,-1]$,
2. Zistite súradnice stredu guľovej plochy a jej polomer, ak je daná rovnica:
   a) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$,
   b) $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 8y - 14z - 10 = 0$,
   c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 5 = 0$,
   d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 10z + 36 = 0$,
   e) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 24y - 16z - 25 = 0$
3. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza bodmi
   a) $A[-1,-1,-1], B[1,1,1], C[-1,-1,1]$ a $D[1,-1,1]$,
   b) $A[2,-4,2], B[-4,8,2], C[5,-1,14]$ a $D[-7,-4,5]$.
4. Určte hodnotu parametra $a \in R$ tak, aby rovnica $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$:
   a) predstavovala guľovú plochu,
   b) nebola rovnicou guľovej plochy.
5. Aký je polomer guľovej plochy, ak guľová plocha určená rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 + px + py + pz = 0$ s parametrom $p \in R$ prechádza bodom $O[0,0,0]$?
6. Napíšte rovnicu roviny kolmej k priamke AB, kde $A[1,0,3], B[-2,1,0]$., ktorá prechádza stredom guľovej plochy danej rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 3z = 0$.
7. Napíšte rovnicu guľovej plochy so stredom $S[4,-2,3]$, ktorá na priamke $\frac{x-5}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{3} = t, t \in R$ vytína tetivu dĺžky 12.
8. Určte body priemeru guľovej plochy danej rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$, ktorý leží na priamke p so smerovým vektorom $\vec{s} = (1,-1,1)$.

9. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá sa dotýka súradnicových rovín a súčasne aj roviny α s rovnicou $3x - 2y + 6z - 18 = 0$.
10. Napíšte rovnicu geometrického miesta bodov[8] X, pre ktoré platí: $\frac{|AX|}{|BX|} = k$, $k > 0, k \neq 1$, ak $A[0,0,0], B[c,0,0]$, $c \neq 0$.

[8] Ide o analógiu Apolóniovej kružnice v rovine. Geometricky – guľová plocha vznikne rotáciou Apolóniovej kružnice okolo osi o_x.

Elipsoid

Elipsoid, rovnako ako guľová plocha, patrí medzi základné kvadratické plochy. Najprv si pomocou afinnej transformácie vytvoríme intuitívnu predstavu o tejto ploche. Následne odvodíme jej analytické vyjadrenie vo zvolenej súradnicovej sústave.

Stredová rovnica elipsoidu

Nech je daná guľová plocha $\kappa(O, r), O[0,0,0], r > 0$, rovnicou

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Guľovú plochu $\kappa(O, r)$ v afinnom zobrazení $f: E_3 \to E_3$ vyjadrenom rovnicami[9]

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{r}x \\ y' &= \frac{b}{r}y \\ z' &= \frac{c}{r}z, \end{aligned} \tag{5}$$

kde $a, b, c \in R$: $a > 0, b > 0, c > 0$, zobrazíme do kvadratickej plochy, ktorej analytické vyjadrenie odvodíme nasledovne:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{r}{a}x'\right)^2 + \left(\frac{r}{b}y'\right)^2 + \left(\frac{r}{c}z'\right)^2 = r^2$$

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1. \tag{6}$$

Plocha určená rovnicou (7) pretína súradnicové osi o_x, o_y, o_z postupne v bodoch $[\pm a, 0,0], [0, \pm b, 0]$ a $[0,0, \pm c]$.

So súradnicovým rovinami má kvadratická plocha s rovnicou (7) nasledovné prieniky:

a) rovina $z = 0$ pretne plochu v elipse $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$,

b) rovina $y = 0$ pretne plochu v opäť elipse, avšak s rovnicou $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1$,

c) rovina $x = 0$ pretne plochu tiež v elipse, určenej rovnicou $\frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1$.

Ak $a \neq b \neq c \neq a$, potom plocha nie je rotačnou plochou akou je guľová plocha $\kappa(O, r)$.

V prípade rovín rovnobežných so súradnicovými rovinami dostaneme:

a) ak uvažujeme rovinu $z = k$, kde $0 < k < c, k \in R$, rezom je tiež elipsa a platí:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(k)^2}{c^2} = 1$$

---

[9] V ďalšom texte stotožníme pravotočivé súradnicové sústavy $\langle Oxyz \rangle$ a $\langle O'x'y'z' \rangle$ tak, že $O \equiv O', x \equiv x'$, $y \equiv y'$ a $z \equiv z'$. Kvôli názornosti to v obrázkoch nebudeme zdôrazňovať.

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

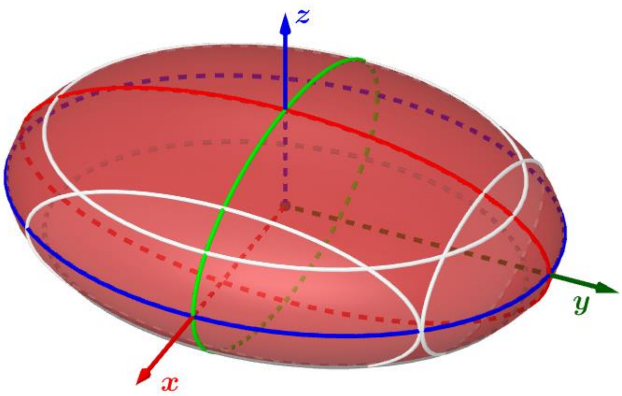
$$\frac{(x')^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{(y')^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Ak parameter $k \in (0, c)$, potom sú jednotlivé elipsy (ako rezy) navzájom podobné (majú rovnaký pomer dĺžok ich polosí., t.j. $a:b$).

b) Rovina $z = c$ sa plochy dotkne v jednom bode.
c) Rovina $z = k, k > c, k \in R$ plochu nepretína v reálnej krivke.

d) Obdobná situácia nastane pre rezy rovinami
$$y = l,\ \ 0 < l < b \qquad \text{a} \qquad x = m,\ \ 0 < m < a.$$

Afinným zobrazením (6) sme získali kvadratickú plochu, ktorú nazývame **elipsoidom**[10].



Obr. 6

Definícia

Kvadratickú plochu vyjadrenú v súradnicovej sústave $\langle Oxyz\rangle$ rovnicou

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1, \tag{7}$$

*kde $a, b, c \in R, a > 0, b > 0, c > 0$, nazývame **elipsoidom** so stredom $S[m, n, p]$ a polosami a, b, c.*

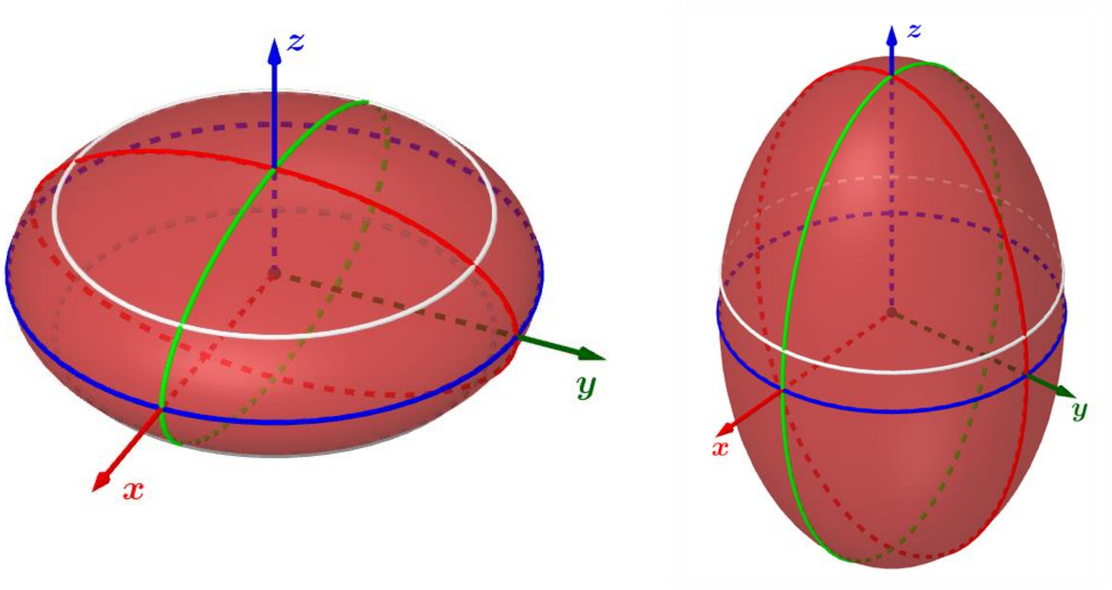
a) Rovnica sa nazýva **stredová rovnica elipsoidu**.
b) Body so súradnicami $[m \pm a, n, p]$, $[m, n \pm b, p]$, $[m, n, p \pm c]$ nazývame **vrcholy** elipsoidu**.**
c) Stred elipsoidu je súčasne aj bodom súmernosti tejto plochy. Ak $S[0,0,0]$, potom hovoríme, že elipsoid je v *základnej polohe.*

Ak porovnávame dĺžky polosí, potom:

1. pre $a \neq b \neq c \neq a$ hovoríme, že elipsoid je **trojosový**.
2. Ak $a = b, a \neq c$ je elipsoid rotačnou plochou s osou rotácie o_z. Plochu nazývame:

a) **splošteným** elipsoidom pre $a > c$,
b) **pretiahlym** elipsoidom pre $a < c$.

[10] Slovensko - anglicky: elipsoid – **ellipsoid**; rotačný elipsoid – **spheroid**; trojosový elipsoid – **triaxial ellipsoid**; sploštený elipsoid – **oblate spheroid**; pretiahly elipsoid – **prolate spheroid**



Obr. 7 a, b

Všeobecná rovnica elipsoidu

Algebrickou úpravou stredovej rovnice odvodíme:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}+\frac{(z-p)^2}{c^2}=1 \quad /.\, a^2b^2c^2 \neq 0$$

$$b^2c^2(x-m)^2+a^2c^2(y-n)^2+a^2b^2(z-p)^2=1$$

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2-2mb^2c^2x-2na^2c^2y-2pa^2b^2z+m^2+n^2+p^2-1=0$$

Ak označíme reálne koeficienty

$$A=b^2c^2, \quad B=a^2c^2, \quad C=a^2b^2, \quad D=-2mb^2c^2, \; E=-2na^2c^2,$$
$$F=-2pa^2b^2, \; E=m^2+n^2+p^2-1,$$

potom

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+E=0. \tag{8}$$

Vzťah nazývame **všeobecnou rovnicou elipsoidu**[11], ak $A>0, B>0, C>0$. Nie každá všeobecná rovnica je analytickým vyjadrením elipsoidu (obdobne ako pri guľovej ploche).

Z predpokladu, že v rovnici je $A>0$, vydelíme rovnicu koeficientom A. Odvodíme:

$$x^2+\frac{B}{A}y^2+\frac{C}{A}z^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}z+\frac{E}{A}=0$$

$$x^2+Py^2+Qz^2+Rx+Sy+Tz+U=0$$

Koeficienty P, Q, R, S, T a U určujú rovnicu kvadratickej plochy jednoznačne. Z toho vyplýva, že elipsoid je v priestore E_3určený **šiestimi** nezávislými bodmi.

[11] V texte sme informatívne ukázali prechod od stredovej rovnice ku všeobecnej rovnici elipsoidu. Je zrejmé, že všeobecná rovnica je špecifickým prípadom rovnice (1). V ďalšom texte už nebudeme odvodzovať všeobecné rovnice ostatných kvadratických plôch, pretože v praxi sa najviac používajú práve stredové rovnice (sú prehľadnejšie - z vyjadrenia môžeme priamo identifikovať typ plochy).

Príklad

Rovnica elipsoidu je $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 16y - 39z = 0$. Určte súradnice jeho stredu a dĺžku polosí.

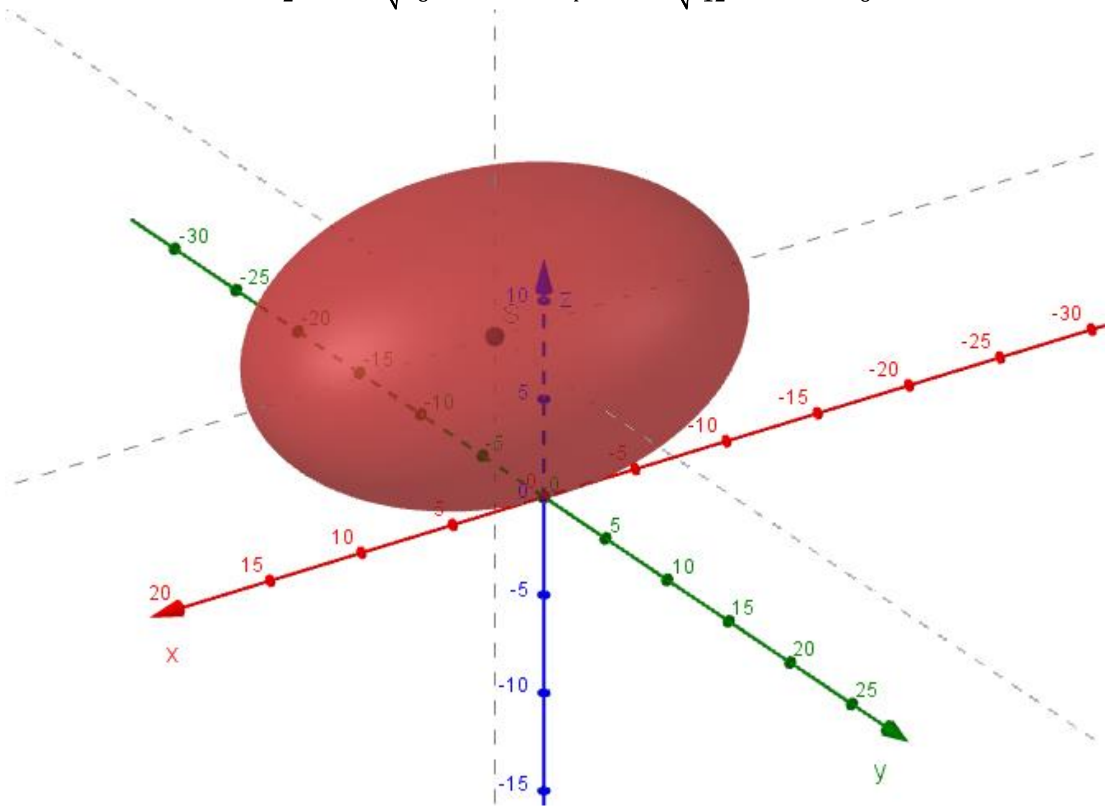
Riešenie.

Postupne upravujeme:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 16y - 39z = 0$$
$$x^2 + 2(y^2 + 8y) + 3(z^2 - 13z) = 0$$
$$x^2 + 2(y^2 + 2.4.y) + 3\left(z^2 - 2.\frac{13}{2}.z\right) = 0$$
$$x^2 + 2(y^2 + 2.4.y + 4^2 - 4^2) + 3\left(z^2 - 2.\frac{13}{2}.z + \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2\right) = 0$$
$$x^2 + 2(y+4)^2 - 32 + 3\left(z - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{507}{4} = 0$$
$$x^2 + 2(y+4)^2 + 3\left(z - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{635}{4}$$
$$\frac{x^2}{\frac{635}{4}} + \frac{(y+4)^2}{\frac{635}{8}} + \frac{\left(z - \frac{13}{2}\right)^2}{\frac{635}{12}} = 1$$

Stred elipsoidu má súradnice $S\left[0, -4, \frac{13}{2}\right]$ a polosi sú:

$$a = \frac{\sqrt{635}}{2}, b = \sqrt{\frac{635}{8}} = \cdots = \frac{\sqrt{1270}}{4}, c = \sqrt{\frac{635}{12}} = \cdots = \frac{\sqrt{1905}}{6}.$$



Obr. 8

Cvičenie

1. Napíšte stredovú rovnicu elipsoidu so stredom S a polosami, ak:
   a) $S[0,10,5], a = 2, b = 12, c = 3,$
   b) $S[0,0,-5], a = 1 = b, c = 9,$
   c) $S\left[-1,-\frac{1}{2},-5\right], a = 5, b = 16, c = 1.$
2. Určte stred a polosi elipsoidu, ak je daný rovnicou:
   a) $3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2z = 0$
   b) $9x^2 + 25y^2 + 225z^2 - 18x + 50y + 1350z - 1834 = 0$
3. Zistite, aká množina bodov je určená rovnicou $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = a, \quad a \in R.$
4. Určte rovnicu rovinného rezu elipsoidu s rovnicou $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, ak rovina rezu α má rovnicu:
   a) $x = 5,$ b) $z = 0.$
5. Určte geometrické miesto bodov v priestore E_3, ktorých súčet vzdialeností od dvoch daných bodov $F_1[0,0,c]$, $F_2[0,0-c], c \in R, c \neq 0$ je konštantný a rovný $2a$, kde $a \in R, a > 0.$

Hyperboloidy

Hyperboloid je kvadratická plocha, ktorá sa odlišuje od predchádzajúcich plôch (guľová plocha, elipsoid) tým, že nie je ohraničená. Rozlišujeme dva druhy hyperboloidov. Postupne ich intuitívne priblížime ako obrazy guľovej plochy v istej transformácii a následne odvodíme ich stredové rovnice. Všeobecné rovnice uvádzať nebudeme, sú analogické všeobecnej rovnici elipsoidu.

Jednodielny hyperboloid

Nech je daná guľová plocha $\kappa(O,r), O[0,0,0]$ analytickým vyjadrením

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Zobrazenie dané rovnicami[12]

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{r}x \\ y' &= \frac{b}{r}y \\ z' &= i.\frac{c}{r}z, \end{aligned} \tag{9}$$

kde $a,b,c \in R$: $a>0, b>0, c>0$ a i je imaginárna jednotka v obore komplexných čísel $\mathbb{C}$, zobrazí guľovú plochu do jej obrazu. Odvodíme analytické vyjadrenie obrazu:

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{r}{a}x'\right)^2+\left(\frac{r}{b}y'\right)^2+\left(i\frac{r}{c}z'\right)^2=r^2$$

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}=1. \tag{10}$$

Ukážeme, že rovnicu (11) môžu spĺňať súradnice x', y', z' **reálnych bodov**.

V prvom rade, plocha určená rovnicou (11) pretne súradnicové osi o_x, o_y postupne v reálnych bodoch $[\pm a,0,0]$, $[0,\pm b,0]$. Os o_z plocha nepretína v reálnom bode, pretože $-(z')^2=c^2$.

Prienikom plochy s osou o_z sú imaginárne body $[0,0,\pm i.c]$.[13]

Kvadratická plocha má nasledovné prieniky so súradnicovými rovinami:

a) Ak $a \neq b$, potom rovina $z=0$ pretne plochu v elipse s rovnicou $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$.

   Ak $a=b$, potom prienikom plochy s rovinou $z=0$ je kružnica.

b) rovina $y=0$ pretne plochu v hyperbole, ktorej rovnica je $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(z')^2}{c^2}=1$,

c) rovina $x=0$ pretne plochu tiež v hyperbole s rovnicou $\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}=1$.

V prípade rovín, rovnobežných so súradnicovými rovinami, odvodíme rovnice rezov nasledovne:

[12] Zobrazenie, ktorého matica má koeficienty komplexné čísla, sa nedá názorne vizualizovať. Napr. bod guľovej plochy so súradnicami $[0,0,r]$ sa zobrazí do **imaginárneho bodu** $[0,0,i.c]$. Imaginárnym bodom nazveme taký bod, ktorého aspoň jedna súradnica je vyjadrená komplexným číslom.

[13] Imaginárnym bodom bodom nebudeme venovať zvláštnu pozornosť.

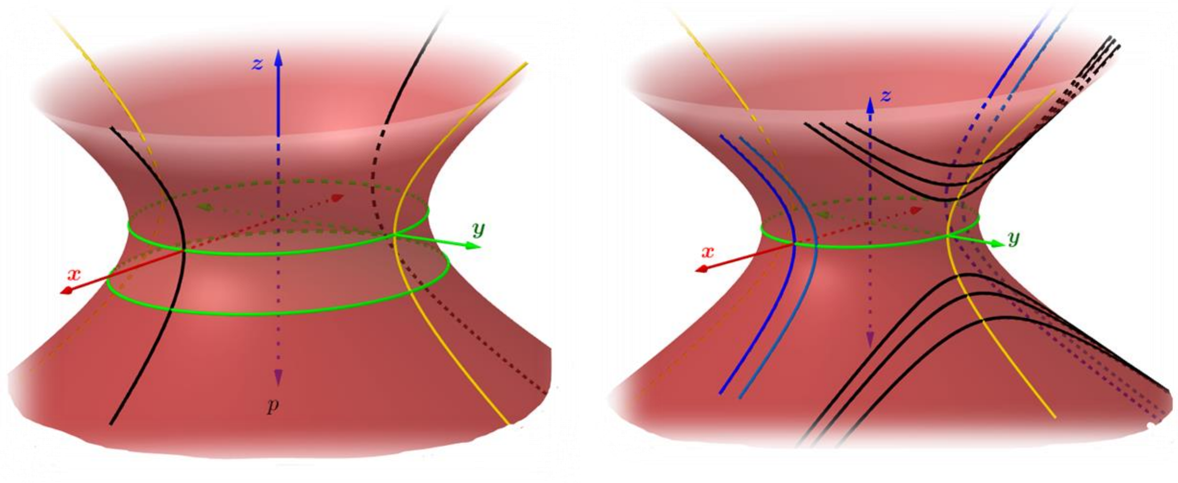
a) rovina $z = k$, kde $0 < k, k \in R$, pretne plochu v reze, ktorým je elipsa a platí:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(k)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

$$\frac{(x')^2}{a^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{(y')^2}{b^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Rezy sú navzájom podobné elipsy.



Obr. 9 a, b

b) Ak zostrojujeme rez rovinou $y = l,\ \ 0 < l < b$, potom prienikom je hyperbola:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(l)^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = 1 - \frac{\mathrm{l}^2}{b^2}$$

$$\frac{(x')^2}{a^2\left(1 - \frac{\mathrm{l}^2}{b^2}\right)} - \frac{(z')^2}{c^2\left(1 - \frac{\mathrm{l}^2}{b^2}\right)} = 1,$$

ktorej hlavné osi sú rovnobežné s osou o_x.

c) Rovina $y = b$ pretne plochu v jednom bode.

d) Rez rovinou $y = l, l > b$ je taktiež hyperbola s hlavnou osou rovnobežnou s o_z, pretože $1 - \frac{\mathrm{l}^2}{b^2} < 0$.

e) Obdobná situácia nastáva pre rezy rovinami rovnobežnými so súradnicou rovinou Oyz.

Zobrazením (9) sme odvodili rovnicu novej kvadratickej plochy, ktorú nazývame **jednodielnym hyperboloidom**[14]**.**

[14] Čitateľ získa pomerne názornú predstavu o tvare jednodielneho hyperboloidu. Stačí, ak sa pozrie obrázky, na ktorých sú chladiace veže jadrových elektrární, resp. obr. 13.

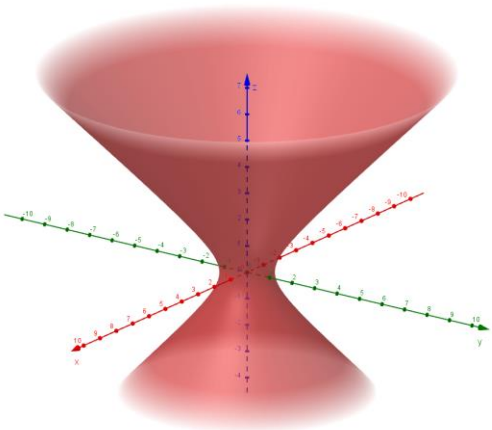
Definícia

Kvadratickú plochu vyjadrenú v súradnicovej sústave $\langle Oxyz \rangle$ rovnicou

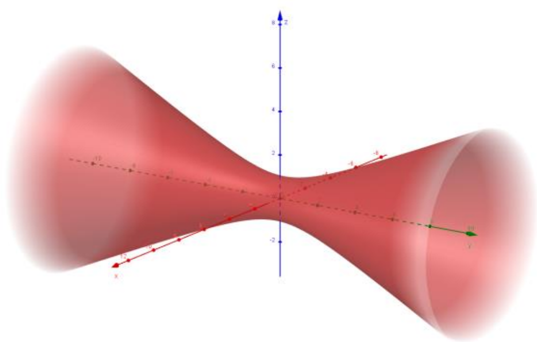
$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}-\frac{(z-p)^2}{c^2}=1, \qquad (11)$$

kde $a,b,c \in R, a>0, b>0, c>0$, nazývame jednodielnym hyperboloidom so stredom $S[m,n,p]$ a polosami a,b,c.

a) Rovnicu (12) nazývame **stredovou rovnicou jednodielneho hyperboloidu**[15].
b) Body so súradnicami $[m \pm a, n, p]$, $[m, n \pm b, p]$, nazývame **vrcholy.**
c) Stred jednodielneho hyperboloidu súčasne aj bodom súmernosti tejto plochy. Rovnako je plocha súmerná podľa priamok, ktoré prechádzajú jeho stredom a sú rovnobežné so súradnicovými osami.
d) Ak $S[0,0,0]$ a os plochy je totožná so súradnicovou osou, potom hovoríme, že jednodielny hyperboloid je v *základnej polohe*[16].



$x^2+y^2-z^2=1$



$x^2-\frac{1}{5}y^2+z^2=1$

Obr. 10 a, b

Rozlišujeme:

a) ak $a=b$, potom ide o rotačnú plochu s osou rotácie o_z. Na obr. 11a je ukážka jednodielneho rotačného hyperboloidu v základnej polohe
b) Ak pre $a \neq b$ hovoríme, že jednodielny hyperboloid je **eliptický**. Ukážka je na obr. 11b.

Príklad
Ukážte, že každý bod priamky určenej bodmi $A[-4,1,4], B[1,1,-1]$ leží na jednodielnom rotačnom hyperboloide s rovnicou $x^2+y^2-z^2=1$.
Riešenie. Rovnica priamky určenej bodmi A, B je v parametrickom tvare:

$$X = A + t.(B-A), t \in \mathbb{R}$$

---

[15] Slovensko – anglicky: hyperboloid – **hyperboloid**; jednodielny hyperboloid – **one-sheeted hyperboloid,** eliptický jednodielny hyperboloid **– elliptical one-sheeted hyperboloid;** rotačný hyperboloid – **circular hyperboloid;**

[16] V základnej polohe sú aj hyperboloidy, ktorých rovnice sú:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{alebo} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

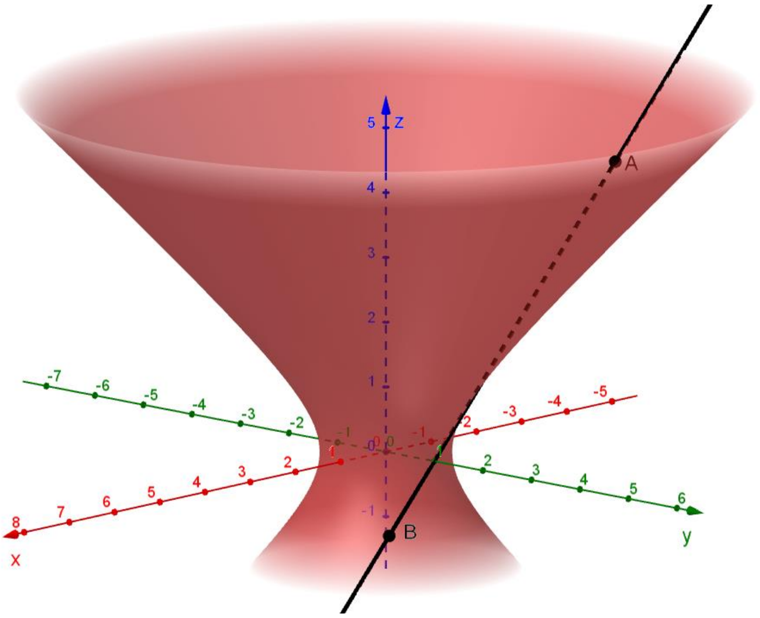
a platí

$$x = -4 + \big(1 - (-4)\big).\, t = -4 + 5t,$$
$$y = 1 + (1 - 1).\, t = 1$$
$$z = 4 + (-1 - 4).\, t = 4 - 5t.$$

Dosadíme do výrazu $x^2 + y^2 + z^2$.

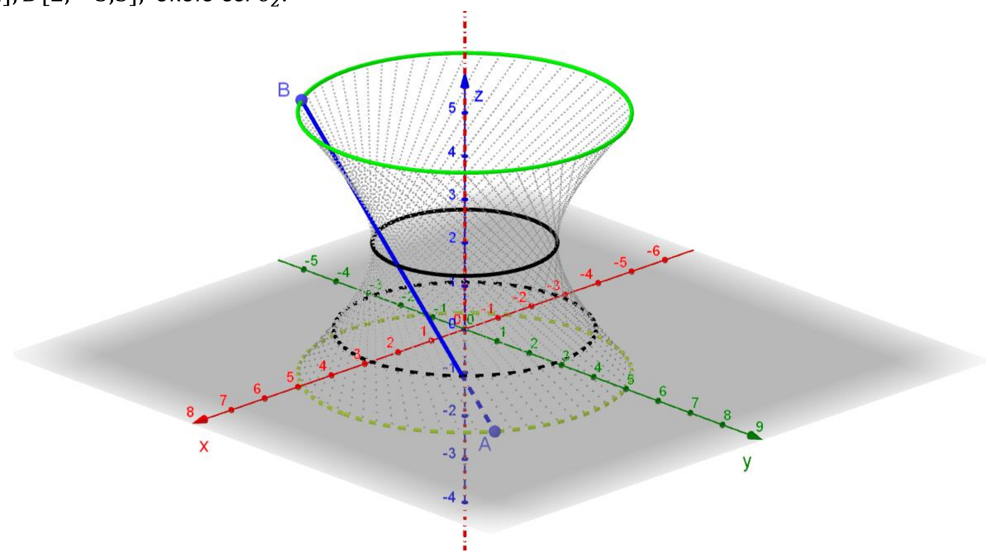
$$x^2 + y^2 + z^2 = (-4 + 5t)^2 + 1^2 - (4 - 5t)^2 =$$
$$= (16 - 40t + 25t^2)^2 + 1^2 - (16 - 40t + 25t^2)^2 = 1.$$

Z uvedeného vyplýva, že každý bod priamky $\overleftrightarrow{AB}$ leží na kvadratickej ploche. Hovoríme, že priamka $\overleftrightarrow{AB}$ leží na jednodielnom hyperboloide.



Obr. 11

Poznámka. Z riešenia príkladu vyplýva dôležitá vlastnosť jednodielneho hyperboloidu - ide o tzv. ***priamkovú plochu.*** *Priamková plocha je plocha, ak každým jej bodom prechádza aspoň jedna priamka, ktorá leží v danej ploche. Na obr. 13 je znázornená časť jednodielneho hyperboloidu, ktorý vznikol rotáciou úsečky* AB*, kde* $A[2,3 - 1], B[2, -3,5]$*, okolo osi* o_z*.*



Obr. 12

Dvojdielny hyperboloid

Nech je daná guľová plocha $\kappa(O,r), O[0,0,0], r>0$ analytickým vyjadrením

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Zobrazenie dané rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= i\cdot\frac{a}{r}x \\ y' &= i\cdot\frac{b}{r}y \\ z' &= \frac{c}{r}z, \end{aligned} \tag{12}$$

kde $a,b,c\in R$: $a>0, b>0, c>0$ a i je komplexná imaginárna jednotka, zobrazí guľovú plochu do jej plochy s analytickým vyjadrením:

$$x^2+y^2+z^2=\left(i\cdot\frac{r}{a}x'\right)^2+\left(i\cdot\frac{r}{b}y'\right)^2+\left(\frac{r}{c}z'\right)^2=r^2$$

$$-\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}+\frac{(z')^2}{c^2}=1. \tag{13}$$

Ukážeme, že okrem imaginárnych bodov, existujú aj reálne body, ktoré ležia na danej ploche.

Prienikom plochy a súradnicových osí sú imaginárne body $[\pm i.a,0,0],[0,\pm i.b,0]$ a dva reálne body $[0,0,\pm c]$.

Kvadratická plocha s rovnicou (14) má nasledovné prieniky so súradnicovými rovinami:

a) rovina $z=0$ nepretína kvadratickú plochu v reálnych bodoch, pretože rovnica

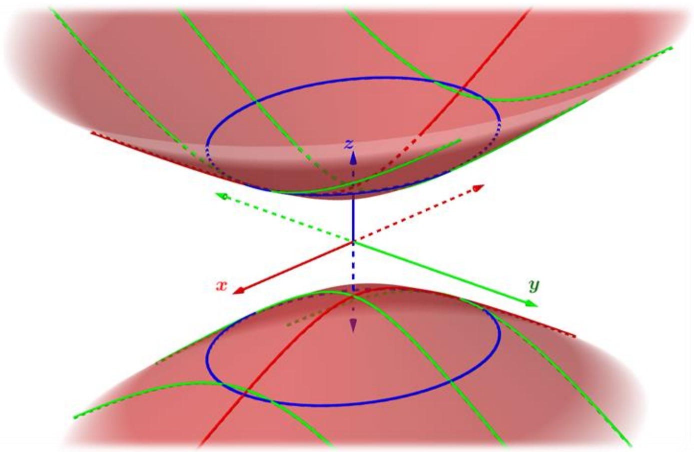
$$-\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

nemá v $R\ xR$ riešenie.

b) Rovina $y=0$ pretne plochu v hyperbole, ktorej rovnica je v tvare $-\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(z')^2}{c^2}=1$,

c) rovina $x=0$ plochu pretína plochu tiež v hyperbole s rovnicou

$$-\frac{(y')^2}{b^2}+\frac{(z')^2}{c^2}=1.$$



Obr. 13

Roviny, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými rovinami, pretínajú plochu nasledovne:

d) rovina $z = k$, kde $-c < k < c, k \in R$, nepretne plochu, pretože:

$$-\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(k)^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

$$-\frac{(x')^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} - \frac{(y')^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Ľavá strana rovnice je záporná pre všetky $[x', y'] \in R\ xR$, kým pravá strana sa rovná 1.

e) Ak $z = \pm k$, potom prieniky príslušných rovín a plochy sú dva body $[0,0,\pm c]$.

f) Ak $z = k$, kde $|k| > |c|$, potom prienikom je vždy elipsa

$$-\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(k)^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1 - \frac{(k)^2}{c^2}$$

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$$

$$\frac{(x')^2}{a^2\left(\frac{k^2}{c^2} - 1\right)} + \frac{(y')^2}{b^2\left(\frac{k^2}{c^2} - 1\right)} = 1.$$

Z uvedeného vyplýva, že kvadratická plocha má dve časti.

g) Ak zostrojujeme rez rovinou $y = l,\ l \in R$, potom prienikom je hyperbola:

$$-\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(l)^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1 + \frac{\mathrm{l}^2}{b^2}$$

$$-\frac{(x')^2}{a^2\left(1 + \frac{\mathrm{l}^2}{b^2}\right)} + \frac{(z')^2}{c^2\left(1 + \frac{\mathrm{l}^2}{b^2}\right)} = 1.$$

h) V prípade roviny $x = m,\ m \in R$, rovina plochu pretína v hyperbole

$$-\frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1 + \frac{m^2}{a^2},$$

$$-\frac{(y')^2}{b^2\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)}+\frac{(z')^2}{c^2\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)}=1.$$

Zobrazením (13) sme odvodili rovnicu novej kvadratickej plochy, ktorú nazývame **dvojdielnym hyperboloidom.**

Definícia

Kvadratickú plochu vyjadrenú v súradnicovej sústave $\langle Oxyz\rangle$ rovnicou

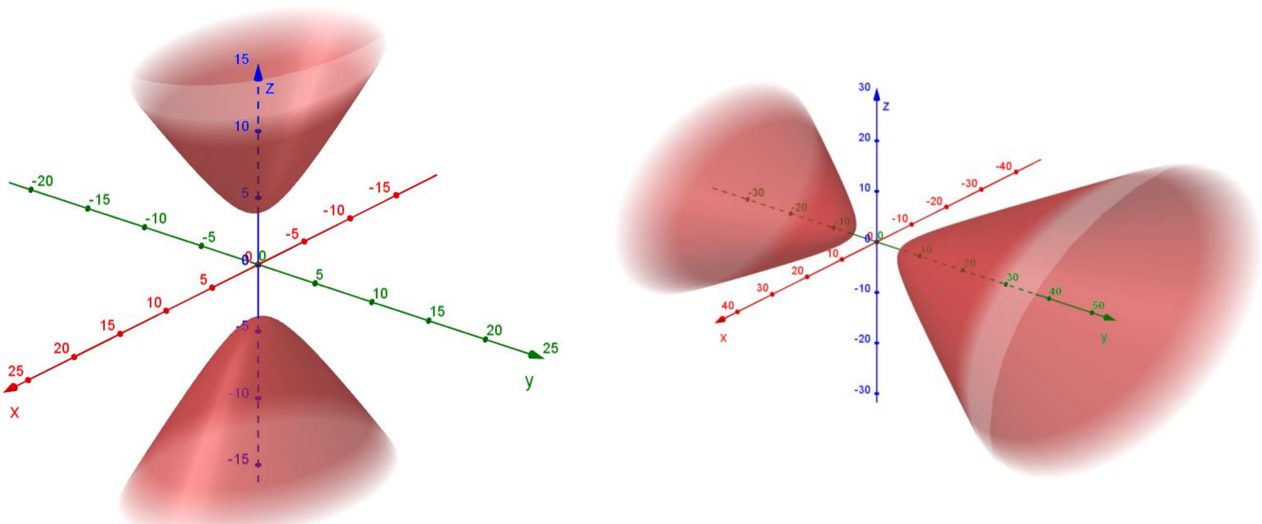
$$-\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}+\frac{(z-p)^2}{c^2}=1, \tag{14}$$

kde $a,b,c\in R, a>0, b>0, c>0,$ *nazývame* ***dvojdielnym hyperboloidom*** *so stredom* $S[m,n,p]$ *a polosami* a,b,c.

a) Rovnicu nazývame **stredovou rovnicou dvojdielneho hyperboloidu**[17]. Body so súradnicami $[m,n,p\pm c]$ nazývame **vrcholy.**

b) Stred dvojdielneho hyperboloidu súčasne aj bodom súmernosti tejto plochy. Rovnako je plocha súmerná podľa priamok, ktoré prechádzajú jeho stredom a sú rovnobežné so súradnicovými osami. Nazývame ich **osami** hyperboloidu.

c) Ak $S[0,0,0]$ a plocha má os totožnú so súradnicovou osou, potom hovoríme, že dvojdielny hyperboloid je v *základnej polohe*[18].



$$-\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1 \qquad\qquad -\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{9}=1$$

Obr. 14 a, b

[17] Slovensko – anglicky: dvojdielny hyperboloid – **two-sheeted hyperboloid** alebo aj **hyperboloid of two sheets;**

[18] V základnej polohe sú aj dvojdielne hyperboloidy, ktorých rovnice sú:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{alebo} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ak porovnávame dĺžky polosí, potom:

a) pre $a \neq b$ hovoríme, že dvojdielny hyperboloid je **eliptický**.
b) Ak $a = b$, potom ide o rotačnú plochu s osou rotácie o_z.

Cvičenie

1. Napíšte rovnicu jednodielneho hyperboloidu, ktorý má stred v bode $S[-1,2,-5]$ a polosi dĺžok $a = 5, b = 2$, $c = 1$, ak má os rovnobežnú so súradnicovou:
   a) osou o_x, b) osou o_y, c) osou o_z.
2. Určte prienik hyperboloidu daného rovnicou $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ s rovinou α, ak jej rovnica je:
   a) $x = -5$ b) $y = 4$ c) $z = -3$.
3. Aplikujte metódu rezov a znázornite plochu, ak jej rovnica je v tvare:
   a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$,
   b) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{1} = -1$.
4. Zistite stred a polosi hyperboloidu daného rovnicou:
   a) $-9x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 18x - 50y - 209 = 0$,
   b) $6x^2 - 4y^2 - 3z^2 + 24x + 12z = 0$.
5. Aká množina bodov je daná rovnicou:
   a) $x^2 + y^2 - 3z^2 + 15a^2 = 0$, kde $a \in R$,
   b) $-2x^2 + y^2 + 20x - az^2 + 34 = 0$, kde $a \in R - \{0\}$.

Paraboloidy

Paraboloidy sú kvadratické plochy, ktoré (obdobne ako hyperboloidy) nie sú ohraničené. Rozlišujeme dva druhy paraboloidov. Postupne uvedieme ich definície a odvodíme rovnice.

Eliptický paraboloid

Nech je daná guľová plocha $\kappa(O,r), O[0,0,0], r>0$ rovnicou

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Zobrazením $f: E_3 \to E_3$ s rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{r}x \\ y' &= \frac{b}{r}y \\ z' &= -\frac{1}{r^2}z^2, \end{aligned} \tag{15}$$

kde $a,b,c \in R$: $a>0, b>0, c>0$, zobrazí guľovú plochu do plochy s rovnicou:

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{r}{a}x'\right)^2+\left(\frac{r}{b}y'\right)^2-r^2.z'=r^2$$

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=z' \tag{16}$$

Kvadratická plocha určená rovnicou (17) má takéto prieniky so súradnicovými rovinami:

a) rovina $z=0$ sa dotýka kvadratickej plochy v bode $O[0,0,0]$.

b) Rovina $y=0$ pretne plochu v parabole, ktorej rovnica je $\frac{(x')^2}{a^2}=z'$.

c) Rovina $x=0$ plochu pretína plochu tiež v parabole, ktorej rovnica je $\frac{(y')^2}{b^2}=z'$.

Roviny, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými rovinami, pretínajú plochu nasledovne:

a) rovina $z=k$, kde $0<k, k\in R$, pretne plochu v elipse s polosami $a\sqrt{k}, b\sqrt{k}$, pretože:

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=k \qquad /:k\neq 0$$

$$\frac{(x')^2}{ka^2}+\frac{(y')^2}{kb^2}=1$$

b) Ak zostrojujeme rez rovinou $y=l$, $l\in R$, potom prienikom je parabola s vrcholom $V_y\left[0,l,\frac{l^2}{b^2}\right]$.

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(l)^2}{b^2}=z'$$
$$\frac{(x')^2}{a^2}=z'-\frac{(l)^2}{b^2}$$

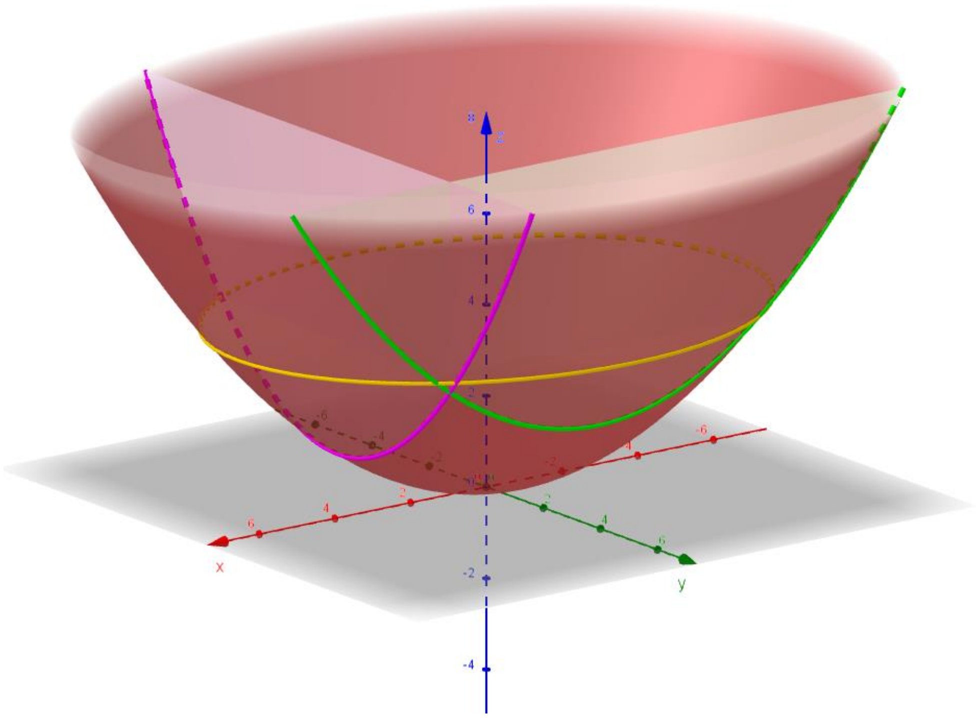
c) V prípade roviny $x=m$, $m\in R$, rovina plochu pretína tiež v parabole, ale s rovnicou

$$\frac{(m)^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=z'$$

$$\frac{(y')^2}{b^2}=z'-\frac{(m)^2}{a^2},$$

ktorej vrchol je $V_x\left[m,0,\frac{m^2}{a^2}\right]$

Odvodili rovnicu novej kvadratickej plochy, ktorú nazývame **paraboloidom.**



Obr. 15

Definícia

Kvadratickú plochu vyjadrenú v súradnicovej sústave $\langle Oxyz\rangle$ rovnicou

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=z-p, \tag{17}$$

*kde $a,b\in R, a>0, b>0$, nazývame **eliptickým paraboloidom** s vrcholom $V[m,n,p]$.*

a) Rovnicu nazývame aj **vrcholovou rovnicou eliptického paraboloidu**[19].

b) Ak $a=b$, hovoríme, že paraboloid je **rotačný**. V prípade plochy s rovnicou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z$ sú rezy rovinami $z=k, k>0$, kružnice, ktoré majú stredy na osi o_z a polomery $r=a\sqrt{k}$.

c) Ak je vrchol paraboloidu $V[0,0,0]$ a plocha je určená rovnicou v tvare (17), potom hovoríme, že paraboloid je v *základnej polohe*[20].

[19] Slovensko – anglicky: eliptický paraboloid – **elliptic paraboloid;**

[20] V základnej polohe sú aj paraboloidy, ktorých rovnice sú:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-z,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=y,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=-y,\quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=x\quad ,\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=-x,$

Hyperbolický paraboloid

Nech je daná guľová plocha $\kappa(O,r), O[0,0,0], r > 0$ analytickým vyjadrením

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Zobrazenie dané rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{r}x \\ y' &= \frac{b}{i.r}y \\ z' &= -\frac{1}{r^2}z^2, \end{aligned} \tag{18}$$

kde $a, b \in R$: $a > 0, b > 0$, a i je komplexná imaginárna jednotka, zobrazí guľovú plochu do plochy s analytickým vyjadrením:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{r}{a}x'\right)^2 + \left(i \cdot \frac{r}{b}y'\right)^2 - z'.r^2 = r^2$$

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = z'. \tag{19}$$

Prienikom plochy a súradnicových osí o_x, o_y, o_z je len jeden bod $O[0,0,0]$.

Kvadratická plocha s rovnicou (18) má nasledovné prieniky so súradnicovými rovinami:

a) rovina $z = 0$ pretína plochu v priamkach, ktorých rovnice odvodíme nasledovne:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}\right) \cdot \left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}\right) = 0$$

$$\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b} = 0 \ \wedge z = 0 \quad \text{alebo} \quad \frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 0 \ \wedge z = 0.$$

Obe priamky prechádzajú bodom $O[0,0,0]$.

b) Rovina $y = 0$ pretne plochu v parabole s rovnicou $\frac{(x')^2}{a^2} = z'$.

c) Rovina $x = 0$ plochu pretína plochu tiež v parabole, avšak s rovnicou $-\frac{(y')^2}{b^2} = z'$.

Vrcholom každej paraboly je bod $O[0,0,0]$.

Roviny, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými rovinami, pretínajú plochu nasledovne:

d) rovina $z = k$, kde $k \in R, k > 0$, pretne plochu v hyperbole s rovnicou:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = k$$

$$\frac{(x')^2}{a^2k} - \frac{(y')^2}{b^2k} = 1.$$

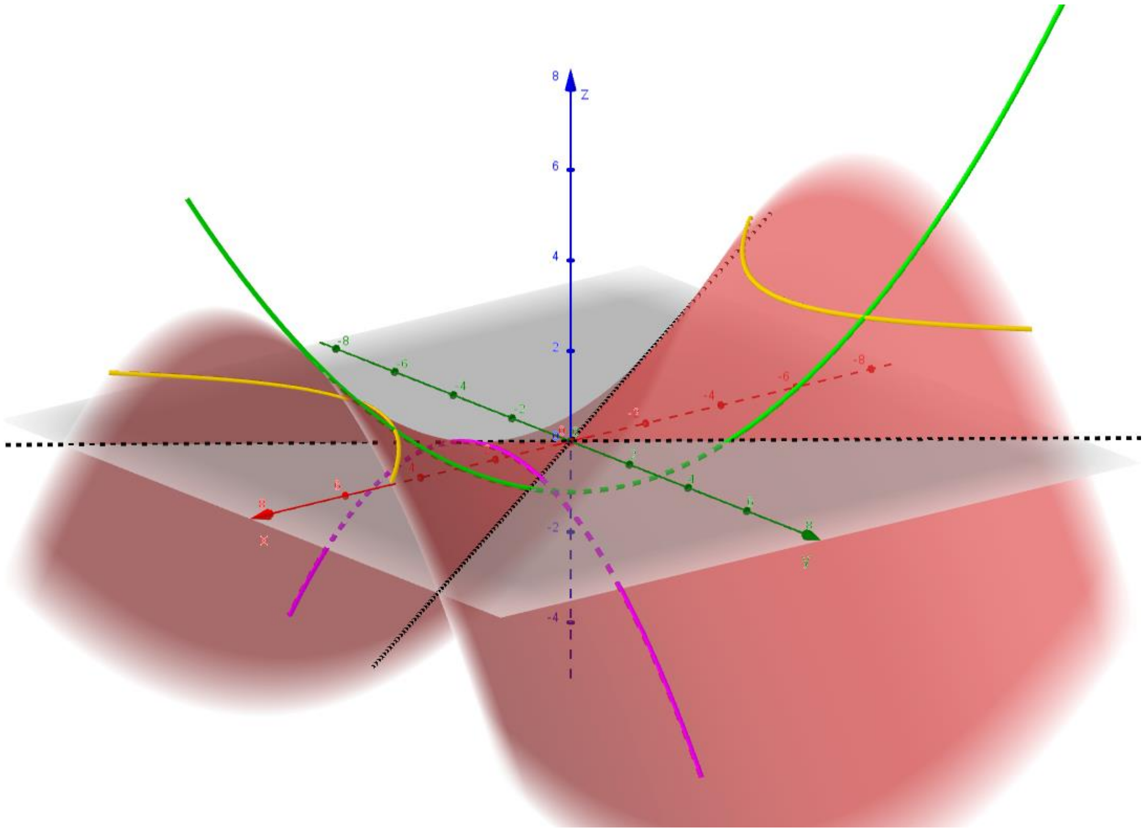
e) Ak $k < 0$, potom hyperbola má rovnicu: $-\frac{(x')^2}{a^2k} + \frac{(y')^2}{b^2k} = 1.$

f) Ak zostrojujeme rez rovinou $y = l,\ l \in R$, potom prienikom je parabola:

$$\frac{(x')^2}{a^2} = z + \frac{l^2}{b^2}$$

g) V prípade roviny $x = m,\ m \in R$, rovina pretína plochu v parabole

$$-\frac{(y')^2}{b^2} = z - \frac{m^2}{a^2}$$



Obr. 16

Zobrazením (17) sme odvodili rovnicu novej kvadratickej plochy, ktorú nazývame **hyperbolickým paraboloidom**[21]**.**

Definícia

Kvadratickú plochu vyjadrenú v súradnicovej sústave $\langle Oxyz \rangle$ *rovnicou*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = z - p, \tag{20}$$

kde $a, b \in R, a > 0, b > 0,$ *nazývame* ***hyperbolickým paraboloidom*** *s vrcholom* $V[m, n, p]$ *a polosami* a, b.

Rovnicu nazývame **vrcholovou rovnicou hyperbolického paraboloidu**. Ak je paraboloid určený rovnicou v tvare (20) a súčasne $V[0,0,0]$, potom hovoríme, že je v *základnej polohe*[22].

[21] Slovensko – anglicky: hyperbolický paraboloid – **hyperbolic paraboloid.**

[22] Intuitívne - hyperbolický parabolid má tvar v podobe “konského sedla“. V základnej polohe sú aj dvojdielne hyperboloidy, ktorých rovnice sú:

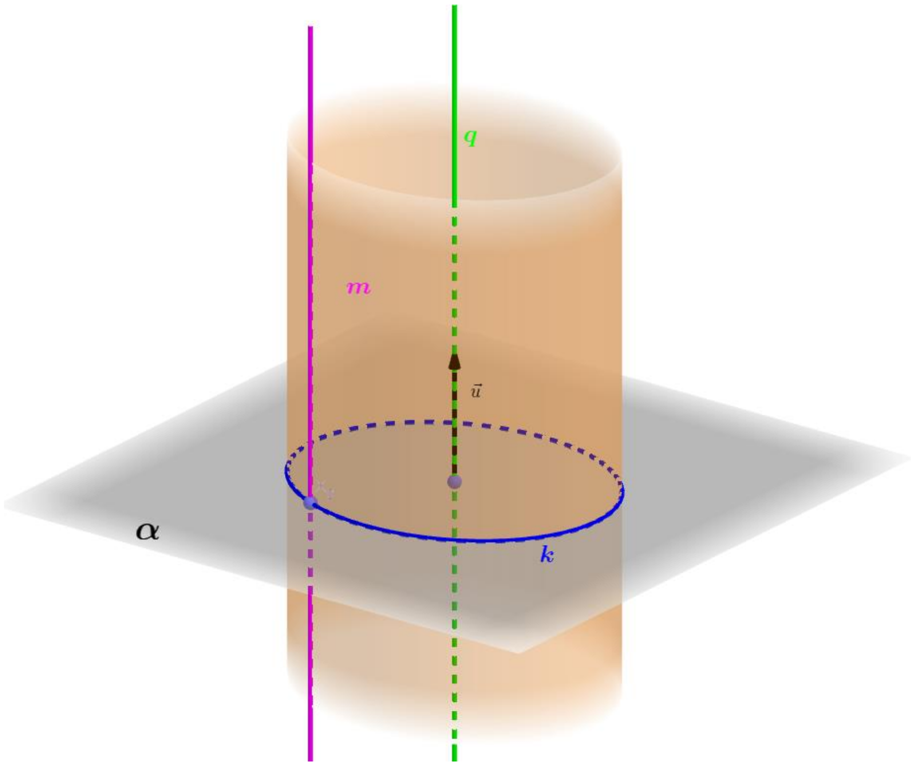
Cvičenie

1. Určte súradnice vrcholu a polosi paraboloidu daného rovnicou:
   a) $x^2 + \frac{z^2}{9} = 9y,$
   b) $9x^2 + y^2 - 36x - 36z + 4 = 0,$
   c) $4y^2 + 3z^2 - 720x - 6z + 3 = 0,$
2. Aplikujte metódou rezov a znázornite plochy z cvičenia 1.
3. Zistite súradnice vrcholu a polosi hyperbolického paraboloidu daného rovnicou:
   a) $5x^2 - y^2 - 20x - 50z + 20 = 0,$
   b) $25y^2 - 4z^2 - 100x - 50y - 16z + 9 = 0.$
4. Aká množina bodov je určená rovnicou:
   a) $x^2 - y^2 = 2az$ pre $a \neq 0, a \in R,$
   b) $x^2 + y^2 + a = z$ pre $a \neq 0, a \in R,$
   c) $16x^2 + 16y^2 - 8az - a^2 = 0$ pre $a \neq 0, a \in R$
5. Určte množinu bodov, ktoré majú od bodu $F\left[0,0,\frac{a}{2}\right]$ a od roviny α s rovnicou $z = -\frac{a}{2}$ rovnaké vzdialenosti.

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = y, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = y, \quad -\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = x, \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = x.$$

Valcová plocha

Medzi kvadratické plochy patria aj valcové plochy. Názornú predstavu o nich vytvoríme na základe definície. Následne odvodíme rovnicu kužeľovej plochy.



Obr. 17

Definícia

Nech je daná kužeľosečka k ležiaca v rovine α a priamka p, ktorá nie je rovnobežná s rovinou α. Ďalej nech bod X_0 je ľubovoľným bodom kužeľosečky k, ktorým zostrojíme priamku m rovnobežnú s priamkou q. Množina všetkých priamok m uvedenej vlastnosti vypĺňa plochu, ktorú nazývame ***valcovou plochou (druhého stupňa)*****[23].**

Kužeľosečku k nazývame **riadiacou kužeľosečkou valcovej plochy** 2.stupňa**,** priamky m sú **priamky valcovej plochy** 2.stupňa**.**

V ďalšom texte budeme o valcovej ploche hovoriť bez dodatku „2. stupňa“ [24].

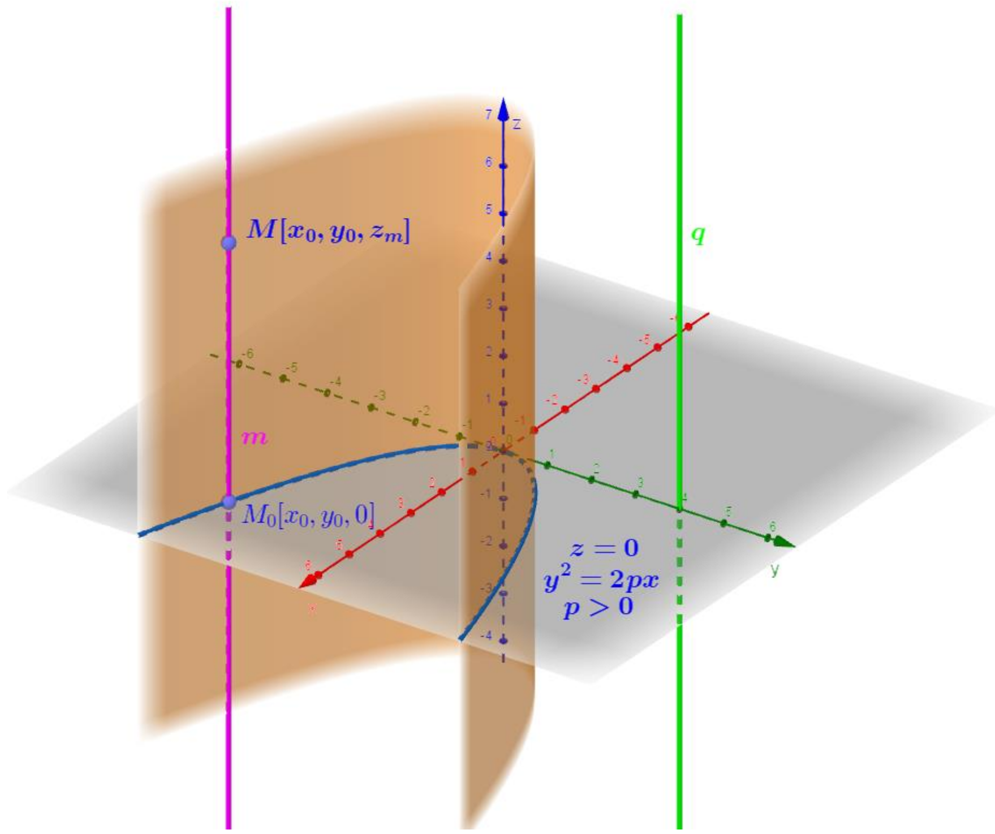
Samotná kužeľosečka k môže byť regulárna krivka (elipsa; kružnica; parabola; hyperbola) alebo aj singulárna (2 rôznobežky; 2 rovnobežky; priamka; bod). Podľa typu regulárnej kužeľosečky rozlišujeme **eliptickú, kruhovú** (**rotačnú**), **parabolickú** alebo **hyperbolickú** valcovú plochu.

V prípadoch, kedy je priamka p rovnobežná s niektorou súradnicovou osou, napr. o_z, je rovnica valcovej plochy identická s rovnicou kužeľosečky.

[23] Slovensko – anglicky: valcová plocha – **cylindrical surface;** valec - **cylinder.**

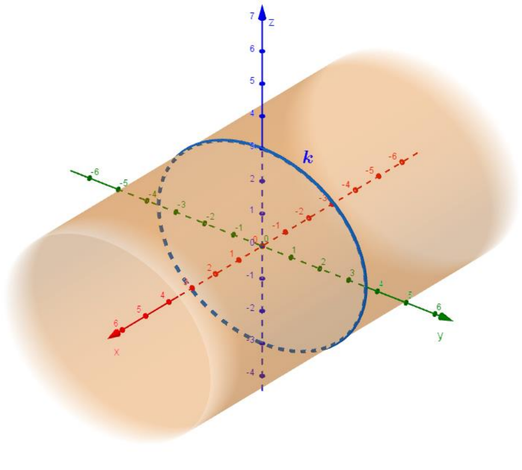
[24] Dodatok 2. stupňa je dôležitý, ak by sme zovšeobecňovali pojem valcovej plochy, kde riadiaca krivka k nemusí byť kužeľosečkou. Napr., mohli by sme uvažovať o krivke ako o grafe funkcie $y = \sin x$ v rovine $z = 0$.

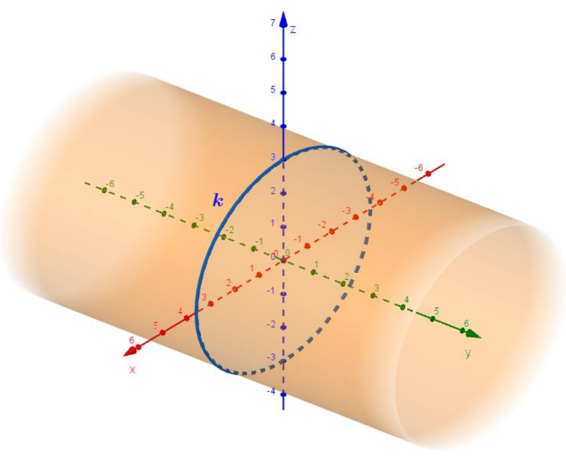
Nech v rovine $z = 0$ leží parabola $y^2 = 2px, p \neq 0, p \in R$. Ak bod $M_0[x_0, y_0, 0]$ je bodom danej paraboly, potom každý bod $M[x_0, y_0, z_m]$, pre ľubovoľné $z_m \in R$, priamky m valcovej plochy vyhovuje rovnici $y^2 = 2px$.



Obr. 18

Riadiaca kužeľosečka môže byť umiestnená aj v inej súradnicovej rovine než $z = 0$. Na obr. 19a je rovina $\alpha: x = 0$; na obr. 19b je $\alpha: y = 0$.





Obr. 19 a, b

Základné prvky určitej valcovej plochy identifikovať jej rovnice, ak v tejto rovnici absentuje niektorá z premenných. Ukážeme na príklade.

Príklad

Zistite, aké plochy sú určené rovnicami:

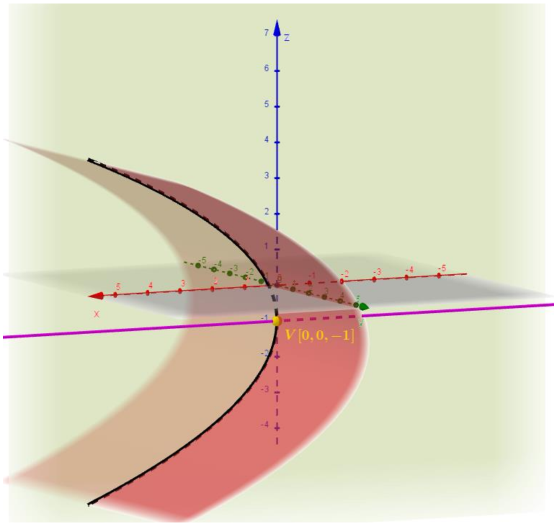
a) $z^2 + 2z - 4x + 1 = 0$

b) $9y^2 - 16z^2 + 64z - 18y - 199 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 2ax,\ kde\ a \in R.$

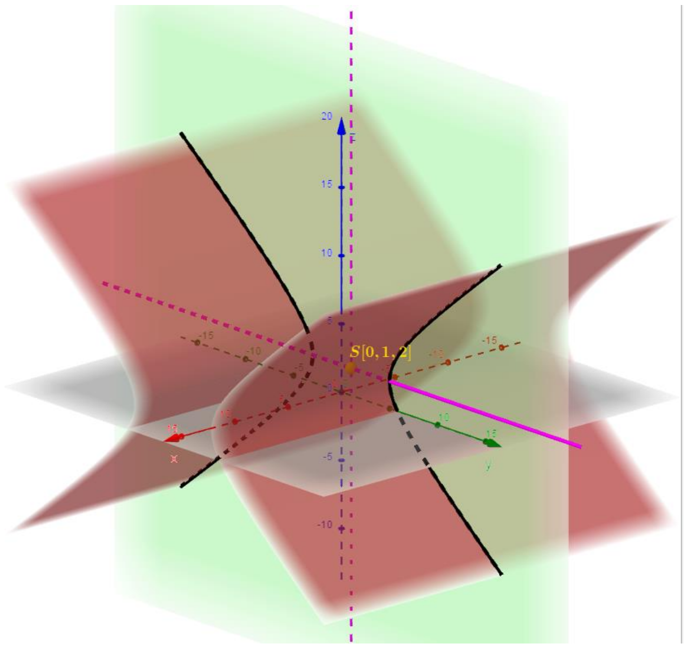
Riešenie.

a) Rovnica neobsahuje premennú y, preto ide o valcovú plochu s osou rovnobežnou s o_y. Určujúca krivka plochy je parabola s rovnicou $(z+1)^2 = 4x$ ležiaca v súradnicovej rovine Oxz s rovnicou $y = 0$. Vrchol paraboly je v bode $V[0,0,-1]$.



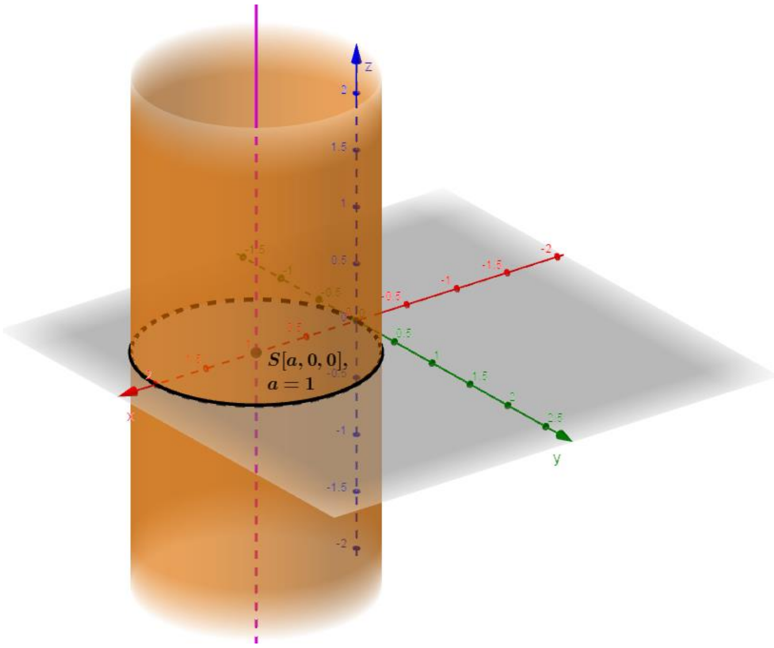
Obr. 20

b) Keďže rovnica neobsahuje premennú x, rovnica určuje valcovú plochu s osou rovnobežnou s o_x. Určujúca krivka plochy je hyperbola s rovnicou $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(z-2)^2}{9} = 1$, ktorá leží v súradnicovej rovine Oyz s rovnicou $x = 0$. Stred hyperboly je v bode $S[0,1,2]$.



Obr. 21

c) V tomto prípade rovnica neobsahuje premennú z. Plocha je valcovou plochou s osou rovnobežnou so súradnicovou osou o_z. Určujúca krivka plochy je kružnica určená s rovnicou $(x-a)^2+y^2=a^2$ pre $a \neq 0$, ktorá leží v rovine Oxy s rovnicou $z=0$. Stred kružnice je bod $S[a,0,0]$.
Ak $a=0$, riešením je priamka – súradnicová os o_z.



Obr. 22

Príklad

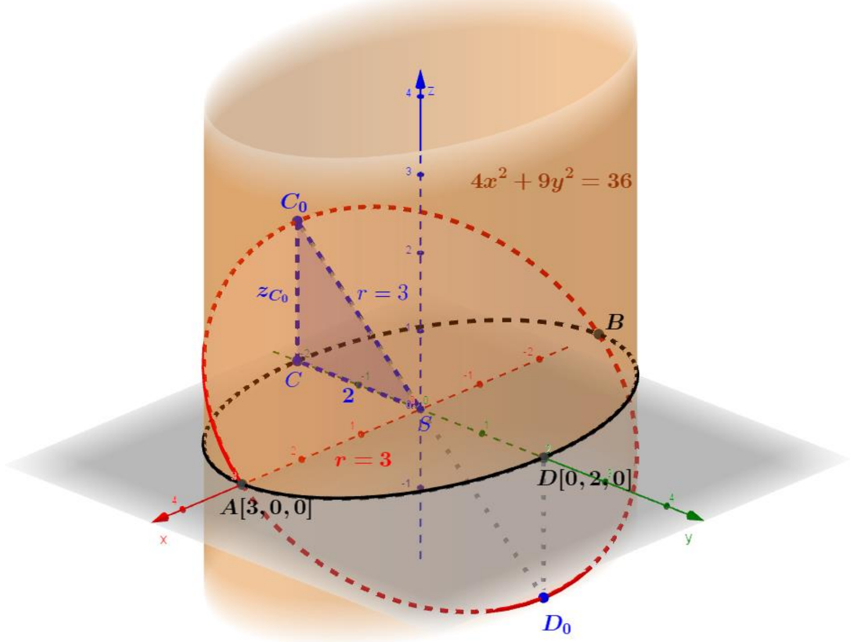
Rovina ρ prechádza osou o_x a pretína eliptickú valcovú plochu $4x^2+9y^2=36$ v kružnici. Určte rovnicu roviny ρ.

Riešenie. Rovina ρ prechádza osou o_x, preto jej rovnica bude v tvare $0x+by+cz=0$, kde $\vec{n}=(0,b,c), b \neq 0, c \neq 0$ je jej normálový vektor.
Samotná os o_x pretne valcovú plochu v bodoch $A[3,0,0], B[-3,0,0]$ a úsečka AB je nielen hlavnou osou riadiacej elipsy , ale aj priemerom hľadanej kružnice.

Vedľajšia os riadiacej elipsy leží v rovine $x=0$ a je kolmým priemetom združeného priemeru hľadanej kružnice. Vedľajší vrchol $C[0,-2,0]$ je kolmým priemetom bodu $C_0\left[0,-2,z_{C_0}\right]$ ležiaceho v rovine ρ.
Z pravouhlého trojuholníka SCC_0 pomocou Pytagorovej vety vypočítame $z_{C_0}=\pm\sqrt{5}$. Dosadíme súradnice bodu $C_0\left[0,-2,\pm\sqrt{5}\right]$ do rovnice $0x+by+cz=0$ a odvodíme

$$\rho_1: \quad y+\frac{\sqrt{5}}{2}z=0$$

$$\rho_2: \quad y-\frac{\sqrt{5}}{2}z=0.$$



Obr. 23

Vo vyššie uvedených ukážkach bola priamka q bola kolmá na rovinu α. Nie je to však nutné.

Ak priamka q nie je kolmá na rovinu α , v ktorej leží riadiaca kužeľosečka k, odvodíme rovnicu valcovej plochy nasledovne:

a) ***Zvolíme na kužeľosečke k ľubovoľný bod X_0.***
b) ***Smerový vektor $\vec{u}$ priamky q bude aj smerovým vektorom priamky m. Priamka m prechádza bodom X_0.***
c) ***Z parametrického vyjadrenia priamky m vylúčime parameter t.***
d) ***Z rovníc priamky vyjadríme súradnice bodu X_0 a dosadíme ich do rovnice riadiacej kužeľosečky. Po úprave získame rovnicu valcovej plochy.***

Ukážeme na konkrétnom príklade.

Príklad

Určte rovnicu parabolickej valcovej plochy s riadiacou krivkou

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 12y + 26 = 0$$

ležiacou v rovine $z = 0$ tak, aby smerový vektor priamok plochy bol $\vec{u} = (1,1,2)$.

Riešenie. Ak bod $X_0[x_0, y_0, 0]$ je bodom riadiacej krivky (paraboly), potom pre jeho súradnice platí:

$$x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2 - 8x_0 - 12y_0 + 26 = 0.$$

Priamka m, prechádzajúca bodom X_0, má symbolickú rovnicu

$$X = X_0 + t.\vec{u}, t \in R.$$

Odtiaľ vyplýva:

$$x = x_0 + 1.t$$
$$y = y_0 + 1.t$$

$$z = 0 + 2.t \;\Rightarrow t = \frac{z}{2}.$$

Dosadíme za t do rovníc pre x, y a po úprave odvodíme

$$x_0 = x - \frac{z}{2}$$

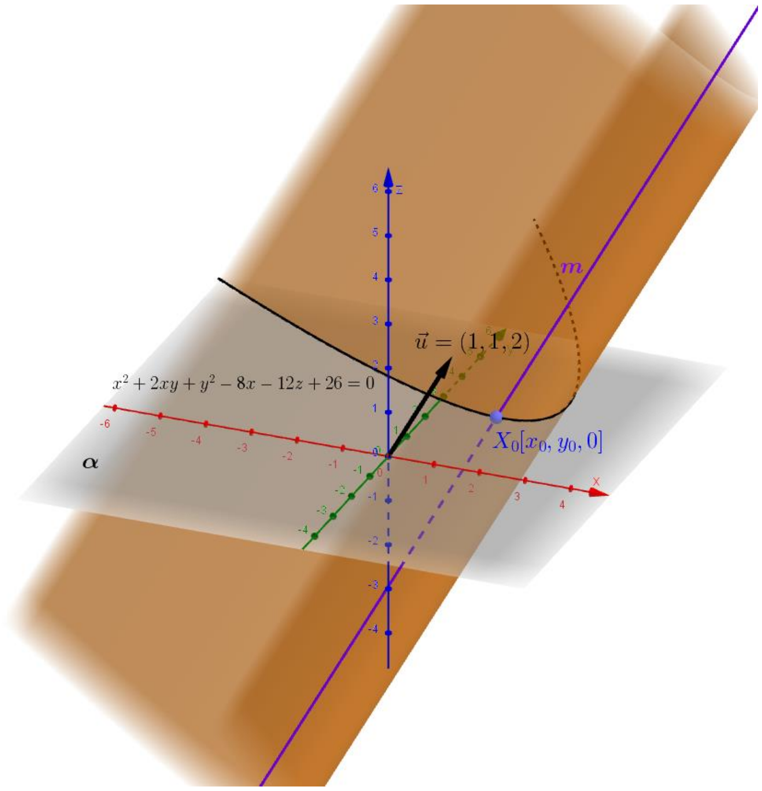
$$y_0 = y - \frac{z}{2}.$$

Následne

$$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{z}{2}\right)\left(y - \frac{z}{2}\right) + \left(y - \frac{z}{2}\right)^2 - 8\left(x - \frac{z}{2}\right) - 12\left(y - \frac{z}{2}\right) + 26 = 0.$$

$$\vdots$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy - xz - yz) - 8x - 12y + 10z + 26 = 0.$$



Obr. 24

Pri valcových plochách môžeme limitnými úvahami získať aj pozoruhodné výsledky.

Uvažujme napr. rovnicu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2,$$

ktorá vyjadruje eliptický valec s polosami ka, kb pre $k \in R - \{0\}$.

Ak limitne $m \to 0$, potom aj $ma \to 0$ a súčasne $mb \to 0$. Dostaneme rovnicu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Geometricky to znamená, že valec „limitne prechádza do priamky“ (osi o_z)[25].

Analogicky, ak uvažujeme rovnicu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m^2,$$

pre $m \neq 0$ vyjadrujúcu hyperbolický valec, potom limitným prechodom $m \to 0$ sa valec deformuje na dve roviny (prechádzajúce asymptotami určujúcej hyperboly a rovnobežnými s osou o_z).

Ich rovnice odvodíme nasledovne:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Poznámka.
Ak máme rovnicu $z^2 - m^2 = 0$ pre $m \in R - \{0\}$, vyjadruje táto rovnica dve navzájom rôzne, ale rovnobežné, roviny s rovnicami $z = m$, a $z = -m$.
Ak ide o rovnicu $z^2 + m^2 = 0$, potom geometricky vyjadruje imaginárne roviny s rovnicami $z = \pm i.m$.
Ak je $m = 0$, ide o dve totožné roviny určené rovnicou $z = 0$.

Cvičenie

1. Odvoďte rovnicu valcovej plochy s určujúcou kružnicou $x^2 + y^2 = 1$ ležiacou v rovine $z = 0$, ktorej os má smerový vektor $\vec{s} = (1, -1, 2)$.
2. Odvoďte rovnicu rotačnej valcovej plochy, ktorá prechádza bodom $M[2, -1, 1]$ a jej os je priamka určená rovnicou $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{1} = t, t \in R$.
3. Napíšte rovnicu valcovej plochy s určujúcou krivkou $x^2 = 2z$ ležiacou v rovine $y = 0$, ktorej smerový vektor bude $\vec{s} = (1,1,1)$.
4. Odvoďte rovnicu valcovej plochy, ktorá je opísaná guľovým plochám s rovnicami $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ a $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$.
5. Určte rovnicu roviny, ktorá valcovú plochu s rovnicou $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ pretína v kružnici.
6. Do rotačnej valcovej plochy s rovnicou $x^2 + y^2 = 25$ vpíšte guľovú plochu tak, aby sa dotkla roviny $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} + \frac{z}{5} = 1$.

[25] V prípade, že pracujeme nad poľom komplexných čísel, odvodíme $\left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right).\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0$. Ide o rovnice dvoch imaginárnych rovín s rovnicami $\frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0$ a $\frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0$, ktoré sa pretínajú v reálnej priamke – osi o_z.

Kužeľová plocha

Kužeľové plochy sú ďalším príkladom kvadratických plôch. Zavedieme ich definíciou a odvodíme rovnice.

Definícia

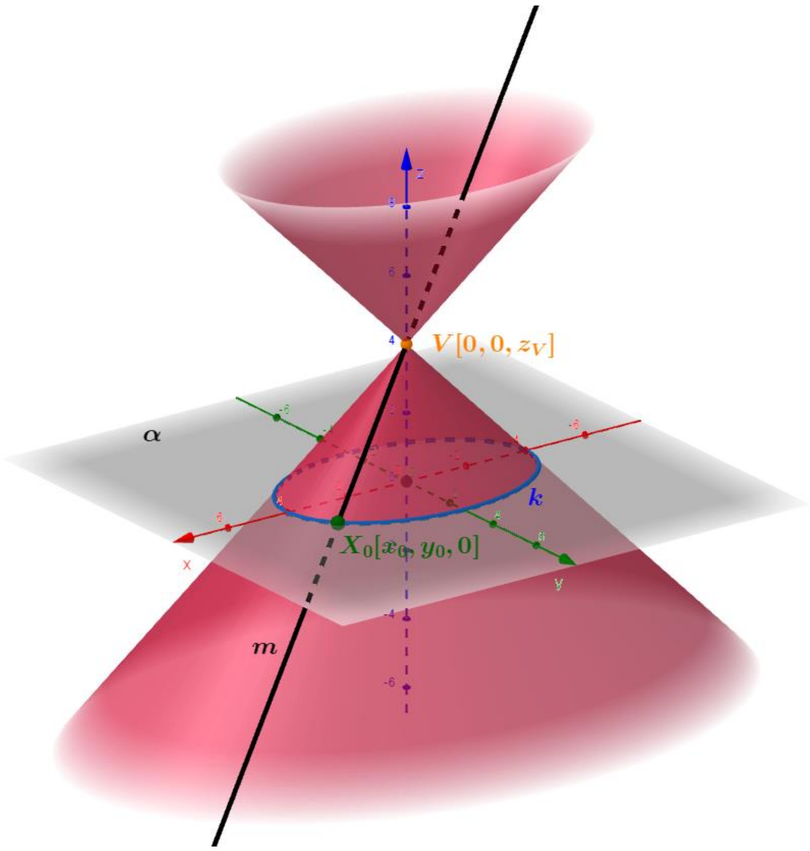
Nech je daná kužeľosečka k ležiaca v rovine α a bod V, ktorá nepatrí rovine α. Ďalej nech bod X_0 je ľubovoľným bodom kužeľosečky k, ktorým zostrojíme priamku m prechádzajúcu bodom V. Množina všetkých priamok m uvedenej vlastnosti vypĺňa plochu, ktorú nazývame ***kužeľovou plochou (druhého stupňa)***[26]**.**

Kužeľosečku k nazývame **riadiacou kužeľosečkou** kužeľovej **plochy** 2.stupňa**,** **bod V** sa nazýva **vrchol kužeľovej plochy** 2. stupňa, priamky m sú priamky kužeľovej plochy 2.stupňa**.**

V ďalšom texte budeme o kužeľovej ploche hovoriť bez dodatku „2. stupňa“ [27].

Samotná kužeľosečka k môže byť regulárna krivka (elipsa; kružnica; parabola; hyperbola) alebo aj singulárna (2 rôznobežky; 2 rovnobežky; priamka; bod). Podľa typu regulárnej kužeľosečky rozlišujeme **eliptickú, kruhovú** (**rotačnú**), **parabolickú** alebo **hyperbolickú** kužeľovú plochu.

Ukážka je na nasledujúcom obrázku. V rovine $z = 0$ leží elipsa, na ktorej leží bod $X_0[x_0, y_0, 0]$. Vrchol kužeľovej plochy je bod $V[0,0,z_V]$. Ak bod X_0 „prebieha“ elipsu, potom množina priamok m vypĺňa eliptickú kužeľovú plochu.



Obr. 25

[26] Slovensko – anglicky: kužeľová plocha – **cone surface;** kužeľ **- cone.**

[27] Dodatok 2. stupňa je dôležitý, ak by sme zovšeobecňovali pojem kužeľovej plochy, kde riadiaca krivka k nemusí byť kužeľosečkou. Napr., mohli by sme uvažovať o krivke ako o grafe funkcie $y = \sin x$ v rovine $z = 0$.

Ak v rovine α leží riadiaca kužeľosečka $F(x,y) = 0$ a vrchol kužeľovej plochy $V[v_1, v_2, v_3]$ rovine α nepatrí, potom rovnicu valcovej plochy odvodíme týmto postupom:

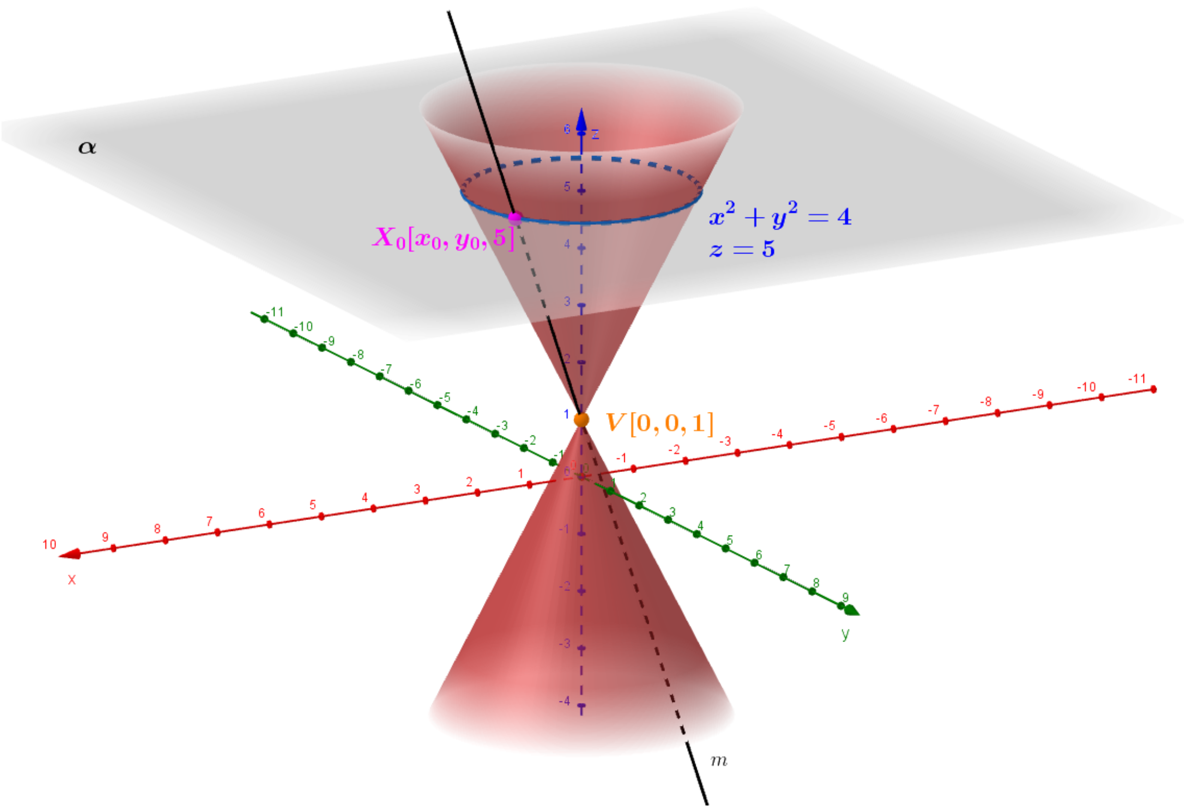
a) ***Zvolíme na kužeľosečke k ľubovoľný bod X_0.***
b) ***Vypočítame smerový vektor $\vec{u} = V - X_0$ priamky m.***
c) ***Z parametrického vyjadrenia priamky m vylúčime parameter t.***
d) ***Z rovníc priamky vyjadríme súradnice bodu X_0 a dosadíme ich do rovnice riadiacej kužeľosečky. Po úprave získame rovnicu valcovej plochy.***

Ukážeme na konkrétnom príklade.

Príklad

V rovine $z = 5$ leží kružnica $x^2 + y^2 = 4$. Napíšte rovnicu kužeľovej plochy, ktorej určujúca krivka je daná kružnica a vrchol je v bode $V[0,0,1]$.

Riešenie. Nech sa po kružnici pohybuje ľubovoľný bod $X_0[x_0, y_0, 5]$.



Obr. 26

Smerový vektor priamky je

$$\vec{u} = V - X_0 = [0,0,1] - [x_0, y_0, 5] = (-x_0, -y_0, -4)$$

a priamka m má symbolickú rovnicu $\quad X = V + t.\vec{u}, \quad t \in R$, teda:

$$x = 0 - t.x_0$$

$$y = 0 - t.y_0$$

$$z = 1 + t.(-4).$$

Z rovníc pre $z \neq 1$vyjadríme:

$$t = -\frac{z-1}{4}$$
$$y_0 = -\frac{y}{t} = \frac{4y}{z-1}$$
$$x_0 = -\frac{x}{t} = \frac{4x}{z-1}$$

Keďže bod X_0 leží na riadiacej kružnici, platí $x_0^2 + y_0^2 = 4.$

Po dosadení je výsledná rovnica kužeľovej plochy:

$$16x^2 + 16y^2 - 4(z-1)^2 = 0.$$

Príklad

V rovine $x = 0$ leží priamka p, ktorá s osou o_y zviera uhol $\alpha, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Napíšte rovnicu kužeľovej plochy, ktorá vznikne rotáciou priamky p okolo osi o_z.

Riešenie. Rozlíšime dva prípady.

a) Nech priamka p prechádza bodom $A[0, r, 0]$, kde $r \neq 0$. Pri rotácii priamky p okolo osi o_z prechádza priamka p bodom $V[0,0,v]$, kde $v = r.\tan\alpha$. Bod V je vrcholom rotačnej kužeľovej plochy. Určujúcou krivkou je kružnica so stredom $S[0,0,0]$ ležiaca v rovine $z = 0$ a prechádzajúca bodom A. Kružnica má rovnicu $x^2 + y^2 = r^2$ (samozrejme v rovine $z = 0$). Ak bod $X_0[x_0, y_0, 0]$ je bodom určujúcej kružnice, povrchová priamka X_0V plochy má parametrickú rovnicu

$$X = V + t.\overrightarrow{X_0V}$$
$$x = -t.x_0$$
$$y = -t.y_0$$
$$z = r.\tan\alpha + t.r.\tan\alpha, \qquad t \in R.$$

Z rovníc vyplýva, že $x_0 = -\frac{x}{t}, \quad y_0 = -\frac{y}{t}, \quad t = \frac{z - r.\tan\alpha}{r.\tan\alpha}$ pre $t \neq 0, r \neq 0$.

Keďže bod X_0 leží na kružnici, vyhovujú jeho súradnice jej rovnici a odvodíme:

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{x^2 + y^2}{t^2} = \cdots = r^2 \tan^2\alpha \frac{x^2 + y^2}{(z - r.\tan\alpha)^2}.$$

Rovnica kužeľovej plochy je v tvare

$$\tan^2\alpha\,(x^2 + y^2) - (z - r.\tan\alpha)^2 = 0.$$

b) Ak priamka p prechádza bodom $O[0,0,0]$, potom je bod O aj vrcholom kužeľovej plochy. Určujúcu kružnicu určíme v niektorej rovine, ktorá bude rovnobežná so súradnicovou rovinou $z = 0$. Nech je to rovina s rovnicou $z = m, m \neq 0$.

Rovnicu priamky p určíme pomocou dvoch rovníc[28]:

$$x = 0 \ \wedge z = \tan\alpha . y$$

V rovine $x = 0$ pretne priamka p rovinu $z = m$ v bode $C\left[0, \frac{m}{\tan\alpha}, m\right]$. Bod C je bodom určujúcej kružnice s rovnicou:

[28] Geometricky - ide o rovnice dvoch rovín, ktorých priesečnica je priamka p.

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{m}{\tan\alpha}\right)^2,$$

ktorá leží v rovine $z = m$.

Analogickým postupom ako v predchádzajúcom príklade odvodíme rovnicu kužeľovej plochy v tvare[29]:

$$x^2 + y^2 - \tan^2\alpha . z^2 = 0.$$

Asymptotická kužeľová plocha

Uvažujme jednodielny hyperboloid, ktorý je daný rovnicou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

V rovine $z = m, m \in R$ je rezom tejto plochy elipsa určená rovnicou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{m^2}{c^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{(c^2 + m^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{(c^2 + m^2)}{c^2}} = 1.$$

Ak elipsa bude určujúcou krivkou kužeľovej plochy s vrcholom $V[0,0,0]$, potom jej rovnicu odvodíme obdobne ako v riešení predchádzajúceho príkladu.

Smerovým vektorom povrchovej priamky plochy je $\vec{u} = V - X_0 = (-x_0, -y_0, -m)$, kde $X_0[x_0, y_0, m]$ je ľubovoľný bod uvažovanej určujúcej elipsy. Z parametrickej rovnice priamky VX_0 získame:

$$t = -\frac{z}{m}, \quad m \neq 0$$

$$x_0 = -\frac{x}{t} = \frac{xm}{z}$$

$$y_0 = -\frac{y}{t} = \frac{ym}{z}$$

a platí:

$$\frac{x_0^2}{a^2 \cdot \frac{(c^2 + m^2)}{c^2}} + \frac{y_0^2}{b^2 \cdot \frac{(c^2 + m^2)}{c^2}} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{c^2 + m^2}{c^2}$$

$$\frac{\frac{x^2 m^2}{z^2}}{a^2} + \frac{\frac{y^2 m^2}{z^2}}{b^2} = \frac{c^2 + m^2}{c^2}$$

[29] Výsledok je v zhode s riešením a) , ak položíme $r = 0$. Všimnime si, že na hodnote $m \in R$ riešenie nezávisí. Navyše, v limitných prípadoch hodnôt r a α, ktoré sme v zadaní vylúčili, je riešením pre $r \to 0$ a súčasne $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ množina bodov osi o_z. V situácii, keď $r \neq 0$ a súčasne $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ je limitným prípadom rotačná valcová plocha.

$$\vdots$$

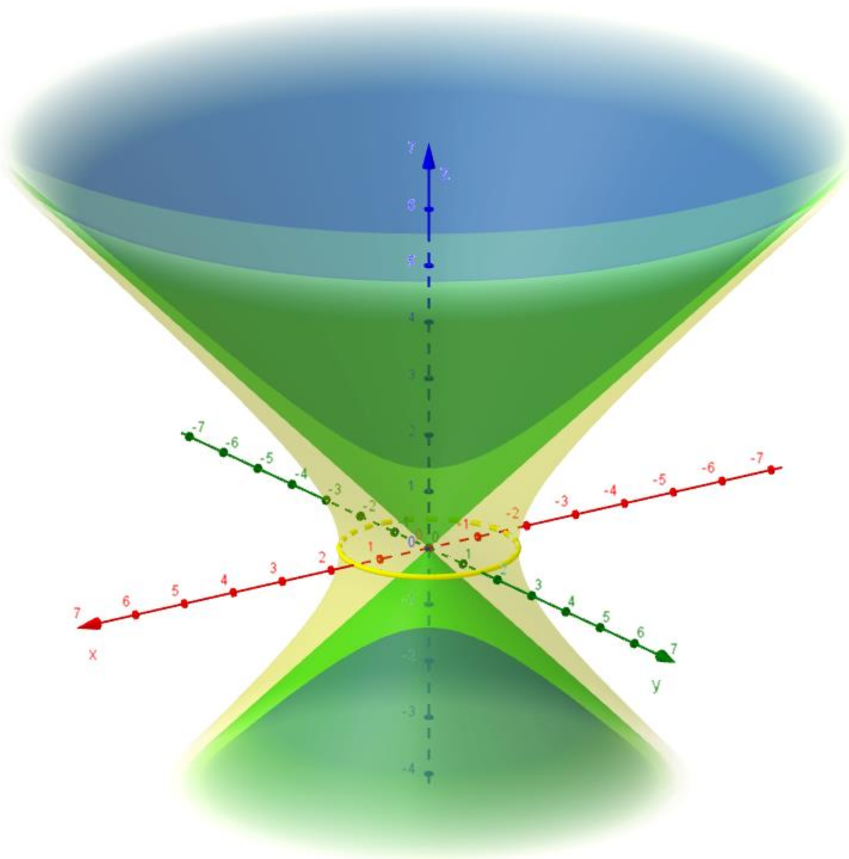
$$\frac{x^2}{a^2 z^2} + \frac{y^2}{b^2 z^2} = \frac{c^2 + m^2}{c^2 m^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 \cdot \frac{c^2 + m^2}{c^2 m^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 \cdot \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0. \tag{21}$$

Ak sa uvažujeme, že limitne $m \to \infty$, potom $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{1}{m^2} = 0$ a dostávame rovnicu kužeľovej plochy v tvare:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}.$$



Obr. 27

Ak by sme zopakovali úvahy pre dvojdielny hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

potom by sme odvodili rovnicu kužeľovej plochy v rovnakom tvare:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Definícia

***Asymptotickou kužeľovou plochou** hyperboloidov určených rovnicami*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

nazývame kužeľovú plochu s rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{22}$$

Asymptotická kužeľová plocha je teda „spoločnou" plochou pre oba typy hyperboloidov. Z geometrického hľadiska, dvojdielny hyperboloid leží vo vnútri asymptotickej kužeľovej plochy, jednodielny leží zvonku uvažovanej plochy.

Cvičenie

1. Odvoďte rovnicu kužeľovej plochy s riadiacou kružnicou $x^2+y^2=1$ ležiaciu v rovine $z=0$ tak, aby jej vrchol bol bod $V[0,0,5]$.
2. V rovine $z=m$, $m>0, m\in R$ leží parabola $y^2=2px$, kde $p<0, p\in R$. Určte rovnicu kužeľovej plochy s vrcholom $O[0,0,0]$ tak, aby riadiacou krivkou bola daná parabola.
3. Napíšte rovnicu kužeľovej plochy, ktorá sa má vrchol v bode $V[0,5,0]$ a dotýka guľovej plochy s rovnicou $x^2+y^2+z^2=16$.
4. Kužeľová plocha je opísaná guľovým plochám s rovnicami $x^2+y^2+(z-10)^2=1$ a $x^2+y^2+z^2=36$. Aká je rovnica kužeľovej plochy? [Návod: Využite rovnoľahlosť 2 kružníc. Úloha má dve riešenia.]
5. Odvoďte rovnicu kužeľovej plochy s vrcholom $V[0,0,c]$, ktorého určujúca krivka je elipsa s rovnicou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ležiaca v rovine $z=0$.
6. Aplikujte metódu rezov na kvadratickú plochu s rovnicou $xy=z^2$ a ukážte, že ide o kužeľovú plochu.
7. Určte rovnice hyperboloidov, ktorých asymptotickou kužeľovou plochou bude plocha z riešenia cvičenia č. 3.

Vzájomná poloha priamky a kvadratickej plochy

Ak skúmame vzájomnú polohu priamky a plochy, potom hľadáme spoločné reálne body[30].

Nech priamka p má symbolickú parametrickú rovnicu:

$$X = M + t.\vec{u}\,, \quad \text{kde } M[m_1, m_2, m_3], \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \vec{0}, t \in R.$$

Dosadíme do rovnice (1) danej plochy a odvodíme:

$$\begin{gathered} A(m_1 + t.u_1)^2 + B(m_2 + t.u_2)^2 + C(m_3 + t.u_3)^2 + \\ +D(m_1 + t.u_1).(m_2 + t.u_2) + E(m_1 + t.u_1).(m_3 + t.u_3) + F(m_2 + t.u_2)(m_3 + t.u_3) + \\ +G(m_1 + t.u_1) + H(m_2 + t.u_2) + I(m_3 + t.u_3) + K = 0. \\ \vdots \\ a.t^2 + b.t + c = 0, \end{gathered} \tag{23}$$

kde a, b, c sú odpovedajúce koeficienty po príslušných algebrických úpravách[31].
V riešení môžu nastať prípady:

a) dve reálne riešenia $t_1 \neq t_2$. Prienikom plochy a priamky p sú dva reálne body odpovedajúce parametrom t_1, t_2.
b) Rovnica má dvojnásobný reálny koreň $t_1 = t_2$. Plocha má s priamkou p spoločný jeden bod, ktorý nemusí byť dotykovým bodom.[32]
c) Pre záporný diskriminant kvadratickej rovnice sú korene t_1, t_2 sú imaginárne. Plocha nemá s priamkou p reálne priesečníky.
d) Môže však nastať situácia, že $a = b = c = 0$. V tomto prípade priamka p leží na danej ploche.

Príklad

Zistite vzájomnú polohu priamky a guľovej plochy, ak sú dané rovnicami:

$$\frac{x+5}{7} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-8}{-3} = t, t \in R \quad a \quad x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y - 4z + 16 = 0.$$

Riešenie. Z kanonického tvaru rovnice priamky vyjadríme parameter t a dostaneme:

$$x = 7t - 5, \quad y = 4t - 3, \qquad z = -3t + 8.$$

Dosadíme do rovnice guľovej plochy:

$$(7t - 5)^2 + (4t - 3)^2 + (3t + 8)^2 - 12(7t - 5) - 2(4t - 3) - 4(3t + 8) + 16 = 0$$
$$\vdots$$
$$74t^2 - 222t + 148 = 0$$
$$\vdots$$

[30] Reálnym bodom nazývame taký bod, ktorého súradnice sú reálne čísla. Ak aspoň jedna súradnica je komplexné číslo, hovoríme o imaginárnom bode.
[31] Kvôli názornosti ich exaktné vyjadrenia neuvádzame.

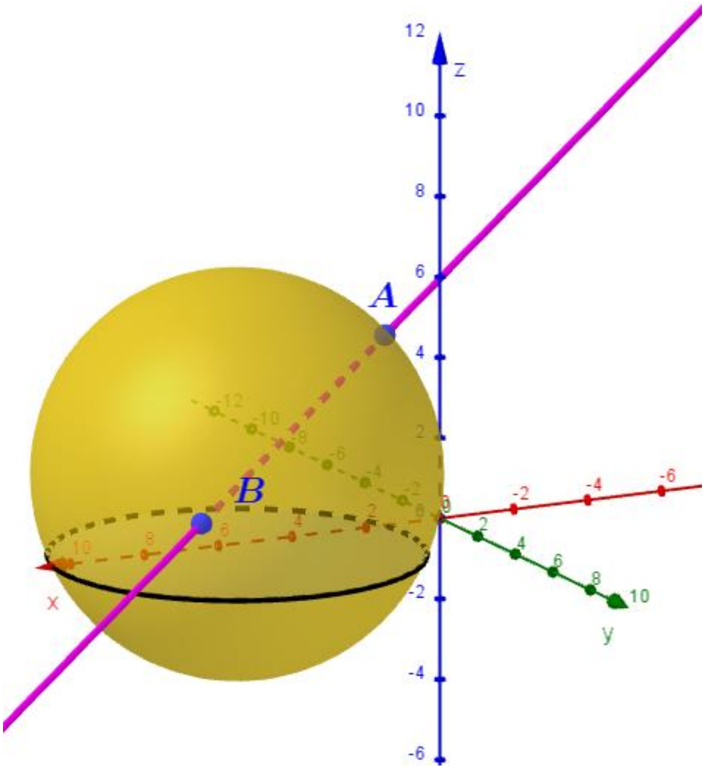
[32] Priamka nemusí byť dotyčnicou, napr. môže ísť o prípad priamky, ktorá prechádzajúca len vrcholom kužeľovej plochy, ...

$$t_1 = 1 \quad a \quad t_2 = 2$$

Priamka má s guľovou plochou dva priesečníky:

a) pre $t_1 = 1$ je to bod $A[x_A, y_A, z_A] = A[7.1 - 5,\ \ 4.1 - 3,\ \ -3.1 + 8] = A[2,1,5]$.

b) Ak $t_2 = 2$, potom priesečník je bod $B[x_B, y_B, z_B] = \cdots = B[9,5,2]$.

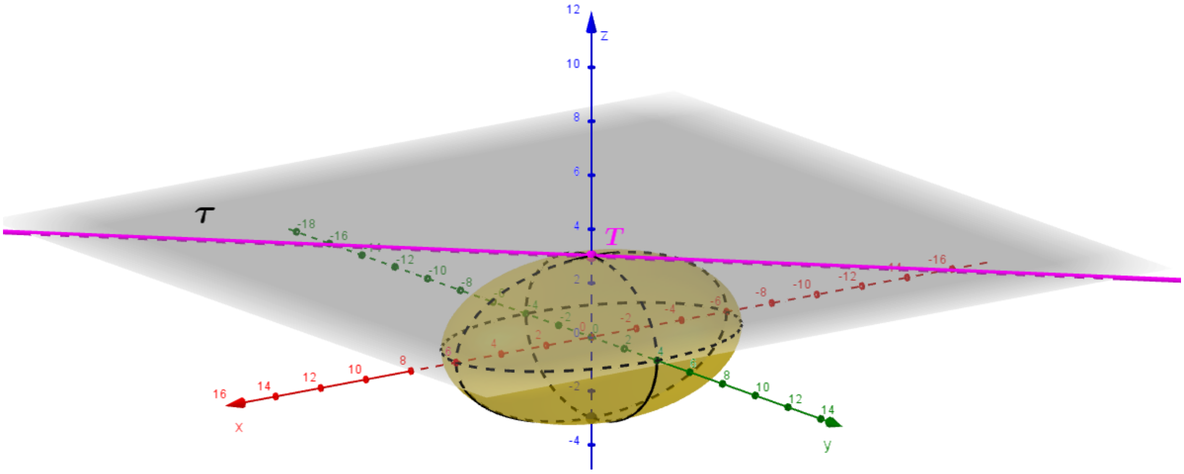


Obr. 28

Príklad

Zistite vzájomnú polohu priamky a elipsoidu, ak sú útvary dané rovnicami:

$$x = 6 + t, y = -6 - t, z = 3 \quad a \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1.$$



Obr. 29

Riešenie. Dosadíme parametrické rovnice priamky do rovnice elipsoidu a počítame:

$$\frac{(6+t)^2}{36}+\frac{(-6-t)^2}{16}+\frac{3^2}{9}=1$$

$$\vdots$$

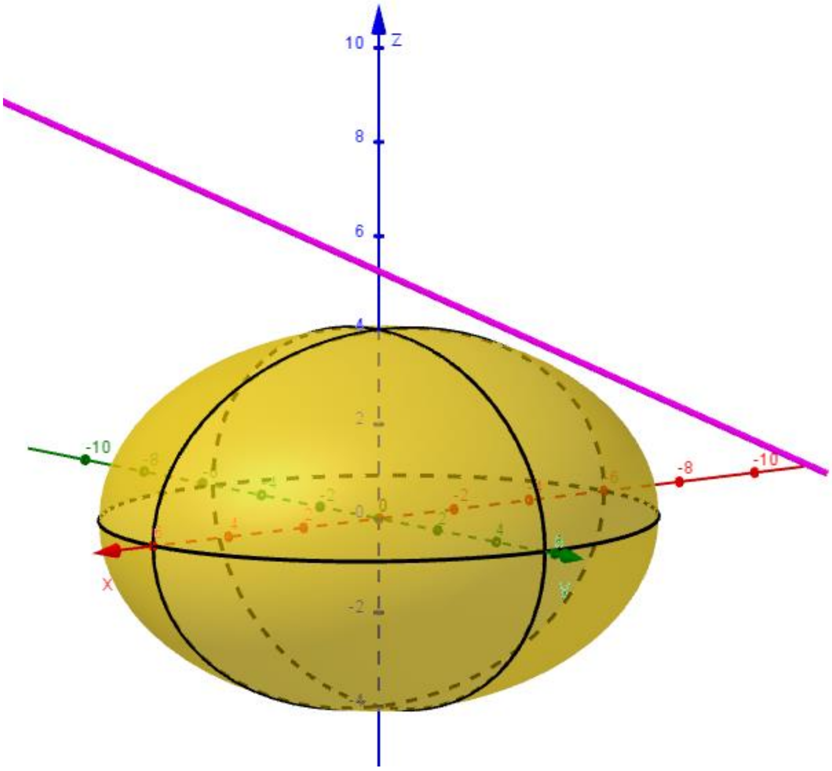
$$\frac{t^2}{38}+\frac{t}{3}+1=0$$

Riešením kvadratickej rovnice je dvojnásobný koreň $t_{1,2}=-6$. Priamka sa dotýka plochy[33] v bode $T[x_T,y_T,z_T]=T[6-6,-6+6,3]=T[0,0,3]$.

Príklad

Zistite vzájomnú polohu priamky a elipsoidu, ak sú útvary dané rovnicami

$$\frac{x}{3}=\frac{y-8}{-4}=\frac{z-4}{2}=t, t\in R \quad \text{a} \quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}+\frac{z^2}{16}=1.$$



Obr. 30

Riešenie. Z kanonického tvaru rovnice priamky vyjadríme parameter t a dostaneme:

$$x=3t, \qquad y=-4t+8, \qquad z=2t+4.$$

Dosadíme do rovnice elipsoidu:

$$\frac{(3t)^2}{36}+\frac{(-4t+8)^2}{32}+\frac{(2t+4)^2}{16}=1$$

[33] Priamka nie je jedinou dotyčnicou elipsoidu v danom bode T. Každá priamka ležiaca v dotykovej rovine τ elipsoidu v bode T je jeho dotyčnicou.

$$\vdots$$

$$t^2 - t + 2 = 0.$$

Diskriminant kvadratickej rovnice s neznámou t je záporný, rovnica nemá reálne riešenie. Priamka daný elipsoid v reálnych bodoch nepretína.

Môže však nastať ešte prípad, kedy priamka leží v danej ploche. Napr. hyperbolický paraboloid daný rovnicou

$$x^2 - y^2 = z$$

obsahuje priamku PQ s parametrickými rovnicami

$$x = t, \qquad y = t, \qquad z = 0, \qquad t \in R.$$

Dosadením rovníc priamky do rovnice parabolidu odvodíme: $0.\,t^2 = 0.$

Z toho vyplýva, že parameter priamky $t \in R$ možno zvoliť ľubovoľne a každý bod priamky PQ leží v danej kvadratickej ploche.

Detailne tieto prípady analyzujeme v ďalšej podkapitole.

Povrchové priamky jednodielneho hyperboloidu

Je zrejmé, že neexistuje priamka, ktorej každý bod by bol bodom guľovej plochy, resp. elipsoidu, eliptického paraboloidu alebo dvojdielneho hyperboloidu. Na druhej strane, triviálnymi prípadmi, kedy priamka leží v danej ploche, sú povrchové priamky valcovej plocha a kužeľovej plochy.

Na konkrétnych príkladoch sme ukázali, že v prípade hyperbolického paraboloidu a jednodielneho hyperboloidu existujú povrchové priamky. Odvodíme teda ich rovnice.

Uvažujme jednodielny hyperboloid daný rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a upravujme ju nasledovne:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right). \tag{24}$$

Z poslednej rovnosti vyplývajú dve možnosti:

a)

$$\begin{aligned} k.\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= l.\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ l.\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= k.\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

b)

$$\begin{aligned} m.\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= n.\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ n.\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= m.\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

pre všeobecné parametre $k, l, m, n \in R - \{0\}$, kde každá z rovníc predstavuje rovinu.

Prienikom odpovedajúcich si rovín je ich **priesečnica – priamka** ležiaca v danej ploche jednodielneho hyperboloidu.

Príklad

Napíšte rovnice povrchových priamok jednodielneho hyperboloidu určeného rovnicou

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1,$$

ktoré prechádzajú bodom $P[4,1,-3]$.

Riešenie. Z rovnice hyperboloidu vyplýva, že $a=4, b=2, c=6$.

1) **Uvažujme možnosť A).**

Ak povrchová priamka prechádza bodom P, vyhovujú jeho súradnice aj rovniciam príslušných rovín a platí:

$$k.\left(\frac{4}{4}+\frac{(-3)}{6}\right)=l.\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$l.\left(\frac{4}{4}-\frac{(-3)}{6}\right)=k.\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

Po úprave odvodíme $k=3l$. Ak položíme[34] $l=\frac{1}{3}$, potom $k=1$.

Dosadíme do rovníc A) a dostaneme sústavu dvoch rovníc s tromi neznámymi:

$$1.\left(\frac{x}{4}+\frac{z}{6}\right)=\frac{1}{3}.\left(1+\frac{y}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3}.\left(\frac{x}{4}-\frac{z}{6}\right)=1.\left(1-\frac{y}{2}\right)$$

$$\frac{x}{4}-\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{12}+\frac{y}{2}-\frac{z}{18}=1$$

Riešením sústavy je parametrické vyjadrenie priamky p v tvare:

$$x=\frac{12}{5}-\frac{8}{15}t$$

$$y=\frac{8}{5}+\frac{1}{5}t$$

$$z=0+t,\quad t\in R.$$

2) **Vyriešime ešte možnosť B).**

Obdobným riešením sústavy

$$m.\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=n.\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$n.\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=m.\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

[34] Ide o parametrické riešenie, hodnotu $l\in R-\{0\}$ možno zvoliť ľubovoľne.

vzhľadom k neznámym m, n po dosadení súradníc bodu P za premenné x, y, z získame

$$m = n.$$

Položíme $m = n = 1$ a získame sústavu dvoch rovníc s tromi neznámymi x, y, z tvare:

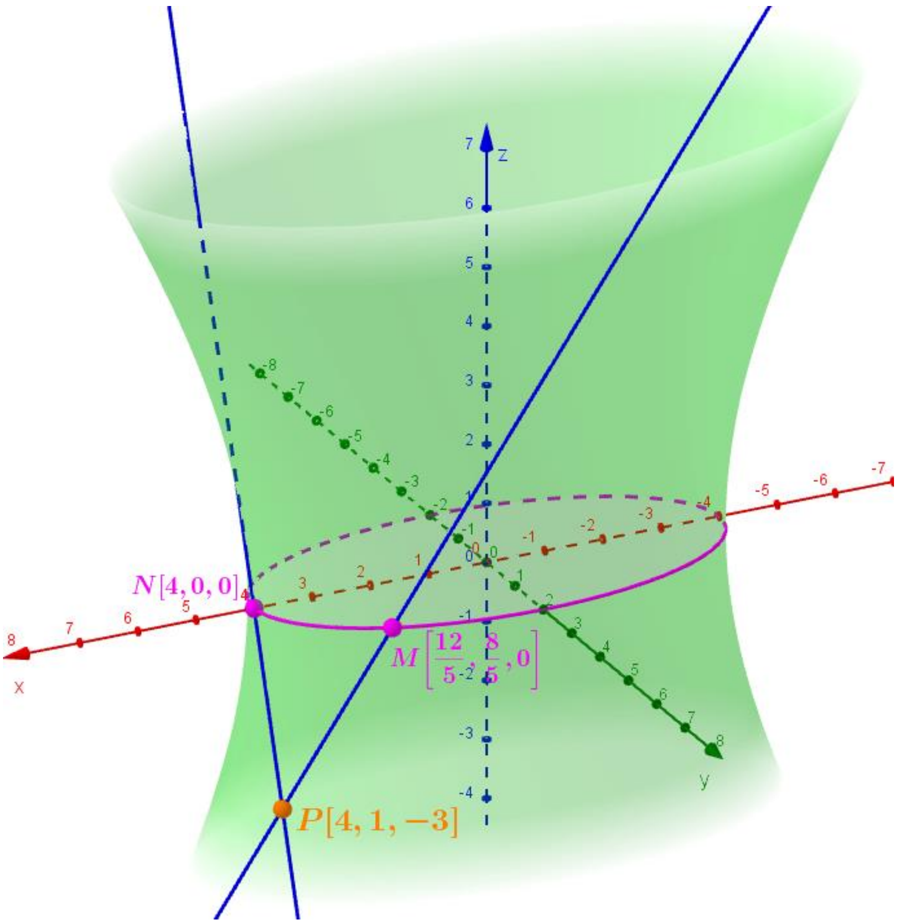
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$
$$\frac{x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{z}{6} = 1.$$

Parametrickým riešením sústavy je rovnica priamky:

$$x = 4$$

$$y = -\frac{1}{3}t$$

$$z = t, \quad t \in R.$$



Obr. 31

Uvažujme o ľubovoľnom, ale pevne zvolenom bode $X_0[x_0, y_0, 0]$ určujúcej krivky (elipsy) jednodielneho hyperboloidu v základnej polohe, ktorý je daný rovnicou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Vypočítame súradnice smerového vektora $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ jeho povrchovej priamky prechádzajúcej bodom X_0.

Rovnica povrchovej priamky má parametrické vyjadrenie:

$$x = x_0 + u_1.t$$

$$y = y_0 + u_2.t$$

$$z = u_3.t, \quad t \in R.$$

Dosadíme rovnice priamky do rovnice hyperboloidu a odvodíme:

$$\frac{(x_0 + u_1.t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + u_2.t)^2}{b^2} - \frac{(u_3.t)^2}{c^2} = 1$$

$$\vdots$$

$$t^2.\left(\left(\frac{u_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{b}\right)^2 - \left(\frac{u_3}{c}\right)^2\right) + t.\left(\frac{2x_0u_1}{a^2} + \frac{2y_0u_2}{b^2}\right) + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0 \qquad (27)$$

Bod $X_0[x_0, y_0, 0]$ patrí určujúcej krivke (ploche), preto platí $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ a dostaneme:

$$t^2.\left(\left(\frac{u_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{b}\right)^2 - \left(\frac{u_3}{c}\right)^2\right) + t.\left(\frac{2x_0u_1}{a^2} + \frac{2y_0u_2}{b^2}\right) = 0$$

Vzhľadok k tomu, že každý bod povrchovej priamky leží na ploche, musí byť rovnica splnená pre **ľubovoľné** $t \in R$.

To nastane, ak sa koeficienty pri kvadratickom a súčasne aj lineárnom člene rovnajú 0, t.j.

$$\left(\frac{u_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{b}\right)^2 - \left(\frac{u_3}{c}\right)^2 = 0$$

$$\frac{2x_0u_1}{a^2} + \frac{2y_0u_2}{b^2} = 0$$

Získali sme sústavu dvoch rovníc s tromi neznámymi u_1, u_2, u_3, ktorá má parametrické riešenie. Ak položíme $u_3 = c$, potom

$$\left(\frac{u_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{b}\right)^2 = 1$$

$$\frac{2x_0u_1}{a^2} + \frac{2y_0u_2}{b^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$u_1 = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}.u_2, \qquad (28)$$

pre $x_0 \neq 0$

Dosadíme a vypočítame:

$$\left(\frac{-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}.u_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{b}\right)^2 = 1$$

$$\vdots$$

$$u_2 = \pm\frac{b}{a}x_0, \qquad (29)$$

pretože $\sqrt{b^2x_0^2 + a^2y_0^2} = ab$.
Následne ešte vypočítame:

$$u_1 = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}.u_2 = \cdots = \mp\frac{a}{b}y_0. \tag{30}$$

Z výsledku vyplýva, že bodom $X_0[x_0, y_0, 0]$ prechádzajú dve povrchové priamky.

Definícia

Nech $X_0[x_0, y_0, 0]$ je bodom jednodielneho hyperboloidu. Hovoríme, že povrchové priamky jednodielneho hyperboloidu určeného rovnicou

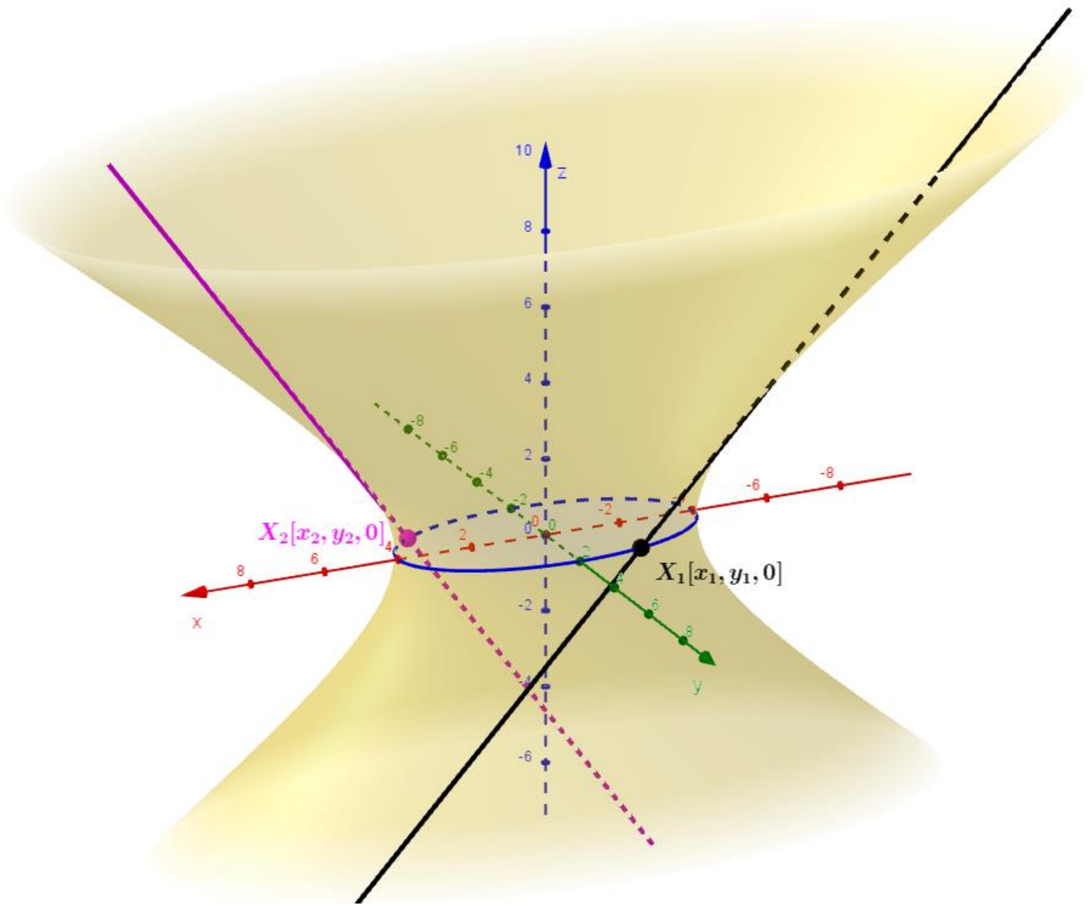
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ktorých smerový vektor je:

$$\vec{u} = \left(-\frac{a}{b}y_0, \frac{b}{a}x_0, c\right) \tag{31}$$

*sú **priamkami prvej osnovy** (prislúchajúce bodu X_0). **Priamkami druhej osnovy** (prislúchajúce bodu X_0)nazveme povrchové priamky, ktorých smerový vektor je*

$$\vec{v} = \left(\frac{a}{b}y_0, -\frac{b}{a}x_0, c\right). \tag{32}$$



Obr. 32

Ak sa bod X_0 „pohybuje" v rovine $z = 0$ po určújúcej elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, vyplnia povrchové priamky 1., resp. 2., osnovy celú plochu jednodielneho hyperboloidu.

Ak uvažujeme dva navzájom rôzne body $X_1[x_1, y_1, 0], X_2[x_2, y_2, 0]$, t.j. $[x_1, y_1] \neq [x_2, y_2]$, určujúcej elipsy, potom im navzájom si odpovedajúce vektory $\overrightarrow{X_2X_1}$ a

$$\overrightarrow{u_1} = \left(-\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1, c\right), \overrightarrow{u_2} = \left(-\frac{a}{b}y_2, \frac{b}{a}x_2, c\right), \text{ resp. } \overrightarrow{v_1} = \left(\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1, c\right), \overrightarrow{v_2} = \left(\frac{a}{b}y_2, -\frac{b}{a}x_2, c\right)$$

sú lineárne nezávislé. Z toho vyplýva, že odpovedajúce povrchové priamky sú **mimobežné**.

Obdobnými úvahami možno ešte ukázať, že **ľubovoľným bodom** (nielen bodom určujúcej elipsy) jednodielneho hyperboloidu možno viesť **práve dve** povrchové priamky. Odvodenie naznačíme pre hyperbolický paraboloid v ďalšej podkapitole.

Povrchové priamky hyperbolického paraboloidu

Nech je daný hyperbolický paraboloid rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

na ktorom je pevne zvolený ľubovoľný bod $X_0[x_0, y_0, z_0]$ taký, že $[x_0, y_0, z_0] \neq [0,0,0]$.[35]

Keďže bod X_0 je bodom uvažovanej plochy, pre jeho súradnice platí: $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = z_0$.

Odvodíme vzťahy pre súradnice smerového vektora $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ tak, aby priamka

$$X = X_0 + t.\vec{u}, \qquad t \in R$$

$$x = x_0 + t.u_1$$

$$y = y_0 + t.u_2$$

$$z = z_0 + t.u_3$$

bola povrchovou priamkou hyperbolického paraboloidu.

Počítame

$$\frac{(x_0 + t.u_1)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + t.u_2)^2}{b^2} = z_0 + t.u_3$$

$$\vdots$$

$$t^2\left(\frac{u_1^2}{a^2} - \frac{u_2^2}{b^2}\right) + t\left(\frac{2x_0u_1}{a^2} - \frac{2y_0u_2}{b^2} - u_3\right) + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - z_0 = 0. \tag{33}$$

Bod X_0 patrí ploche, preto $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - z_0 = 0$.

Ak má byť priamka povrchovou priamkou, kvadratická rovnica sa musí rovnať 0 pre každú hodnotu premennej $t \in R$. Z toho vyplýva:

[35] Prípad, kde $X_0[0,0,0]$ sme analyzovali v kapitole o hyperbolickom paraboloide. Riešením sú priamky $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ ležiace v rovine $z = 0$.

$$\frac{u_1^2}{a^2} - \frac{u_2^2}{b^2} = 0$$

a súčasne

$$\frac{2x_0u_1}{a^2} - \frac{2y_0u_2}{b^2} - u_3 = 0.$$

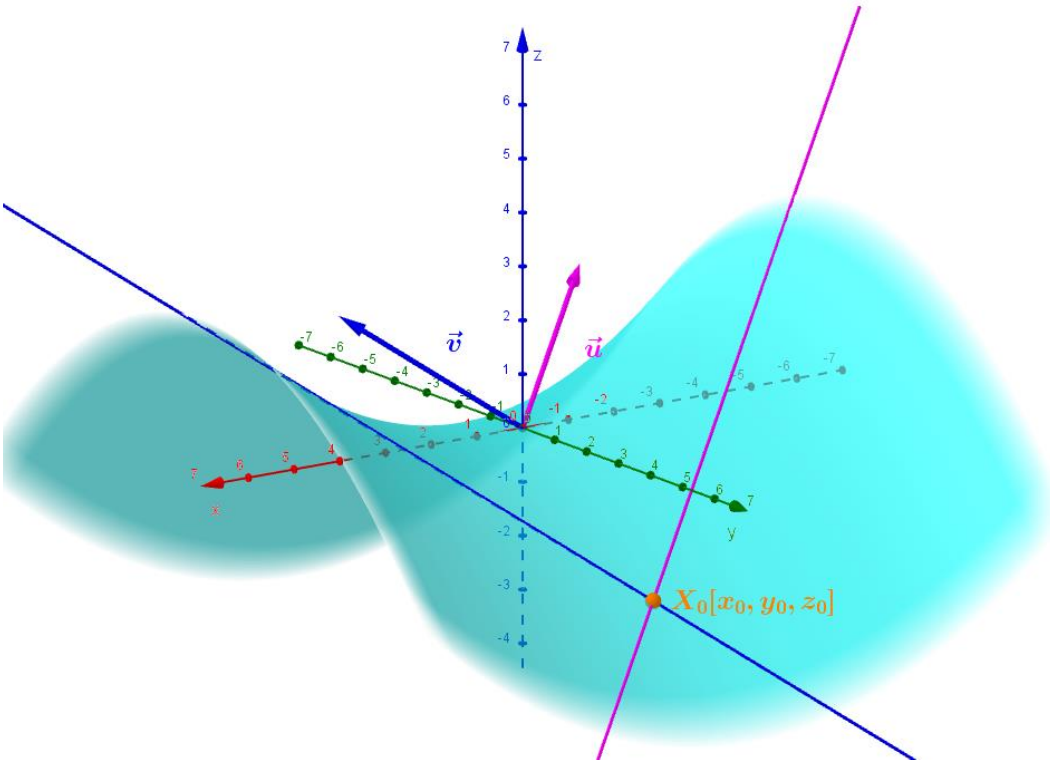
Sústava dvoch rovníc s tromi neznámymi u_1, u_2, u_3 má parametrické riešenie.

Položíme $u_3 = 2c$, kde $c \in R - \{0\}$ a odvodzujeme[36]:

$$\frac{u_1^2}{a^2} - \frac{u_2^2}{b^2} = 0 \ \Rightarrow \frac{u_1}{a} = \pm \frac{u_2}{b}$$

a sústava má tvar:

$$\begin{aligned} u_1 &= \pm \frac{a}{b} u_2 \\ \frac{x_0u_1}{a^2} - \frac{y_0u_2}{b^2} &= c. \end{aligned} \qquad (34)$$



Obr. 33

a) Najprv nech $u_1 = +\frac{a}{b} u_2.$

Dosadíme do druhej rovnice a dostaneme:

[36] Voľba parametra $c = 0$ vedie k homogénnej sústave 2 rovníc s 2 neznámymi. V tom prípade má sústava triviálne riešenie $\vec{u} = (0,0,0)$. Nulový vektor nemôže byť smerovým vektorom priamky.

$$\frac{x_0}{a^2} \cdot \frac{a}{b} u_2 - \frac{y_0 u_2}{b^2} = c$$

$$\vdots$$

$$u_2 = \frac{ab^2 c}{x_0 b - y_0 a}, \qquad u_1 = \frac{a^2 bc}{x_0 b - y_0 a} \tag{35}$$

pre $x_0 b - y_0 a \neq 0.$

Smerovým vektorom povrchovej priamky hyperbolického paraboloidu pre vektor

$$\vec{u} = \left(\frac{a^2 bc}{x_0 b - y_0 a}, \frac{ab^2 c}{x_0 b - y_0 a}, 2c\right) \sim \left(\frac{a}{x_0 b - y_0 a}, \frac{b}{x_0 b - y_0 a}, \frac{2}{ab}\right), \tag{36}$$

kde $c \in R - \{0\}$.

b) Ak uvažujeme , že: $u_1 = -\frac{a}{b} u_2,$

potom analogicky odvodíme:

$$u_2 = -\frac{ab^2 c}{x_0 b + y_0 a}, \quad u_1 = \frac{a^2 bc}{x_0 b + y_0 a} \tag{37}$$

pre $x_0 b + y_0 a \neq 0$ a smerovým vektorom ďalšej povrchovej priamky hyperbolického paraboloidu je vektor

$$\vec{v} = \left(\frac{a^2 bc}{x_0 b + y_0 a}, -\frac{ab^2 c}{x_0 b + y_0 a}, 2c\right) \sim \left(\frac{a}{x_0 b + y_0 a}, -\frac{ab}{x_0 b + y_0 a}, \frac{2}{ab}\right), \tag{38}$$

kde $c \in R - \{0\}$.

Ukázali sme, že **každým bodom** hyperbolického paraboloidu prechádzajú **práve dve povrchové priamky**.

Definícia

Nech $X_0[x_0, y_0, z_0]$ je bodom hyperbolického paraboloidu. Hovoríme, že povrchové priamky hyperbolického paraboloidu určeného rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

ktorých smerový vektor je:

$$\vec{u} = \left(\frac{a}{x_0 b - y_0 a}, \frac{b}{x_0 b - y_0 a}, \frac{2}{ab}\right),$$

*sú **priamkami prvej osnovy** (prislúchajúce bodu X_0). **Priamkami druhej osnovy** (prislúchajúce bodu X_0) nazveme povrchové priamky, ktorých smerový vektor je*

$$\vec{v} = \left(\frac{a}{x_0 b + y_0 a}, -\frac{b}{x_0 b + y_0 a}, \frac{2}{ab}\right)$$

Príklad

Hyperbolický paraboloid je daný rovnicou $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = z$. *Napíšte rovnice povrchových priamok prislúchajúcich bodom:*

a) $M[5,0,1]$,

b) $N[-5,0,1]$.

c) *Ukážte, že priamka 1. osnovy prislúchajúca bodu* M *sa pretína s priamkou 2. osnovy prislúchajúcou bodu* N.

Riešenie. Z rovnice paraboloidu vyplýva, že $a = 5, b = 4$. Body, M, N sú bodmi tejto plochy.

a) Najprv vypočítame rovnice povrchových priamok bodu M.

$$\vec{u} = \left(\frac{a}{x_0 b - y_0 a}, \frac{b}{x_0 b - y_0 a}, \frac{2}{ab}\right) = \left(\frac{5}{5.4 - 0.5}, \frac{4}{5.4 - 0.5}, \frac{2}{5.4}\right) \sim \dots \sim \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right)$$

Rovnica priamky 1. osnovy prislúchajúca bodu $M[5,0,1]$ je v tvare:

$$X = M + t.\vec{u}\text{, kde } t \in R.$$

$$x = 5 + \frac{1}{4}.t$$

$$y = 0 + \frac{1}{5}.t$$

$$z = 1 + \frac{1}{10}.t.$$

Vypočítame smerový vektor $\vec{v}$

$$\vec{v} = \left(\frac{a}{x_0 b + y_0 a}, -\frac{b}{x_0 b + y_0 a}, \frac{2}{ab}\right) = \left(\frac{5}{5.4 + 0.5}, -\frac{4}{5.4 + 0.5}, \frac{2}{5.4}\right) \sim \dots \sim \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right)$$

Rovnica priamky 2. osnovy prislúchajúca bodu $M[5,0,1]$ je v tvare:

$$X = M + k.\vec{v}\text{, kde } k \in R.$$

$$x = 5 + \frac{1}{4}.k$$

$$y = 0 - \frac{1}{5}.k$$

$$z = 1 + \frac{1}{10}.k.$$

b) Analogickým spôsobom vypočítame

$$\vec{w} = \left(\frac{a}{x_0 b - y_0 a}, \frac{b}{x_0 b - y_0 a}, \frac{2}{ab}\right) = \left(\frac{5}{-5.4 - 0.5}, \frac{4}{-5.4 - 0.5}, \frac{2}{5.4}\right) \sim \dots \sim \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right)$$

$$X = N + s.\vec{w}\text{, kde } s \in R.$$

$$x = -5 - \frac{1}{4}.s$$

$$y = 0 - \frac{1}{5}.s$$

$$z = 1 + \frac{1}{10}.s.$$

$$\vec{q} = \left(\frac{a}{x_0 b + y_0 a}, -\frac{b}{x_0 b + y_0 a}, \frac{2}{ab}\right) = \left(\frac{5}{-5.4 + 0.5}, -\frac{4}{-5.4 + 0.5}, \frac{2}{5.4}\right) \sim \dots \sim \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right)$$

$$X = N + h.\vec{q}\text{ , kde } h \in R.$$

$$x = -5 - \frac{1}{4}.h$$

$$y = 0 + \frac{1}{5}.h$$

$$z = 1 + \frac{1}{10}.h.$$

c) Najprv riešme sústavu danú rovnicami

$$X = M + t.\vec{u}\text{ , kde } t \in R, \qquad X = N + h.\vec{q}\text{ , kde } h \in R.$$

V prepise do jednotlivých rovníc

$$x = 5 + \frac{1}{4}.t = -5 - \frac{1}{4}.h$$

$$y = 0 + \frac{1}{5}.t = 0 + \frac{1}{5}.h \Rightarrow \boxed{t = h}$$

$$z = 1 + \frac{1}{10}.t = 1 + \frac{1}{10}.h.$$

Dosadíme do prvej rovnice a vypočítame:

$$10 = -\frac{1}{2}t \Rightarrow \boxed{t = -20}.$$

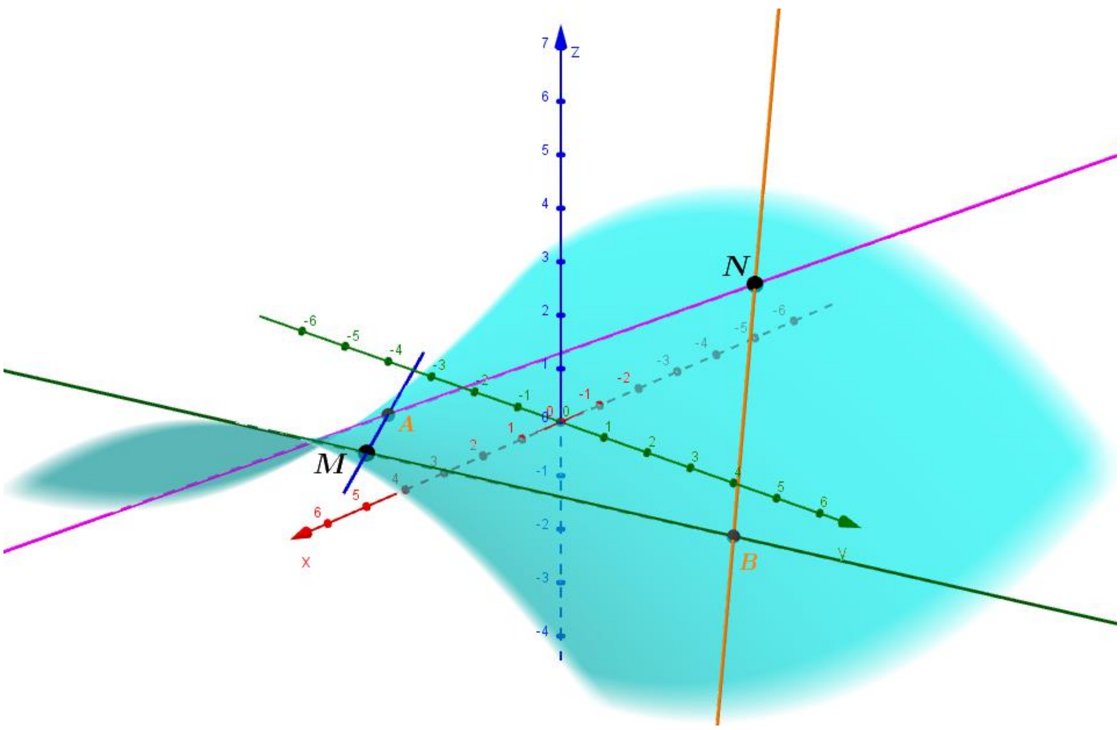
Priesečník – bod A má súradnice

$$A\left[5 + \frac{1}{4}.(-20), \frac{1}{5}.(-20), 1 + \frac{1}{10}.(-20)\right] = A[0,-4,-1].$$

Ak hľadáme prienik priamok

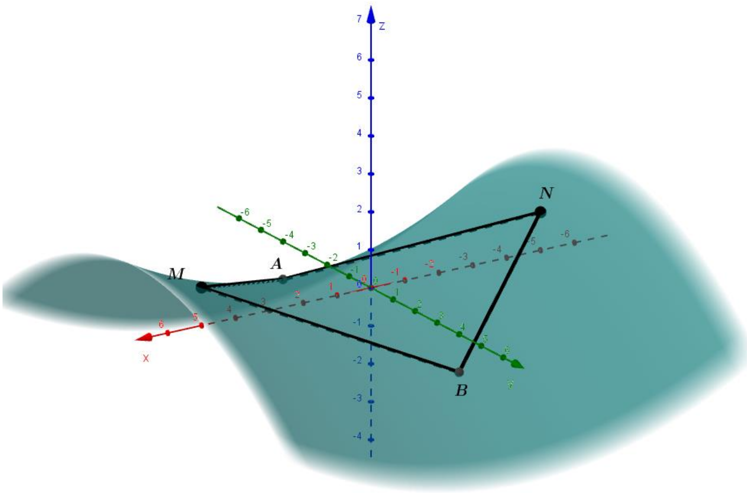
$$X = M + k.\vec{v}\text{ , kde } k \in R \text{ a } X = N + s.\vec{w}\text{ , kde } s \in R,$$

potom obdobne vypočítame priesečník $B[0{,}4,-1]$.



Obr. 34

Pozn. Body $MANB$ vytvárajú tzv. „priestorový “ štvoruholník (strany sú úsečky, ale nie všetky štyri vrcholy sú v jednej rovine. Nachádzajú sa na ploche hyperbolického paraboloidu.



Obr. 35

Cvičenie

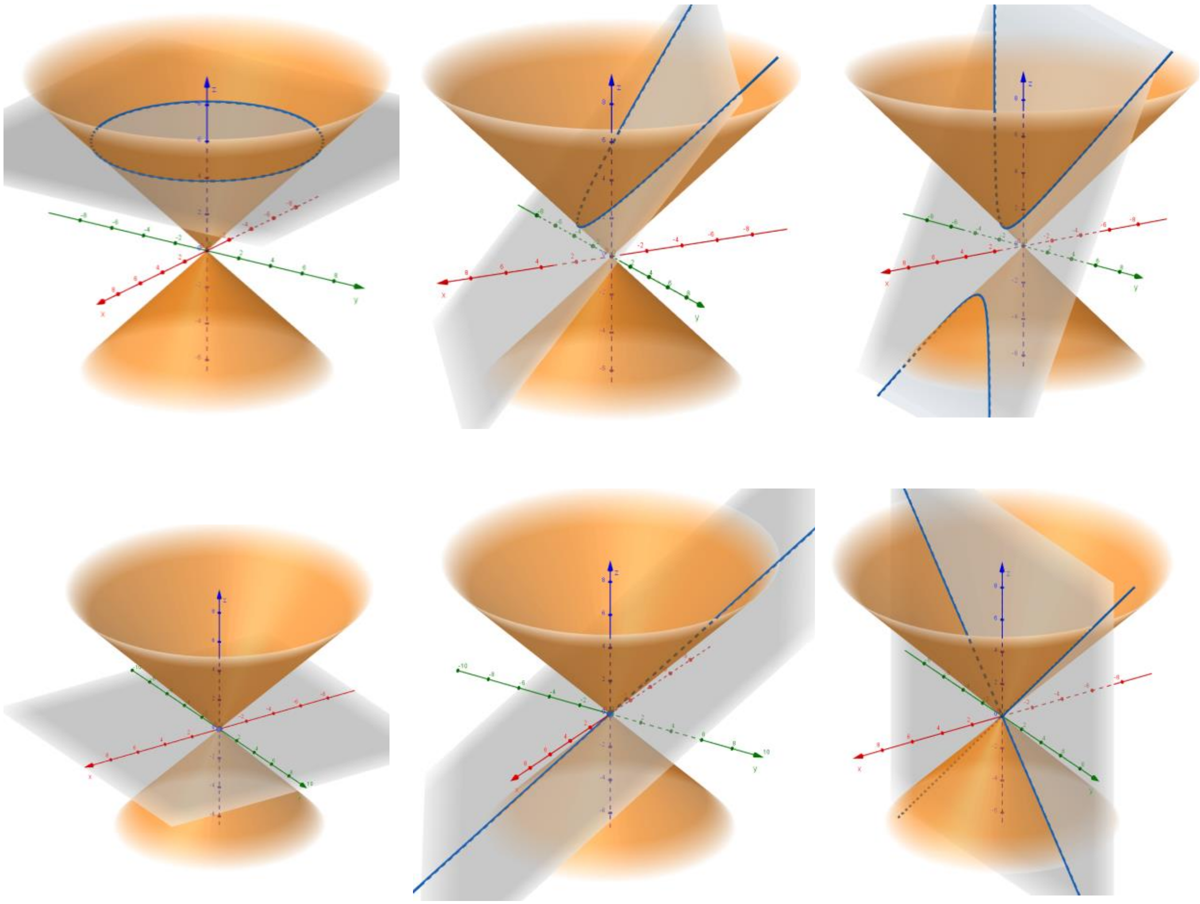
1. Zistite vzájomnú polohu priamky a guľovej plochy, ak sú dané rovnicami:
   a) $\frac{x+5}{7} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-8}{-3} = t, t \in R, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y - 4z + 16 = 0$
   b) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-4} = t, t \in R, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 28x - 22y + 24z - 164 = 0$
2. Určte rovnicu guľovej plochy, ktorá na priamke $\frac{x-5}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{-3} = t, t \in R$ vytína tetivu dĺžky 12 a má stred $S[4, -2,3]$.
3. Nájdite priesečník priamky $\frac{x}{3} = \frac{y-8}{-4} = \frac{z-4}{-2} = t, t \in R$ a elipsoidu s rovnicou $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} + \frac{z^2}{16} = 1$.
4. Do kvádra s rozmermi a, b, c je vložený elipsoid tak, že jeho vrcholy sa dotýkajú stien. Vypočítajte dĺžku časti telesovej uhlopriečky kvádra, ktorá leží v elipsoide.
5. V rovine $x = 2$ určte rovnicu sečnice elipsoidu s rovnicou $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ tak, aby bod $S[2,1,-1]$ bol stredom tetivy.
6. Nájdite priesečník hyperbolického paraboloidu s rovnicou $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = z$ a priamky s rovnicou $\frac{x}{4} = \frac{y-10}{-5} = \frac{z+14}{11} = t, t \in R$.
7. Napíšte rovnice povrchových priamok hyperboloidu $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = -1$, ktoré prechádzajú bodom $M[-6,2,4]$.
8. Určte rovnice povrchových priamok hyperbolického paraboloidu s rovnicou $x^2 - y^2 = 4z$, ktoré prechádzajú bodom $A[3,1,2]$.
9. Priamka určená rovnicou $x = y = z = t, t \in R$ pretína valcovú plochu s rovnicou $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Vypočítajte súradnice priesečníkov.

Vzájomná poloha roviny a kvadratickej plochy

Vzájomná poloha kvadratickej plochy a roviny môže byť rôzna:

a) ak rovina nemá s plochou spoločný bod, hovoríme, že rovina kvadratickú plochu **nepretína**.
b) Ak rovina **pretína** plochu, potom rozlišujeme spoločný prienik – kužeľosečku:
   - kužeľosečka je regulárna (kružnica, elipsa, parabola, hyperbola),
   - prienik je singulárna kužeľosečka (bod, priamka, dvojica rovnobežiek; dvojica rôznobežiek).

   Ilustračnými príkladmi sú rovinné rezy, napr. rotačnej, kužeľovej plochy.



Obr. 36 *a-f*

c) Rovina je dotykovou rovinou kvadratickej plochy.

Dotyková rovina kvadratickej plochy

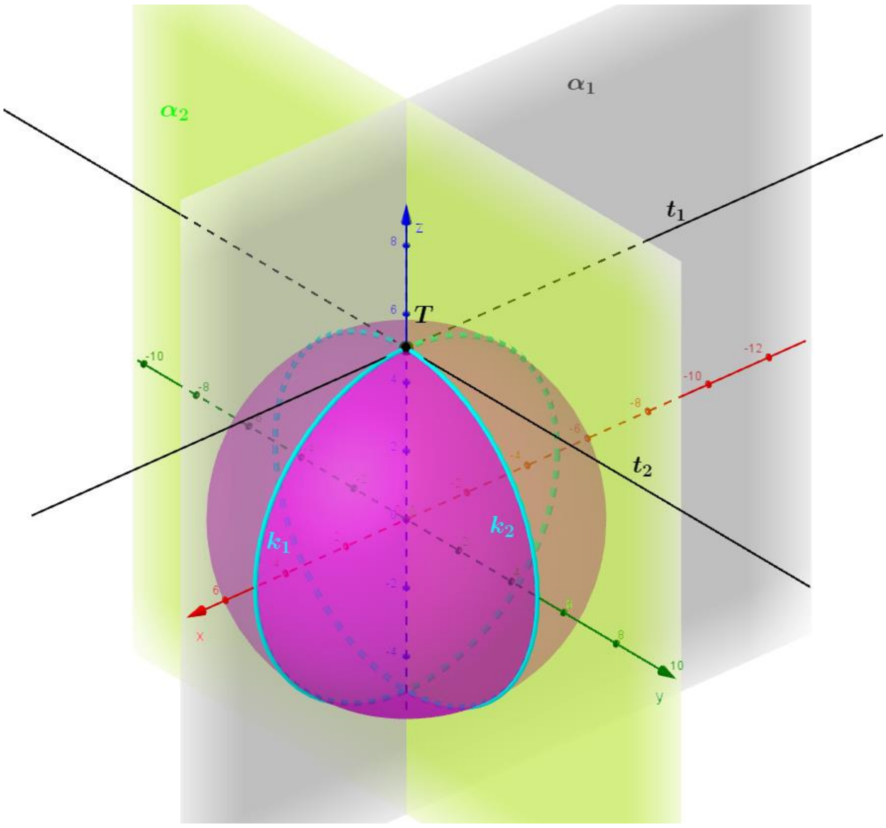
Problematika určenia dotykovej roviny kvadratickej plochy súvisí s pojmom dotyčnica ku krivke na ploche. Najprv definujeme dotyčnicu.

Definícia

*Priamka t sa nazýva **dotyčnicou** ku ploche v bode $T[x_0, y_0, z_0]$, ak je dotyčnicou k nejakej krivke ležiacej na danej ploche a prechádza bodom T.*

Uvažujme názorne, napr. ak na guľovej ploche s rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ leží bod $T[x_0, y_0, z_0]$, možno bodom T a stredom guľovej plochy $S[0,0,0]$ preložiť rovinu α, ktorá pretína guľovú plochu v krivke – kružnici k. Dotyčnica t ku kružnici k, ktorá leží v rovine α a prechádza bodom T, je súčasne dotyčnicou ku danej guľovej ploche[37].

V definícii dotyčnice ku ploche sa uvádza bližšie nešpecifikovaný termín „nejakej krivke na ploche". Aj v tomto názornom príklade existuje nekonečne mnoho rovín prechádzajúcich bodmi S a T, ktorých prienikmi s guľovou plochou sú kružnice. Každá kružnica má v príslušnej rovine v danom bode T „svoju" dotyčnicu.



Obr. 37

Z uvedeného vyplýva, že dotyčníc ku ploche v pevne zvolenom bode T danej plochy môže existovať viac. Platí veta:

Veta

Všetky dotyčnice zostrojené v spoločnom bode danej plochy ležia v jednej rovine.

Dôkaz vynechávame.

Definícia

*Rovinu τ, v ktorej ležia všetky dotyčnice t zostrojené v spoločnom bode T danej kvadratickej plochy nazývame **dotykovou rovinou** plochy v danom bode T. Bod T sa nazýva **dotykovým bodom**.*

Dotyková rovina plochy je teda určená aspoň 2 navzájom rôznymi dotyčnicami, ktoré sa dotýkajú vybraných kriviek na ploche.

Pomerne názorné predstavy o priestorovom „rozložení" dotykovej roviny a plochy získame, ak uvažujeme o guľovej ploche, elipsoide alebo eliptickom paraboloide. V uvedených prípadoch leží dotyková rovina zvonku danej plochy a má s plochou spoločný práve jeden (dotykový) bod.

[37] Dotyčnica ako priamka v euklidovskom trojrozmernom priestore je určená len parametrickými rovnicami.

Komplikovanejšia situácia je v prípadoch, kedy uvažujeme o priamkových plochách, napr. majme hyperbolický paraboloid (pozri Obr. 17). Ak je určený rovnicou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, potom rovina $z = 0$ ho pretína v dvoch rôznobežných priamkach. s rovnicami $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ a $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$. Priamky sú reznými krivkami[38] a súčasne aj dotyčnicami[39] v bode $S[0,0,0]$.

V zmysle uvedenej vety, ide o dotykovú rovinu s rovnicou $z = 0$ a máme názornú ukážku dotykovej roviny kvadratickej plochy v bode, ktorá pretína danú plochu v dvoch priamkach.[40]

Odvodíme rovnicu dotykovej roviny za podmienok, že je rovnicou daná kvadratická plocha a jej pevný bod.

Uvažujme kvadratickú plochu určenú rovnicou

$$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0},$$

kde $A, B, C, D, E, F, G \in R$, $[A, B, C] \neq [0,0,0]$. Ďalej zvoľme bod $T[x_0, y_0, z_0]$ ako bod, ktorý leží na danej kvadratickej ploche a konštruujeme dotykovú rovinu τ prechádzajúcu bodom T.

Ak zostrojíme rovinný rez rovinou $y = y_0$, potom rezom je kužeľosečka. Kužeľosečka má dotyčnicu t_y. Rovnica dotyčnice[41] v rovine $y = y_0$ je :

$$Ax.x_0 + Cz.z_0 + \frac{D}{2}(x + x_0) + \frac{F}{2}(z + z_0) + G + By_0^2 + Ey_0 = 0.$$

Normálový vektor $\overrightarrow{n_y}$ dotyčnice t_y má súradnice $\overrightarrow{n_y} = \left(Ax_0 + \frac{D}{2}, y_0, Cz_0 + \frac{F}{2}\right)$ a je kolmý na smerový vektor dotyčnice $\overrightarrow{u_y}$. Pre súradnice platí:

$$\overrightarrow{u_y} = \left(-\left(Cz_0 + \frac{F}{2}\right), y_0, Ax_0 + \frac{D}{2}\right).$$

K smerovému vektoru $\overrightarrow{u_y}$ dotyčnice môžeme určiť asociovaný vektor

$$\overrightarrow{u_0} = \left(-\left(Cz_0 + \frac{F}{2}\right), 0, Ax_0 + \frac{D}{2}\right),$$

ktorý leží v rovine $y = 0$. Vektor $\overrightarrow{u_0}$ zostáva smerovým vektorom dotyčnice t_y.

Analogickou úvahou dostaneme, že smerový vektor dotyčnice t_x, ktorá leží v rovine $x = x_0$, prechádza bodom T a dotýka sa plochy τ, je vektor:

$$\overrightarrow{v_0} = \left(0, -\left(Cz_0 + \frac{F}{2}\right), By_0 + \frac{E}{2}\right).$$

Normálový vektor dotykovej roviny τ je vektor $\boldsymbol{\vec{n}} = \boldsymbol{\overrightarrow{u_0}} \times \boldsymbol{\overrightarrow{v_0}}$ a platí:

[38] Súčasne sú obe priamky aj singulárnym prípadom kužeľosečky.
[39] Dotyčnica ku priamke (resp. grafu lineárnej funkcie) v jej pevne zvolenom bode je s danou priamkou totožná priamka.
[40] Voľne povedané, v ľubovoľne malom okolí bodu S leží „časť dotykovej roviny na jednej strane plochy." Matematicky to nie je presné vyjadrenie, avšak na vytvorenie istej predstavy o priestorovej situácii to postačuje.
[41] Pozri odvodenie rovnice: Vallo D. (2018). Kužeľosečky. FPVaI UKF v Nitre, Nitra

$$\vec{n} = \left(Ax_0 + \frac{D}{2}, By_0 + \frac{E}{2}, Cz_0 + \frac{F}{2}\right).$$

Rovnica roviny τ je v tvare:

$$\left(Ax_0 + \frac{D}{2}\right)x + \left(By_0 + \frac{E}{2}\right)y + \left(Cz_0 + \frac{F}{2}\right)z + H = 0. \tag{39}$$

Hodnotu absolútneho člena $H \in R$ určíme z podmienky, že bod $T[x_0, y_0, z_0]$ je bodom dotykovej roviny, t.j.:

$$\left(Ax_0 + \frac{D}{2}\right)x_0 + \left(By_0 + \frac{E}{2}\right)y_0 + \left(Cz_0 + \frac{F}{2}\right)z_0 + H = 0,$$

$$\vdots$$

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + \frac{D}{2}x_0 + \frac{E}{2}y_0 + \frac{F}{2}z_0 = -H$$

Keďže bod $T[x_0, y_0, z_0]$ je súčasne aj bodom kvadratickej plochy, platí:

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + Fz_0 + G = 0$$

a teda

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 = -(Dx_0 + Ey_0 + Fz_0 + G).$$

Čiastkový výsledok dosadíme do rovnice

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + \frac{D}{2}x_0 + \frac{E}{2}y_0 + \frac{F}{2}z_0 = -H$$

a získame

$$-(Dx_0 + Ey_0 + Fz_0 + G) + \frac{D}{2}x_0 + \frac{E}{2}y_0 + \frac{F}{2}z_0 = -H$$

$$\frac{D}{2}x_0 + \frac{E}{2}y_0 + \frac{F}{2}z_0 + G = H.$$

Rovnica dotykovej roviny[42] τ je v tvare:

$$\left(Ax_0 + \frac{D}{2}\right)x + \left(By_0 + \frac{E}{2}\right)y + \left(Cz_0 + \frac{F}{2}\right)z + \frac{D}{2}x_0 + \frac{E}{2}y_0 + \frac{F}{2}z_0 + G = 0$$

$$\vdots$$

$$Axx_0 + Byy_0 + Czz_0 + \frac{D}{2}(x + x_0) + \frac{E}{2}(y + y_0) + \frac{F}{2}(z + z_0) + G = 0. \tag{40}$$

Príklad

Odvoďte rovnicu dotykovej roviny τ ku eliptickému paraboloidu s rovnicou $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = z$ v jeho bodoch:

[42] Porovnajte výsledok s geometrickým významom diferenciálu funkcie dvoch premenných, napr. v literatúre Kluvánek I., Mišík L, Švec M. (1959). Matematika pre štúdium technických vied I, SVTL, Bratislava.

a) $O[0,0,0]$,

b) $T[3,5,?]$.

Riešenie. Z rovnice paraboloidu dostaneme:

$$A = \frac{1}{25}, \qquad B = \frac{1}{16}, \quad C = D = E = G = 0, \quad F = -1.$$

a) Plocha prechádza bodom $O[0,0,0] = O[x_0, y_0, z_0]$, preto rovnica dotykovej roviny je tvare:

$$\frac{1}{25}.x.0 + \frac{1}{16}.y.0 + 0.z.0 + \frac{0}{2}(x+0) + \frac{0}{2}(y+0) - \frac{1}{2}(z+0) + 0 = 0$$

$$\vdots$$

$$z = 0$$

Dotyková rovina je súradnicová rovina určená rovnicou $z = 0$.

b) Súradnicu z_0 bodu $T[3,5,z_0]$ vypočítame z rovnice paraboloidu:

$$z_0 = \frac{3^2}{25} + \frac{5^2}{16} = \cdots = 769/400.$$

Dosadíme do vzorca pre rovnicu dotykovej roviny:

$$\frac{1}{25}.x.3 + \frac{1}{16}.y.5 + 0.z.\frac{769}{400} + \frac{0}{2}(x+3) + \frac{0}{2}(y+5) - \frac{1}{2}\left(z + \frac{769}{400}\right) + 0 = 0$$

$$\vdots$$

$$66x + 250y - 400z - 769 = 0.$$

Dotyková rovina je rovina určená uvedenou rovnicou.

Príklad

Určte rovnicu dotykovej roviny τ ku elipsoidu s rovnicou $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{36} = 1$, ktorá je rovnobežná s rovinou α určenou rovnicou $25x + 18y + 105z = 0$.

Riešenie. Ak označíme dotykový bod $T[x_0, y_0, z_0]$, potom pre dotykovú rovinu τ platí:

$$\frac{1}{81}xx_0 + \frac{1}{25}yy_0 + \frac{1}{36}zz_0 - 1 = 0.$$

Podľa zadania sú roviny τ a α rovnobežné, preto normálový vektor $\vec{n} = \left(\frac{x_0}{81}, \frac{y_0}{25}, \frac{z_0}{36}\right)$ dotykovej roviny τ je asociovaným vektorom k normálovému vektoru $\overrightarrow{n_\alpha} = (25,18,105)$.

Existuje $k \in R - \{0\}$ také, že

$$\frac{x_0}{81} = k.25$$

$$\frac{y_0}{25} = k.18$$

$$\frac{z_0}{36} = k.105$$

Z rovníc vyplýva:

$$x_0 = k.25.81, \quad y_0 = k.18.25, \quad z_0 = k.105.36.$$

Bod T patrí elipsoidu, preto dosadíme jeho súradnice do rovnice plochy:

$$\frac{(k.25.81)^2}{81} + \frac{(k.18.25)^2}{25} + \frac{(k.105.36)^2}{36} = 1$$

$$\vdots$$

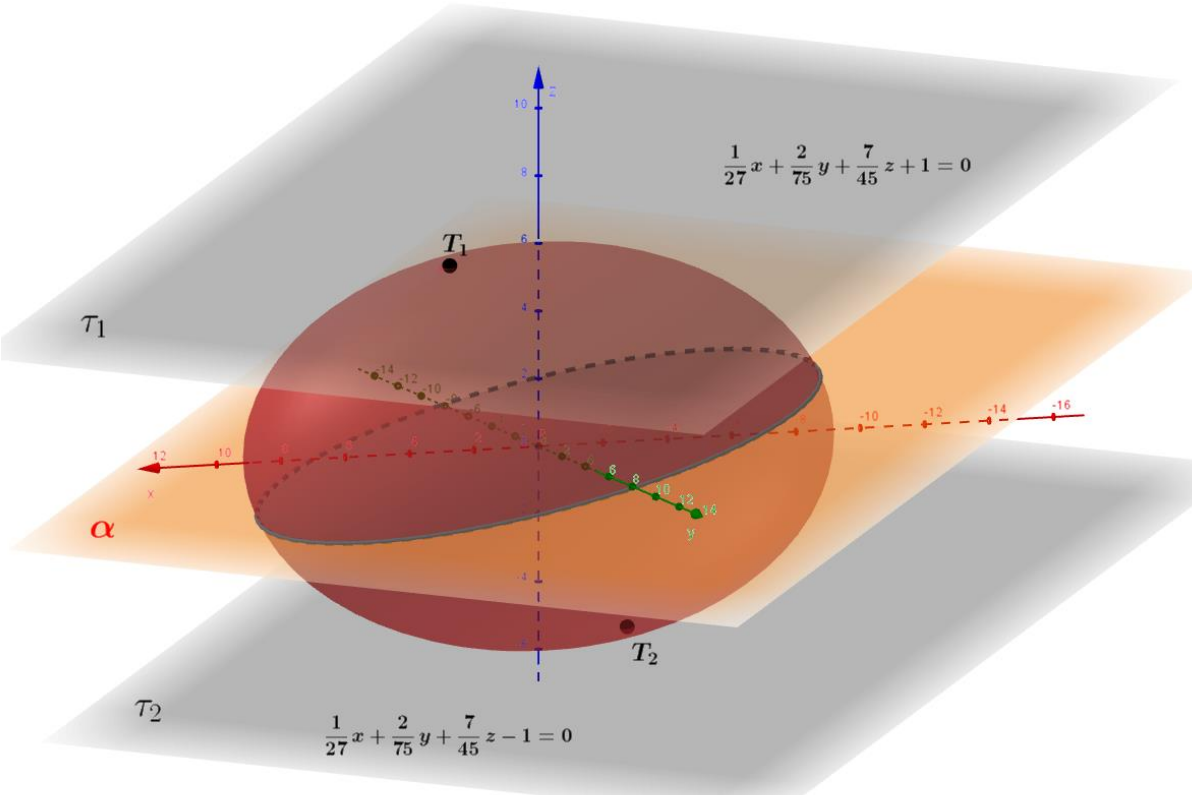
$$k^2 = \frac{1}{455625} \implies k = \pm\frac{1}{675}.$$

Z výsledku odvodíme pre súradnice bodu $T[x_0, y_0, z_0]$:

$$T_1\left[3, \frac{2}{3}, \frac{28}{5}\right], \qquad T_2\left[-3, -\frac{2}{3}, -\frac{28}{5}\right].$$

Dotykové roviny, rovnobežné s danou rovinou α, sú dve:

$$\tau_{1,2} := \quad \frac{1}{27}x + \frac{2}{75}y + \frac{7}{45}z \pm 1 = 0.$$



Obr. 38

Príklad

Určte rovnicu dotykovej roviny τ ku hyperboloidu s rovnicou

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 1,$$

ktorá prechádza priamkou s rovnicou

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} = t, \quad t \in R.$$

Riešenie. Priamka p má parametrické vyjadrenie:

$$x = 3t - 9, \quad y = 3t, \quad z = t, \quad t \in R.$$

Priamka p pretne plochu hyperboloidu v dvoch bodoch, ktorých súradnice vypočítame riešením sústavy:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 1,$$

$$x = 3t - 9, \quad y = 3t, \quad z = t, \quad t \in R.$$

Odvodíme:

$$\frac{(3t-9)^2}{9}+\frac{(3t)^2}{36}-\frac{t^2}{4}=1$$
$$\vdots$$
$$t_1=\frac{19}{6},\qquad t_2=\frac{17}{6}.$$

Priesečníky priamky p s hyperboloidom sú:

$$P\left[\frac{1}{2},\frac{19}{2},\frac{19}{6}\right],\qquad Q\left[-\frac{1}{2},\frac{17}{2},\frac{17}{6}\right].$$

Všeobecná rovnica dotykovej roviny τ je v tvare:

$$\frac{x.x_0}{9}+\frac{y.y_0}{36}-\frac{z.z_0}{4}=1,$$

kde $T[x_0,y_0,z_0]$ sú súradnice dotykového bodu roviny τa hyperboloidu (zatiaľ ako neznáme).

Keďže dotyková rovina τ prechádza priamkou p (podmienka v zadaní), ležia body P,Q v tejto rovine a ich súradnice vyhovujú rovnici roviny. Dosadíme a získame sústavu dvoch rovníc s tromi neznámymi:

$$\frac{\frac{1}{2}x_0}{9}+\frac{\frac{19}{2}y_0}{36}-\frac{\frac{19}{6}z_0}{4}=1$$
$$\frac{-\frac{1}{2}x_0}{9}+\frac{\frac{17}{2}y_0}{36}-\frac{\frac{17}{6}z_0}{4}=1$$

Sústava má parametrické riešenie.

Ak položíme $z_0=s, s\in R$, potom vypočítame:

$$y_0=4+3s$$
$$x_0=-1.$$

Z parametrického vyjadrenia pre dotykový bod $T[x_0,y_0,z_0]=T[-1,4+3s,s], s\in R$ vyplýva, že bod T leží na priamke, ktorá prechádza bodom $A[-1,4,0]$ a má smerový vektor $\vec{u}=(0,3,1)$.

Dotykový bod je súčasne bodom plochy, preto platí:

$$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{36}-\frac{z_0^2}{4}=1$$
$$\frac{(-1)^2}{9}+\frac{(4+3s)^2}{36}-\frac{(s)^2}{4}=1$$
$$\vdots$$
$$s=\frac{2}{3}$$

a vypočítame $T\left[-1,6,\frac{2}{3}\right]$. Dotyková rovina má rovnicu $-\frac{x}{9}+\frac{y}{6}-\frac{z}{6}-1=0.$

Cvičenie

1. Zistite vzájomnú polohu guľovej plochy s rovnicou $x^2+y^2+z^2=144$ a roviny:
   a) $2x+3y-z+6=0$ b) $x+y+z-30=0$ c) $2x+3y-z+6=0$
2. Nájdite stred a polomer kružnice určenej sústavou:
$$x^2+y^2+z^2-10y=0$$
$$x+2y+2z-19=0.$$

3. Guľová plocha prechádza bodom $O[0,0,0]$ a súčasne kružnicou, ktorá je prienikom guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ a roviny $3x - 2y + 6z - 8 = 0$. určte rovnicu tejto guľovej plochy.
4. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku guľovej ploche s rovnicou $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 36$, ktorá prechádza bodom $T[3,1,2]$.
5. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku guľovej ploche s rovnicou $(x+3)^2 + (y-7)^2 + (z+4)^2 = 49$, ktorá je rovnobežná s rovinou $2x - 6y + 3z - 5 = 0$.
6. Napíšte rovnicu dotykovej roviny elipsoidu s rovnicou $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{(z+1)^2}{9} = 1$, ktorá prechádza bodom $M[1,?,-1]$.
7. Odvoďte rovnicu dotykovej roviny paraboloidu s rovnicou $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = z$, ktorá je rovnobežná s rovinou $x - y + 2z + 2 = 0$.

*Pre náročnejších

Rotačné kvadratické plochy

Rotačné kvadratické plochy sú špeciálnym prípadoch kvadratických plôch.

Nech máme v euklidovskom priestore E_3 zvolenú rovinu α a v nej priamku o. Otáčaním roviny α okolo priamky o sa každý bod $M \in \alpha$ pohybuje po kružnicovom oblúku k, ktorý:

a) leží v rovine kolmej na priamku o,
b) má stred na priamke o
c) a polomer sa rovná vzdialenosti bodu M od priamky o.

Ak v rovine α leží krivka g, opisuje (analogicky) každý bod tejto krivky g kružnicový oblúk, resp. celú kružnicu. Celá krivka pri otočení o určitý uhol[43] opíše časť rotačnej plochy, resp. celú plochu $\mathcal{P}$.

Priamku o nazývame **osou rotácie**, krivku g polmeridián a rovinu α nazývame **rovinou meridiánu**. Prienik roviny α s rotačnou plochou (pri otočení krivky g okolo osi rotácie o o plný uhol) sa nazýva meridián (v niektorej literatúre aj ako **poludník**). Body polmeridiánu g pri otočení o plný uhol opisujú kružnice, ktoré nazývame **rovnobežkami** rotačnej plochy $\mathcal{P}$.

Položme súradnicový systém tak, že osou rotácie o je súradnicová os o_z, rovina meridiánu α má rovnicu $y = 0$ a polmeridián g je určený implicitnou rovnicou $F(x,z) = 0$.

Ak $M[x,y,z]$ je v rovine $z = z_0$ bodom rovnobežky rotačnej plochy $\mathcal{P}$a jeho vzdialenosť od rotačnej osi o sa rovná:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Polmeridián g obsahuje v rovine $y = 0$ bod $M_0[x_0, 0, z_0]$, ktorý má v rovine $z = z_0$ rovnakú vzdialenosť r od osi o, pričom platí:

$$|x_0| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{a súčasne} \quad F(x_0, z_0) = 0.$$

Z toho vyplýva, že rovnica rotačnej plochy $\mathcal{P}$, ktorá vnikne otáčaním polmeridiánu g okolo osi o_z o plný uhol je plocha s rovnicou:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \tag{41}$$

[43] Uhol otočenia môže mať rôznu veľkosť. Plný uhol má veľkosť 360°, resp. 2π rad.

Príklad

V rovine s rovnicou $y = 0$ leží elipsa $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$. Určte rovnicu rotačného elipsoidu, ktorý vznikne rotáciou danej elipsy okolo osi o_z.

Riešenie. Ak bod $M_0[x_0, 0, z_0]$ je bodom meridiánu (danej elipsy), potom $\frac{x_0^2}{25} + \frac{z_0^2}{16} = 1$. Pre ľubovoľný bod $M[x, y, z]$ rotačnej plochy platí:

$$x_0 = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{a súčasne} \quad z_0 = z.$$

Dosadíme a dostaneme rovnicu rotačného elipsoidu:

$$\frac{x_0^2}{25} + \frac{z_0^2}{16} = 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{x^2 + y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Rotačná plocha je sploštený elipsoid.

Kvadratické plochy definované vzdialenosťou

Definícia guľovej plochy uvádza, že ide o množinu bodov v priestore. Ich vzdialenosť od pevne zvoleného bodu – stredu guľovej plochy je konštantná. Možno povedať, že guľová plocha bola definovaná pomocou vzdialenosti.

Uvažujme obdobne – skúmajme množinu bodov v priestore, ktoré majú od daného geometrického útvaru konštantnú vzdialenosť.

a) Nech je daná rovina α rovnicou $ax + by + cz + d = 0$ a nech je pevne zvolená vzdialenosť r. Pre množinu bodov $M[x, y, z]$ v priestore, ktoré majú od **roviny** α **konštantnú vzdialenosť** r, platí[44]:

$$\frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = v$$

$$|ax + by + cz + d| = v.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$ax + by + cz + d \pm v\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 0 \qquad (42)$$

Ide o singulárnu kvadratickú plochu, ktorá pozostáva z dvoch rôznobežných rovín.[45]

b) Nech je daná priamka p rovnicou $X = O + t.\vec{u}$, kde $O[0,0,0], \vec{u} = (0,0,1)$ a nech je pevne zvolená vzdialenosť r. Pre množinu bodov $M[x, y, z]$ v priestore, ktoré majú od **priamky** p **konštantnú vzdialenosť** r, platí:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

[44] Vzdialenosť r bodu $M[x_0, y_0, z_0]$ od roviny $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ je daná vzťahom:

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

[45] Pre úplnosť - mali by sme ešte dokázať, že každý bod, ktorého súradnice vyhovujú odvodenej rovnici, má od roviny α vzdialnenosť r. Výpočet ponechávame na čitateľa.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Množina bodov je rotačná **valcová plocha**.

c) Nech je daný bod $V[v, 0,0]$, kde $v \in R, v \neq 0$ a daná je aj priamka p rovnicou $X = O + t.\vec{u}$, kde $O[0,0,0], \vec{u} = (0,0,1)$. Určíme množinu bodov $M[x, y, z]$, ktoré majú od bodu V a od priamky p konštantný pomer vzdialeností. Ak pomer označíme k, kde $k \in R, k > 0$, potom platí:

$$\frac{\sqrt{(x-v)^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k$$

$$\sqrt{(x-v)^2 + y^2 + z^2} = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x-v)^2 + y^2 + z^2 = k^2(x^2 + y^2)$$

$$x^2 + 2vx + v^2 - k^2x^2 + y^2 - k^2y^2 + z^2 = 0$$

$$x^2(1-k^2) + 2vx + y^2(1-k^2) + z^2 + v^2 = 0 \qquad /: (1-k^2) \neq 0$$

$$x^2 + 2\frac{v}{1-k^2}x + y^2 + \frac{z^2}{1-k^2} + \frac{v^2}{1-k^2} = 0$$

$$x^2 + 2\frac{v}{1-k^2}x + \left(\frac{v}{1-k^2}\right)^2 + y^2 + \frac{z^2}{1-k^2} + \frac{v^2}{1-k^2} - \left(\frac{v}{1-k^2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{v}{1-k^2}\right)^2 + y^2 + \frac{z^2}{1-k^2} - \left(\frac{vk}{1-k^2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\left(x + \frac{v}{1-k^2}\right)^2}{\left(\frac{vk}{1-k^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{vk}{1-k^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\frac{v^2k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (43)$$

Najprv analyzujme rovnicu pri podmienke $v \neq 0$.

Ak $0 < k < 1$, potom plocha je **rotačný elipsoid**. Ak $k > 1$, potom plocha je jednodielny hyperboloid. V oboch prípadoch je stred $S\left[\frac{v}{1-k^2}, 0,0\right]$.

Ak $k = 1$, potom odvodíme:

$$\frac{\sqrt{(x-v)^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{z^2}{2v} = x - \frac{v}{2}.$$

Rovnica predstavuje **parabolickú valcovú plochu**, ktorej určujúca krivka je parabola v rovine $y = 0$.

Uvažujme $v = 0$.

Ak $k \in (0,1)$, potom dostaneme:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k$$

$$\vdots$$

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - k^2} = 0.$$

Rovnici vyhovujú len súradnice **bodu** $O[0,0,0]$.

Pre $k = 1$ zase odvodíme rovnicu $z = 0$ a riešením je **množina bodov súradnicovej roviny $\boldsymbol{Oxy}$**.

V prípade, že $k > 1$, rovnica $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1-k^2} = 0$ je rovnicou **rotačnej kužeľovej plochy** s vrcholom $V[0,0,0]$.

Stručne k homogénnej rovnici plochy

Ak do všeobecnej rovnice $F(x,y,z) = 0$ kvadratickej plochy

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

zavedieme homogénne súradnice[46]

$$x = \rho.\frac{x_1}{x_4}, y = \rho.\frac{x_2}{x_4}, z = \rho.\frac{x_3}{x_4}, \qquad (44)$$

kde $\rho \neq 0,\ x_i \in R,\ i = 1,2,3,4,$

potom dostaneme rovnicu kvadratickej plochy v tzv. **homogénnych súradniciach.**

Platí:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0, \qquad (45)$$

Čo zapíšeme symbolicky: $\boldsymbol{F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0}$, (prípadne $F(X) = 0$).

alebo pomocou **adjungovaných lineárnych foriem** $F_i(x_1, x_2, x_3, x_4), i = 1,2,3,4$ príslušnej kvadratickej formy a to v tvare:

$$\begin{aligned} F_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ F_4(x_1,x_2,x_3,x_4) &= a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4. \end{aligned} \qquad (46)$$

Navyše platí:

$$F(X) = x_1 \cdot F_1(X) + x_2 \cdot F_2(X) + x_3 \cdot F_3(X) + x_4 \cdot F_4(X). \qquad (47)$$

Determinant z koeficientov adjungovaných lineárnych foriem sa nazýva **determinantom kvadratickej plochy**[47] a patrí medzi tzv. **invarianty** plochy, ktoré majú vplyv na jej vlastnosti.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad (48)$$

[46] Pozri : Rektorys K. a kol. 1981. Přehled užité matematiky, SNTL Praha, str. 189

[47] Determinant označíme len ako A. Z dôvodu prehľadnosti vynecháme bežne používané označenie $|A|$.

Uvažujme, že determinant $A = 0$. To znamená, že sústava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

má netriviálne riešenie[48] a existuje bod $X[x_1, x_2, x_3, x_4]$, pre ktorý platí:

$$0 = x_1 \cdot F_1(X) + x_2 \cdot F_2(X) + x_3 \cdot F_3(X) + x_4 \cdot F_4(X) = F(X).$$

Bod $X\ [x_1, x_2, x_3, x_4]$ je bodom kvadratickej plochy a nazýva sa **singulárnym bodom**. Plocha, ktorá má aspoň jeden singulárny bod, nazýva sa **singulárnou kvadratickou plochou**.

Ak $A = 0$, potom rozlišujeme hodnosť príslušnej matice. Možno dokázať:

a) ak je hodnosť matice tri, potom je kvadratická plocha kužeľová alebo valcová kvadratická plocha.
b) Ak je hodnosť matice dva, potom je kvadratická plocha zložená z dvoch navzájom rôznych rovín.
c) Ak je hodnosť matice jedna, kvadratická plocha je jedna rovina.

V prípadoch, kedy je že $A \neq 0$, kvadratická plocha nemá singulárny bod a nazýva sa **regulárnou kvadratickou plochou.**

Ako bolo naznačené, zavedenie homogénnych súradníc má viaceré významy:

a) výpočty sú prehľadnejšie a jednoduchšie vzhľadom k homogenite rovníc,
b) exaktnejšie určenie spoločných prienikov útvarov (aj s nevlastnými prvkami rozšírenej euklidovskej roviny).

Napríklad, priesečníky kvadratickej plochy s nevlastnou rovinou vyhovujú ako riešenie sústavy rovníc:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$
$$x_4 = 0.$$

Odvodíme rovnicu

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \tag{51}$$

ktorá predstavuje **regulárnu kužeľosečku** alebo **dve navzájom rôzne priamky**.

Invarianty a semi-invarianty kvadratickej plochy

Ak predsa len uvažujeme kvadratickú rovnicu troch premenných v tvare:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

kde $a_{ij} \in R, i, j = 1,2,3,4$, $[a_{11}, a_{22}, a_{33}] \neq [0,0,0]$, potom okrem determinantu A

$$I_4 = A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

[48] V homogénnych súradniciach usporiadaná štvorica $[0,0,0,0]$ nie je považovaná za bod.

zavedieme ďalšie nasledovné deterninanty:

$$I_3 = A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{52}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{53}$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{54}$$

$$S_3 = D_{33} + D_{22} + D_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{55}$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{56}$$

Determinanty I_4, I_3, I_2 a I_1 sú tzv. invarianty (hodnoty, ktoré sa pri posunutí alebo otočení plochy nezmenia); S_2, S_3 nazývame semi-invarianty (hodnoty sa nezmenia pri otočení plochy). Na základe hodnôt jednotlivých determinantov vieme rozhodnúť o type kvadratickej plochy[49].

Kvôli úplnosti uvádzame len prehľadnú tabuľku[50].

<table>
<tr><th>Č.</th><th colspan="2">Hodnoty invariantov a semi- invariantov</th><th>Množina bodov</th></tr>
<tr><td>1.</td><td rowspan="5">$I_3 \neq 0$</td><td>$I_2 > 0$
$I_1 . I_3 > 0$
$I_4 < 0$</td><td>elipsoid</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$I_2 > 0$
$I_1 . I_3 > 0$
$I_4 > 0$</td><td>prázdna množina (imaginárny elipsoid)</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$I_2 > 0$
$I_1 . I_3 > 0$
$I_4 = 0$</td><td>bod</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$I_4 > 0$
aspoň jedno z čísel I_2, $I_1 . I_3$ je záporné</td><td>jednodielny hyperboloid</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>$I_4 < 0$</td><td>dvojdielny hyperboloid</td></tr>
</table>

[49] Výpočet uvedených determinantov v minulosti slúžil k rýchlemu určeniu druhu kvadratickej plochy. V staršej literatúre čitateľ nájde odvodené vzorce na určenie stredu, resp. vrcholu, kvadratickej plochy (ak existujú), ako aj vzorce pre rovnice osí plochy, transformačné rovnice zobrazení (otočenie, posunutie) na zobrazenie do základnej polohy za účelom určenia dĺžok poloosí a pod. Pri použití prostriedkov 3D grafiky a systémov CAD, resp. CAS, tento výpočtový prístup pomaly stráca na význame.

[50] Tabuľka je čiastočne prevzatá z publikácie: Rektorys K. a kol. Přehled užité matematiky. SNTL Praha 1981.

		aspoň jedno z čísel I_2, $I_1.I_3$ je záporné	
6.		$I_4 = 0$ aspoň jedno z čísel I_2, $I_1.I_3$ je záporné	kužeľová plocha
7.	$\boldsymbol{I_3 = 0}$ $\boldsymbol{I_4 \neq 0}$	$I_4 < 0$	eliptický paraboloid
8.		$I_4 > 0$	hyperbolický paraboloid
9.	$\boldsymbol{I_2 \neq 0}$ $\boldsymbol{I_3 = 0}$ $\boldsymbol{I_4 = 0}$	$I_2 > 0$ $I_1.S_3 < 0$	eliptická valcová plocha
10.		$I_2 > 0$ $I_1.S_3 > 0$	prázdna množina (imaginárna eliptická valcová plocha)
11.		$I_2 > 0$ $S_3 = 0$	priamka
12.		$I_2 < 0$ $S_3 = 0$	hyperbolická valcová plocha
13.		$I_2 < 0$ $S_3 \neq 0$	dve rôznobežné roviny
14.	$\boldsymbol{I_3 = 0}$ $\boldsymbol{I_4 = 0}$ $\boldsymbol{I_2 = 0}$	$\boldsymbol{S_3 \neq 0}$	parabolická valcová plocha
15.	$\boldsymbol{I_3 = 0}$ $\boldsymbol{I_4 = 0}$ $\boldsymbol{I_2 = 0}$ $\boldsymbol{S_3 = 0}$	$S_2 < 0$	dve rovnobežné roviny
16.		$S_2 = 0$	rovina
17.		$S_2 > 0$	prázdna množina (imaginárne rovnobežné roviny)

Uvedieme ilustračný príklad.

Príklad

Zistite, aká kvadratická plocha je určená rovnicou

$$3x^2 - 2y^2 - z^2 + xy - 2xz + 3yz + 3x - 2y + z = 0.$$

Riešenie. Z rovnice plochy vyplýva, že:

$a_{11} = 3, a_{22} = -2, a_{33} = -1, a_{12} = \frac{1}{2}, a_{13} = -1, a_{23} = \frac{3}{2}, a_{14} = \frac{3}{2}, a_{24} = -1, a_{34} = \frac{1}{2}, a_{44} = 0.$

Jednotlivé invarianty a semi-invarianty majú hodnoty:

$$I_4 = I_3 = 0, \ \ I_2 = -17, S_2 = -1, S_3 = -\frac{19}{2}.$$

Podľa tabuľky ide o dve navzájom rôznobežné roviny. Rozkladom rovnice by sme dostali:

$$(x + y - z + 1).(3x - 2y + z) = 0.$$

Cvičenie

1. Napíšte rovnicu kvadratickej plochy, ktorá vznikne rotáciou elipsy s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ležiacej v rovine $y = 0$, ak rotuje okolo osi o_z.
2. Napíšte rovnicu kvadratickej plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ležiacej v rovine $y = 0$, ak rotuje okolo:
   a) osi o_z, b) osi o_x.
3. Aká je rovnica plochy, ktorá vznikne rotáciou paraboly s rovnicami $az = y^2$ ležiacej v rovine $x = 0$ okolo osi o_z?
4. Určte množinu bodov, ktoré majú od roviny s rovnicou $x = 2a$ a od bodu $F[a, 0,0]$, kde $a \neq 0, a \in R$ pomer vzdialeností rovný $\sqrt{2}$.
5. Odvoďte rovnicu množiny bodov, ktoré ležia v rovnakej vzdialenosti od bodu $F[-a, 0,0]$ a od roviny $x = a$, kde $a \neq 0, a \in R$.
6. Určte rovnicu kvadratickej plochy, ktorej body majú od bodu $F[1,1,1]$ rovnakú vzdialenosť ako od roviny s rovnicou $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} + \frac{z}{5} = 1$.
7. Zapíšte rovnicu elipsoidu $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1$ v homogénnych súradniciach.
8. Napíšte rovnicu asymptotického kužeľa v homogénnych súradniciach.
9. Zistite, akú plochu určuje rovnica:
   a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - x - y - z + 1 = 0$,
   b) $xy + xz + yz - 1 = 0$,
   c) $y(y + z) - x(x + z) + xy = 0$,
   d) $3x^2 - 5y^2 - z^2 - 2xy - 2xz + 6yz + 22x - 42y + 10z - 16 = 0$.

Otázky na zamyslenie

1. Bod $M[x_0, y_0, z_0]$ leží na guľovej ploche určenej stredovou rovnicou
$$(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 = r^2.$$
Aký vzťah platí pre súradnice bodu M v prípade, že je vonkajším, resp. vnútorným, bodom guľovej plochy?
2. Sú súradnice stredu guľovej plochy riešením jej rovnice?
3. V čom sa bude odlišovať rovnica guľovej plochy, ktorá bude sústredná s guľovou plochou
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0\,?$$
4. Aká je stredová rovnica guľovej plochy, ktorá sa dotýka súradnicových rovín? Uvažujte o polohe guľovej plochy vo všetkých ôsmich oktantoch.
5. Akým útvarom je elipsoid, ktorého polosi sú navzájom rovnaké čísla?
6. Elipsa je definovaná ako množina bodov v rovine E_2, ktorých súčet vzdialeností od dvoch daných ohník je konštantný. Možno uvažovať analogicky o ohniskách všeobecného elipsoidu?
7. Elipsoid je určený šiestimi nezávislými bodmi. Koľko z nich nesmie ležať v jednej rovine?
8. Jednodielny hyperboloid v základnej polohe má os totožnú so súradnicovou osou o_y. Aká je jeho rovnica, ak má byť rotačnou plochou?
9. Koľko osí súmernosti má dvojdielny hyperboloid?
10. Koľkými nezávislými bodmi v priestore E_3 je určený eliptický paraboloid?
11. Ako sa zmení počet určujúcich bodov v priestore E_3, ak paraboloid bude rotačnou plochou ?
12. Koľkými nezávislými bodmi v priestore E_3 je určený hyperbolický paraboloid?
13. Môže byť hyperbolický paraboloid rotačnou plochou?
14. Môže smerový vektor osi valcovej plochy ležať v jednej rovine s určujúcou krivkou?
15. Môže byť určujúcou krivkou valcovej plochy aj priamka?
16. Valcová plocha má v rovine $z = 0$ určujúcu kružnicu s rovnicou $x^2 + y^2 = r^2$ pre $r > 0$. Aká je limitná množina bodov pre $r \to 0$?
17. Je kužeľová plocha priamkovou plochou?
18. Aký je rozdiel medzi kužeľom a kužeľovou plochou?
19. Ak je riadiacou krivkou kužeľovej plochy elipsa ležiaca v rovine $z = 0$, môže byť plocha rotačná?
20. Guľová plocha má s priamkou spoločný jediný bod. Je táto priamka jedinou dotyčnicou ku ploche?
21. Priamka pretína rotačný paraboloid vo vrchole a iné priesečníky s plochou nemá. Aká je to priamka?
22. Kedy sú povrchové priamky jednodielneho hyperboloidu prislúchajúce dvom rôznym bodom plochy mimobežné?
23. Ak rovina pretína guľovú plochu, v akej najväčšej vzdialenosti od tejto roviny leží stred danej guľovej plochy?
24. Aká je najmenšia vzdialenosť roviny od stredu daného elipsoidu, ak rovina elipsoid nepretína?
25. Aký tieň vrhá guľová plocha na dotykovú rovinu, ak je osvetlená rovnobežnými lúčmi so smerom $\vec{s}$. Rozlíšte prípady, ak smer $\vec{s}$ je s dotykovou rovinou:
    a) kolmý, b) rovnobežný, c) rôznobežný.

Použitá literatúra

Bican L. (1979). Lineární algebra. SNTL Praha

Budinský B., Kepr B. (1970). Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi. SNTL Praha

Budinský B. (1983). Analytická a diferenciální geometrie. SNTL Praha

Bydžovský B. (1923). Úvod do analytické geometrie. JČM+F Praha

Bydžovský B. (1946). Úvod do analytické geometrie. JČM+F Praha

Eliaš J., Horváth J., Kajan J. (1976). Zbierka úloh z vyššej matematiky I. Alfa Bratislava

Gellert, W. Küstner, H., Hellwich, M. (1974). Kleine Enzyklopädie Mathematik. *Veb Bibliographisches Institut*, Leipzig (nemecky)

Hejný M., Zaťko V., Kršňák P. (1985). Geometria 1. SPN Bratislava

Ivan J. (1986). Matematika 1. Alfa Bratislava

Kletenik D.V. (1967). Sbornik zadač po analitičeskoj geometrii. Nauka Moskva (rusky)

Kluvánek I., Mišík L. Švec M. (1959). Matematika pre štúdium technických vied, 1. diel. SVTL Bratislava

Minorskij V. P. (1964). Sbírka úloh z vyšší matematiky. SNTL Praha

Natanson I. P. (1955). Sčítaní nekonečně malých veličin. SNTL Praha

Privalov I. I. (1952). Analitičeskaja geometria. GITTL Moskva (rusky)

Rektorys K. a kol. (1981). Přehled užité matematiky. SNTL Praha

Rychnovský R. (1968). Úvod do vyšší matematiky. SZN Praha

Sekanina M., Boček L., Kočandrle M., Šedivý J. (1986). Geometrie I, SPN Praha

Seko, L. (1985). Kartografia a topografia. *Prírodovedecká fakulta UK v Bratislave*, Bratislava

Šedivý O., Vallo, D. (2012). Geometria V. Kužeľosečky a kvadratické plochy. FPV Nitra

Vallo D., Rumanová L., Vidermanová K., Varga M., Barcíková E., Klepancová M. (2012). Geometria telies...všeobecne a pútavo. FPV Nitra

Vlasov A. K. (1957). Učebnice vyšší matematiky, I. časť. SNTL Praha

Weisstein, Eric W. "Sphere." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Sphere.html

Weisstein, Eric W. "Surface of Revolution." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/SurfaceofRevolution.html

Zalabai Z. a kol. (1986). Cvičenia z matematiky. Príroda Bratislava

zadná tiráž

Názov:	**Geometria kvadratických plôch**
Autori:	Dušan Vallo, Vladimír Kobza

Vydavateľ:	FPVaI UKF v Nitre
Edícia:	Prírodovedec č. 887
Návrh obálky:	Viliam Ďuriš
Formát:	A4
Rok vydania:	2024
Miesto vydania:	Nitra
Počet strán:	77
ISBN:	978-80- 558-2238-9

9 788055 822389

ISBN 978-80-558-2238-9