

Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Fakulta prírodných vied a informatiky

Teória a prax zobrazovania priestoru
na stredných školách technického zamerania

Lucia Rumanová, Dušan Vallo, Katarína Laššová

Nitra 2025

Názov: **Teória a prax zobrazovania priestoru na stredných školách technického zamerania**

Edícia Prírodovedec č. 901

Autori:

doc. PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.

doc. RNDr. Dušan Vallo, PhD.

PaedDr. Katarína Laššová, PhD.

Recenzenti:

Dr.h.c. prof. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, PhD.

doc. PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.

Ing. RNDr. Janka Drábeková, PhD.

© Lucia Rumanová, Dušan Vallo, Katarína Laššová, 2025

Publikácia bola vytvorená v rámci projektu KEGA č. 013UKF-4/2023 s názvom *Inovatívne prístupy v problematike zobrazovania priestoru s ohľadom na technicky orientované študijné odbory v kontexte aktuálnych potrieb praxe.*

ISBN 978-80-558-2292-1

Predslov

V predloženej monografii sa zaoberáme súčasnými výzvami stredoškolského vzdelávania na Slovensku v kontexte prípravy žiakov pre technické študijné odbory. Pre prax sú naďalej kľúčoví kvalitní architekti, strojár, konštruktéri, stavbári, dizajnéri a kartografi. Títo odborníci potrebujú na výkon svojej profesie nielen dostatočnú priestorovú predstavivosť, ale aj rozsiahle odborné skúsenosti a zručnosti.

Kľúčové je, aby deti už od útleho veku získavali prirodzené priestorové skúsenosti. Tým sa zabezpečí neustály rozvoj a skvalitnenie ich priestorovej predstavivosti počas celého ich kognitívneho vývinu. Priestorová predstavivosť je úzko prepojená s technickými disciplínami a tvorí základ priestorovej geometrie. Nedostatočný rozvoj tejto schopnosti často vedie u žiakov stredných škôl k problémom a nejasnostiam pri štúdiu stereometrie a geometrie potrebnej pre technicky zamerané študijné odbory.

Vzhľadom na spomínaný trend považujeme za primárne výrazne posilniť vyučovanie matematiky z pohľadu riešenia rôznych geometrických úloh s prepojením na technickú prax. V publikácii sa preto venujeme danej téme s dôrazom na odborné vzdelávanie na Slovensku, ktoré pripravuje žiakov technických odborov na ich budúce povolanie. Sústredili sme sa najmä na to, či schopnosť žiakov predstaviť si priestorové objekty im pomáha pri riešení geometrických úloh, ktoré súvisia s ich štúdiom a zobrazovaním priestoru.

Uskutočnili sme k problematike tiež pedagogický výskum a jeho výsledky sú uvedené taktiež v predloženej publikácii. Na základe zistení boli navrhnuté zaujímavé didaktické materiály, ktoré využívajú moderné vyučovacie postupy a pomôcky, vrátane IKT prostriedkov. Navrhnuté originálne ukážky daných materiálov majú za cieľ posilniť výučbu matematiky na stredných školách technického zamerania vzhľadom na riešenú problematiku zobrazovania priestoru.

Na základe teoretických východísk, vlastných skúseností a získaných zistení sme sformulovali odporúčania a závery pre vyučovanie priestorovej geometrie. Veríme, že tieto návrhy budú prínosné a podnetné jednak pre učiteľov matematiky, ale aj odbornú verejnosť, obzvlášť vzhľadom na náročnosť danej témy.

Autori

Obsah

PREDSLOV	3
ÚVOD	7
1 PRIESTOROVÁ PREDSTAVIVOSŤ, MENTÁLNA ROTÁCIA A ICH ROZVOJ VO VYUČOVACOM PROCESE	9
1.1 VÝZNAM DIDAKTICKÝCH POMÔCOK A PROSTRIEDKOV IKT PRE VYUČOVANIE MATEMATIKY	13
1.2 VÝZNAM A VYUŽITIE PROSTRIEDKOV IKT VO VYUČOVACOM PROCESE	13
1.3 GEOMETRICKÉ MODELOVANIE A PROBLEMATIKA ZOBRAZOVANIA PRIESTORU	22
2 NIEKOTRÉ ZAHRANIČNÉ ŠTÚDIE A PROBLEMATIKA STREDNÉHO ODBORNÉHO VZDELÁVANIA OHĽADOM ZOBRAZOVANIA PRIESTORU	24
3 ZOBRAZOVANIA PRIESTORU VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH TECHNICKÉHO ZAMERANIA NA SLOVENSKU	28
3.1 ZOBRAZOVACIE METÓDY VO VYUČOVACOM PROCESE NA STREDNÝCH ODBORNÝCH ŠKOLÁCH TECHNICKÉHO ZAMERANIA ...	30
4 ZISŤOVANIE AKTUÁLNEHO STAVU PRIESTOROVEJ PREDSTAVIVOSTI ŽIAKOV STREDNÝCH ODBORNÝCH ŠKÔL S TECHNICKÝM ZAMERANÍM	37
4.1 ORGANIZÁCIA A PRIEBEH PEDAGOGICKÉHO VÝSKUMU	37
4.2 ANALÝZA VÝSLEDKOV ZÍSKANÝCH Z PEDAGOGICKÉHO VÝSKUMU	42
4.3 ZISTENIA Z PEDAGOGICKÉHO VÝSKUMU A ODPORÚČANIA PRE PRAX	52
5 IMPLEMENTÁCIA PROBLEMATIKY DO VYUČOVACIEHO PROCESU – AKTIVITY A ÚLOHY	56
5.1 ÚLOHY AKO MENTÁLNA ROZCVIČKA	56
5.2 ÚLOHY ZAMERANÉ NA VOĽNÉ ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE	60
5.3 ÚLOHY NA MODELOVANIE TELIES NA ZÁKLADE SLOVNÉHO OPISU	61
5.4 ÚLOHY A AKTIVITY NA PRIENIK DVOCH TELIES	63
5.5 ÚLOHY NA REZY KOCKOVÝCH TELIES A STAVIEB	65
5.6 METRICKÉ ÚLOHY A METÓDA „PRIDAJ KOCKU“	69
5.7 AKTIVITY SÚVISIACE S EXTREMÁLNYMI ÚLOHAMI	71
5.8 AKTIVITY SÚVISIACE SO SIEŤAMI KOCKY	75
5.9 STRECHY AKO STAVEBNÉ PLOCHY V ÚLOHÁCH	80
6 UKÁŽKY METODÍK PRE UČITEĽOV STREDNÝCH ODBORNÝCH ŠKÔL: VIZUALIZÁCIA PRIESTORU S VYUŽITÍM PROSTRIEDKOV IKT	83
6.1 ZOBRAZUJEME 3D DO 2D	83
6.2 HĽADÁME PRIENIKY LINEÁRNYCH ÚTVAROV V PRIESTORE	88
6.3 RÔZNE POHLADY NA REZY HRANATÝCH TELIES ROVINOU	94
ZÁVER	101
LITERATÚRA	103

Úvod

Predstavy, problémy a stratégie sú neoddeliteľnou súčasťou našich každodenných aktivít, či už ide o prechádzku v prírode, kresbu alebo prácu v záhrade, všetky si vyžadujú určitý spôsob myslenia a tvorivosť. Človek je tvorcom rôznych predstáv už od útleho detstva, pričom tieto predstavy sa s vekom a vplyvom vonkajších faktorov neustále menia a formujú, a tak sa stávajú nevyhnutnou súčasťou nášho života.

Pre vizualizáciu objektov sú modely užitočné, ich názornosť je často obmedzená a nepostačujúca na ich detailné zostrojenie. Na rozdiel od nich, zobrazovacie metódy poskytujú takú úroveň zobrazenia, ktorá je nevyhnutná k presnej konštrukcii daného objektu. Pomocou rôznych zobrazovacích metód môžu technici na technické výkresy zaznačiť komplexné údaje o objekte, a to nielen jeho priemet, ale aj tvar, veľkosť a iné dôležité vlastnosti zobrazovaného objektu. Priestorová predstavivosť je pre dané technické odvetvie nielen pomocníkom, ale aj dôležitým a potrebným nástrojom.

V predloženej publikácii skúmame aktuálnu problematiku stredného odborného vzdelávania na Slovensku, a to najmä v kontexte prípravy žiakov technicky zameraných odborov pre potreby praxe. Kladieme dôraz na preskúmanie súvislosti medzi priestorovou predstavivosťou žiakov technicky zameraných stredných odborných škôl a ich schopnosťou riešiť stereometrické úlohy, ktoré sú relevantné pre ich študijný odbor a zobrazovanie priestoru. K danej problematike bol vytvorený a realizovaný aj pedagogický výskum, ktorého výsledky sú taktiež prezentované v predloženej publikácii. Vzhľadom na získané výsledky boli navrhnuté a pripravené ukážok inovatívneho učebného materiálu s integráciou moderných vyučovacích metód a iných vyučovacích prostriedkov vrátane prostriedkov informačných a komunikačných technológií. Autorsky originálne návrhy didaktických materiálov sú určené na podporu vyučovania matematiky na stredných školách vzhľadom na problematiku zobrazovania priestoru.

1 Priestorová predstavivosť, mentálna rotácia a ich rozvoj vo vyučovacom procese

Priestorová predstavivosť je často spojená s vyučovaním geometrie a nie je to iba matematický alebo geometrický koncept. Ide o schopnosť vizualizovať a manipulovať s objektmi v trojrozmernom priestore, čo môže mať široké využitie aj mimo matematiky.

Klement (2005) podľa Dulovej (2017) uvádza, že priestorová predstavivosť sa môže stať nielen naším pomocníkom, ale i potrebným a užitočným nástrojom. Priaznivý vplyv na rozvoj našej priestorovej predstavivosti môže mať hranie rôznych didaktických hier na materských, základných a stredných školách. Tieto aktivity sú súčasťou vyučovacieho procesu matematiky, geometrie, techniky, fyziky, chémie a ďalších odborných predmetov. Zvlášť potrebná je priestorová predstavivosť pre profesie ako sú sochári, maliari, astronómovia, geodeti, stavbári, strojárí a pre množstvo ďalších odvetví, kde je schopnosť vizualizácie a manipulácie s trojrozmernými objektmi zásadná.

Brincková, Uherčíková a Vankúš (2013) uvádzajú, že psychológovia považujú priestorovú predstavivosť za dôležitý faktor pri zvládaní náročných životných situácií a dosahovaní úspechu. Táto schopnosť umožňuje jednotlivcom plánovať, riešiť problémy a vyrovnávať sa so stresom. Rozvoj priestorovej predstavivosti prispieva k osobnému rastu a adaptabilite, čo zvyšuje psychickú pohodu a podporuje dlhodobé ciele.

Priestorová predstavivosť je skúmaná z fyziologického, psychologického, ale i pedagogického hľadiska.

Parenčaj a Repáš (1985) podľa Dulovej (2017) definujú priestorovú predstavivosť ako akési videnie priestoru a to musí predsa vidieť každý, kto vidí. Problém spočíva v tom, že nestačí priestor len vidieť, ale je dôležité si ho aj uvedomovať. Pod priestorovou predstavivosťou Molnár (2004) rozumieme tiež schopnosť predstavovať si vlastnosti geometrických trojrozmerných predmetov, ich tvar (podoba telies), polohu, veľkosť a umiestnenie v priestore.

Linn a Petersen (1985) definujú priestorovú predstavivosť ako schopnosť reprezentovať, transformovať, generovať a vybavovať si symbolické, nejazykové informácie. Táto schopnosť zahŕňa mentálne procesy spojené s vnímaním, ukladaním, vyvolávaním, vytváraním, úpravou a komunikovaním priestorových obrazov.

Šedivý a Rumanovská (1988) uvádzajú tri formy priestorovej predstavivosti, toto delenie uvádzame v Tabuľke 1.

Tabuľka 1. Formy priestorovej predstavivosti (Šedivý a Rumanovská, 1998)

najnižšia forma – priestorová predstavivosť všeobecná alebo intuitívna	
	rozumie sa schopnosť predstavovať si: • skôr videné (vnímané) objekty v trojrozmernom priestore a vybaviť si ich vlastnosti, polohu a priestorové vzťahy, • skôr alebo v danom momente videné (vnímané) objekty v inej vzájomnej polohe, než v akej boli v skutočnosti vnímané, • objekty v priestore na základe ich rovinného obrazu, • neexistujúci reálny objekt v trojrozmernom priestore na základe jeho slovného opisu.
vyššia forma – geometrická predstavivosť	
	je to schopnosť: • abstrahovať z reálnej skutočnosti, teda z konkrétnych objektov, ich geometrické vlastnosti a vidieť v ich modely geometrických útvarov, • schopnosti mať zásoby predstáv geometrických útvarov a schopnosť vybavovať si ich najrôznejšie podoby a polohy, • schopnosť predstavovať si geometrické útvary a vzťahy medzi nimi na základe ich jednoduchých modelov, či predstavovať si geometrické útvary v najrôznejších vzájomných vzťahoch, a to aj v takých, v ktorých nemôžu byť predvedené pomocou hmotných modelov geometrických útvarov (napr. prienik dvoch telies).
najvyššia forma – priestorové a geometrické (priestorové schematické) myslenie	
	je to schopnosť na základe priestorových a geometrických predstáv: • vyvodiť závery, prípadne vytvoriť si nové predstavy, vedieť takéto nové predstavy vyjadriť alebo ich aj realizovať, • myšlienkovu konštruovať priestorové obrazy (geometrické útvary), robiť s nimi operácie a vedieť také operácie vyjadriť, prípadne ich realizovať,

	vyjadriť graficky, diagramom, grafom alebo iným spôsobom (nejakou geometrickou schémou) v realite existujúce vzťahy a závislosti, vlastnosti rôznych matematických objektov, pojmov a javov a vzťahy závislosti medzi nimi, prípadne vedieť vyjadriť prebiehajúci dej.
--	--

Z pohľadu nami riešenej problematiky je podstatná geometrická predstavivosť.

Molnár (2004) chápe geometrickú predstavivosť súbor schopností týkajúcich sa reprodukčných, anticipačných, statických i dynamických predstáv o tvaroch, vlastnostiach a vzájomných vzťahoch medzi geometrickými útvarmi v priestore.

Dušek (1964) sa zase o geometrickej predstavivosti zmieňuje ako o predstavivosti s geometrickým obsahom a zároveň pokračuje, že je dôležité, aby si žiak vedel útvar nielen predstaviť, ale aby ho vedel tiež v mysli analyzovať, dopĺňať a pretvárať.

Francová (1991) definuje geometrickú predstavivosť ako schopnosť predstaviť si geometrické tvary, ich veľkosť, polohu v priestore a charakteristické vlastnosti a tiež schopnosť predstaviť si daný útvar v inej polohe ako v pôvodnej. Ďalej o geometrickej predstavivosti píše ako o schopnosti predstaviť si zmenu tvaru, veľkosti, štruktúry a ďalších vlastností daného útvaru. Uvádza, že je to „schopnosť predstaviť si útvary v priestore na základe ich slovného opisu a taktiež schopnosť predstaviť si zobrazenie daného priestorového útvaru rovinným obrazom.

Kuřina (1987) ju považuje za istú zložku názorného myslenia, ktorá spočíva v zručnosti vybavovať si geometrické útvary a ich vlastnosti (Tomková, Lukáčová, Bánesz a Rumanová, 2014).

Priestorová predstavivosť má podľa Maiera (1998) päť zložiek, prehľad opísaných zložiek priestorovej predstavivosti zahŕňajúcimi statické a dynamické mentálne procesy a polohu participanta uvádzame v Tabuľke 2.

Tabuľka 2. Zložky priestorovej predstavivosti (Maier, 1998)

Priestorová poloha participanta	Dynamické mentálne procesy	Statické mentálne procesy
Vonkajšia pozícia	Vizualizácia	Priestorové vzťahy
	Mentálna rotácia	Priestorové vnímanie
Vnútna pozícia	Priestorová orientácia	

Zložky priestorovej predstavivosti diferencovali Linn a Petersen (1985) v metaanalýze priestorovej predstavivosti a považovali mentálnu rotáciu za obzvlášť dôležitú zložku

priestorovej predstavivosti, pričom bola zreteľne oddelená od vizualizácie a priestorového vnímania.

Mentálnou rotáciou sa zaoberali aj iní autori. Pavlovičová (2010) mentálnu rotáciu opisuje ako schopnosť rýchlo a presne si predstaviť vzhľad dvoj a trojrozmerných útvarov rotujúcich v priestore. Gurny (2003) ju definuje ako schopnosti mentálne otáčať objekt v priestore a Ferguson (2008) napríklad uvádza, že mentálna rotácia je schopnosť rýchlo a presne mentálne otáčať dvoj alebo trojrozmerný útvar.

Rôzni autori sa o zmieňujú vo svojich publikáciách o možných príčinách a faktoroch nízkej úrovne priestorovej predstavivosti žiakov na rôznych typoch škôl. Ako uvádzajú Molnár, Perný a Stopenová (2006) možné príčiny nedostatočnej úrovne priestorovej predstavivosti u žiakov, študentov a pracujúcich v technickej oblasti sú:

- nedostatočná dotácia vyučovacích hodín, počas ktorých by bolo možné formovať priestorovú predstavivosť (výrazne poklesol počet vyučovacích hodín geometrie, stereometrie, topografických prác v teréne, vo vyučovacom procese chýbajú aplikačné stereometrické úlohy, alebo ubudli alebo zanikli vyučovacie predmety, počas ktorých by sa rozvíjala priestorová predstavivosť najefektívnejšie),
- nedostatočná pripravenosť učiteľov matematiky z pohľadu ich prípravy a skúseností k problematike rozvoja priestorovej predstavivosti žiakov (pre učiteľov matematiky nie je k dispozícii dostatok odbornej a kvalitnej metodologickej literatúry v spomínanej oblasti),
- nerešpektovanie požiadaviek pedagogickej psychológie (pri rozvíjaní priestorovej predstavivosti je dôležité zohľadňovať cieľavedomosť, sústavnosť a komplexnosť a taktiež využívať prirodzené praktické skúsenosti a predispozície ontogenetického vývoja žiakov, alebo chýba relatívna náročnosť vytvárania podmienených reflexov na priestorové podnety podobne ako aj získavanie vedomostí o priestore),
- nedostatočná aplikácia metód priestorovej predstavivosti počas vyučovania matematiky vrátane nepostačujúceho precvičovania konštrukčných úloh a nedostatočného dohliadania na grafický prejav žiakov,
- vhodnosť využívania moderných metód a technických prostriedkov, ktoré tvoria dôležitú súčasť výchovy a vzdelania vrátane multimediálnych prezentačných programov, grafických programov a taktiež dynamických geometrických softvérov,
- vynechanie alebo presunutie stereometrického učiva na základe vlastného uváženia vyučujúceho.

1.1 Význam didaktických pomôcok a prostriedkov IKT pre vyučovanie matematiky

Priestorovú predstavivosť možno u žiakov rozvíjať rôznymi aktivitami alebo podnetnými úlohami, didaktickými učebnými pomôckami, ale aj implementovaním prostriedkov informačných a komunikačných technológií (ďalej IKT). Možnosťou je teda zaradiť do vyučovacieho procesu rôzne didaktické hry, stavebnice alebo hlavolamy.

Ako uvádza Příhonská (2014) podnecujúce prostriedky v procese učenia sú veľmi užitočné a v mysli žiaka vyvolávajú komplexné psychologické procesy. Tieto prostriedky cvičia viaceré zručnosti, ako sú predstavivosť, pamäť, schopnosti kombinovania, logického myslenia a strategického úsudku. Na jednej strane podporujú rozvoj tvorivého, konštruktívneho a originálneho myslenia. Na druhej strane, hlavolamy a podobné cvičenia posilňujú aj schopnosť sústrediť sa a zvyšujú vytrvalosť a trpezlivosť žiaka. Tieto zručnosti sú kľúčové pre úspešné učenie a celkový osobnostný rozvoj.

Pre vyučovací proces matematiky uvedieme ukážky najvhodnejších didaktických pomôcok, stavebníc alebo hlavolamov, ktoré rozvíjajú priestorovú predstavivosť žiakov, napríklad Polydron, stavebnica Geomag alebo Tangram. Brincková, Uherčíková a Vankúš (2013) uvádzajú, že pri používaní didaktických hier vo vyučovaní matematiky je kľúčové správne vybrať hru a zvoliť vhodnú metodiku na jej použitie. Je potrebné stanoviť vzdelávací cieľ, ktorý chceme dosiahnuť. Na jeho základe vyberieme didaktickú hru, pričom zohľadníme primeranosť hry pre žiakov podľa veku, vyspelosti a záujmov. Výber hry ovplyvňuje aj jej organizačná a realizačná náročnosť, ktorá závisí od požiadaviek na učiteľa ako organizátora a kontrolóra, ako aj od náročnosti úkonov, ktoré sa očakávajú od žiakov. Ideálna hra rozvíja vedomosti, schopnosti, zručnosti a pozitívne osobnostné črty žiakov. Jej zaradenie do vyučovania zvyšuje jeho efektívnosť oproti vyučovaniu bez využitia tejto hry. Súčasne podporuje pozitívny postoj žiakov k matematike a motivuje ich k ďalšiemu vzdelávaniu a rozvoju.

1.2 Význam a využitie prostriedkov IKT vo vyučovacom procese

Význam slovného spojenia informačno-komunikačné technológie pochádza z prekladu anglického názvu *Information and Communication technologies* a možno ho charakterizovať ako „metódy, postupy a spôsoby zberu, uchovania a spracovania, overovania, vyhodnocovania, selekcie, distribúcie a včasného doručenia potrebných informácií vo vyžadovanej forme a kvalite“ (Stoffa a Stoffová, 2017).

Treba si uvedomiť, že podľa Poláka (2016) technológie:

- informačné sú také technológie, ktoré fungujú na báze dvoch komponentov: hardvéru a softvéru,
- komunikačné sú zase technológiami, na základe ktorých si počítače vymieňajú dáta medzi sebou.

Ak sa sústredíme na implementáciu IKT do vyučovania matematiky, potom vhodnejšia je charakteristika podľa Kalaša (2001): *„Pod pojmom informačné a komunikačné technológie rozumieme výpočtové a komunikačné prostriedky, ktoré pomáhajú pri výučbe, štúdiu i vzdelávaní, pri práci a všeobecne v živote. Patrí k nim počítač, Internet, e-mail, mobilný telefón, kalkulačka, elektronický diár a podobne.“*

IKT sú dnes už neoddeliteľnou súčasťou života jedinca a fungovania spoločnosti. Aktuálne disponibilné množstvo materiálnych, technických a technologických prostriedkov si však vyžaduje uvážený a kritický prístup k paradigme súčasného vzdelávania pomocou IKT. Samotné použitie IKT vo vzdelávaní je podmienené dvomi základnými faktormi:

- celkovou dostupnosťou zdrojov IKT,
- aktuálnymi požiadavkami spoločnosti, komunity, či jedinca.

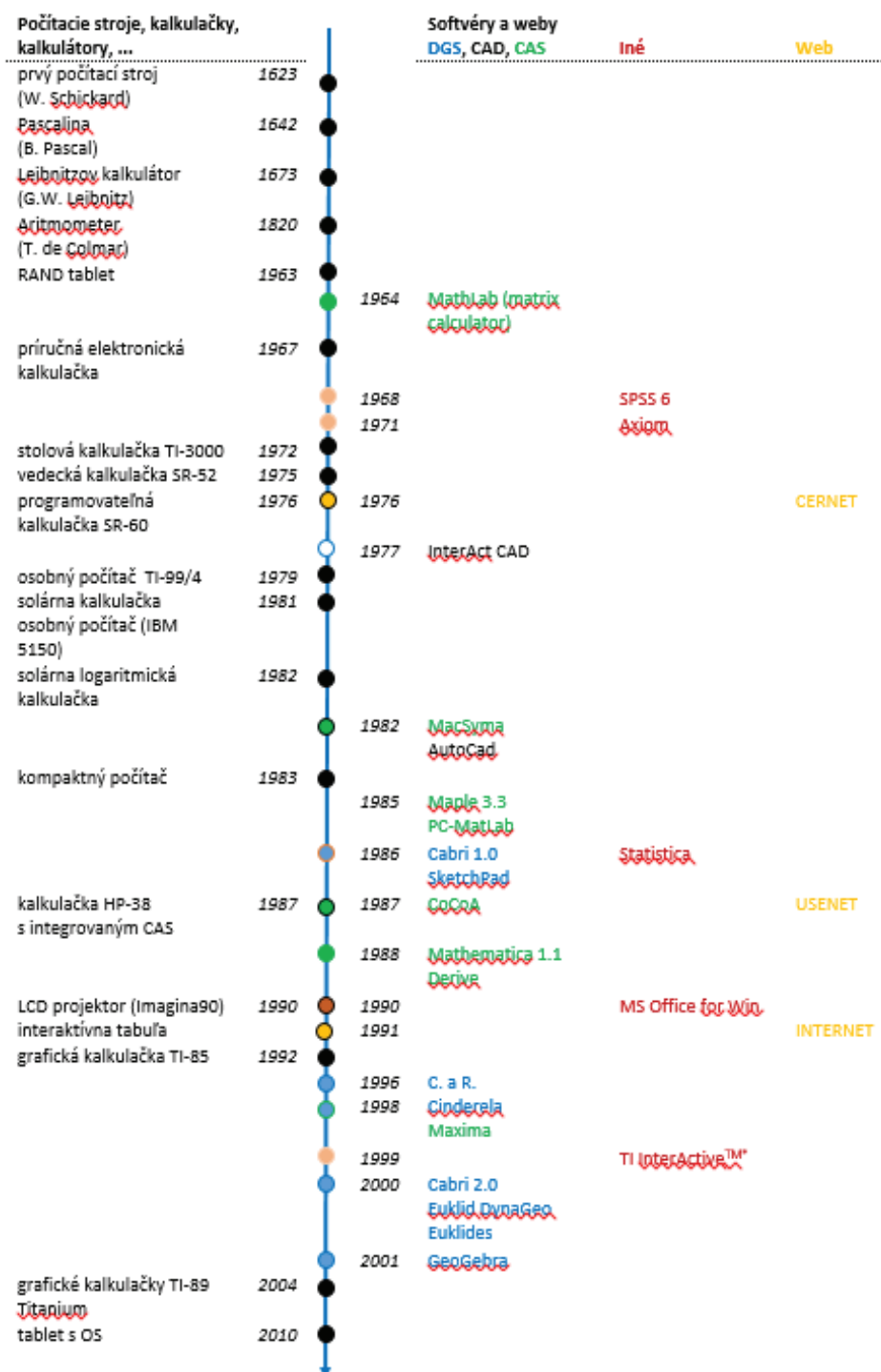
Nutnou podmienkou implementácie IKT do vzdelávania v matematike a výučby školskej matematiky, sú podmienky, v akých sa výchovno-vzdelávací proces realizuje. Možno ich rozdeliť na:

- hardvérovo-softvérové – pod ktorými rozumieme vhodné a dostupné technické vybavenie škôl, učiteľov a žiakov (prenosné zariadenia ako kalkulačky, mobilné telefóny a smartfóny, tablety, počítače, učebne, tabule, ..., vhodné edukačné, pedagogické a iné matematické softvéry, e-materiály na výučbu, video-konferenčné platformy, pripojenie do siete, ...),
- kompetenčné – charakterizované kompetenciami a odbornou pripravenosťou učiteľov na používanie IKT,
- kurikulárne – predstavujúce legislatívny rámec a požiadavky spoločnosti na absolventov v závislosti od aktuálnych školských reforiem a transformácií školstva.

Polák (2016) k základným technickým prostriedkom IKT používaným v školskej matematike zaraďuje:

- kalkulátory (jednoduché, vedecké, programovateľné, grafické),
- počítače (informatika x matematika = výučba o počítačoch x výučba pomocou počítača),
- Internet (e-trendy vo vzdelávaní, ..., digitálne knižnice, online výpočty, ...).

Časovú os stručného historického vývoja týchto prostriedkov uvádza Obr. 1.



Obr. 1 Historický prehľad technických prostriedkov pre IKT vo vyučovaní matematiky

Použitie kalkulačiek je dnes už didakticky i technologicky prekonaný fenomén. Treba objektívne uviesť, že v čase ich nástupu do výučby matematiky znamenali výrazný pokrok a zvyšovali efektivitu výučby najmä z časového hľadiska (automatizácia náročných numerických výpočtov, aktivizácia žiakov a súčasne na ich použitím sa prístup k matematickému obsahu čiastočne sformalizoval. Detailnú analýzu implementácie kalkulačiek do vzdelávania v oblasti školskej matematiky čitateľ nájde v publikácii Fulier a kol. (2007).

Ako sme už naznačili, použitie počítačov v škole má dve stránky. Výučba o počítačoch predstavuje informatickú stránku IKT, ktorej nevenujeme pozornosť.

Naproti tomu, výučba pomocou počítača je kľúčovou pre implementáciu IKT do vyučovacieho procesu. V zahraničnej literatúre je výučba pomocou počítača označovaná pojmom Computer Based Education (skr. CBE) a rozdeľuje sa:

- Computer Aided Instruction (skr. CAI),
- Computer Aided Learning (skr. CAL), ktorými sa rozumie použitie počítača ako podporného prostriedku pre učiteľa na výklad, vizualizáciu a precvičovanie učiva, či testovanie vedomostí,
- Computer Managed Instruction (skr. CMI),
- Computer Managed Learning (skr. CML), čím sa chápe použitie počítača ako administratívneho prostriedku zabezpečujúceho zadávanie úloh, testov, evidenciu študijných výsledkov, ...

V súvislosti s CBE sa pojem IKT zvykne nahrádzať pojmom digitálne technológie (ďalej len DT). Tým sa viac zdôrazňuje význam týchto technológií pre konštrukčný aspekt poznávacieho procesu. Poukazuje sa na skutočnosť, že okrem informačného média má učiteľ k dispozícii konštrukčné médium, pomocou ktorého učí žiakov tvorivo skúmať, objavovať, vyjadrovať sa a rozvíjať kritické myslenie (Kalaš, 2013). Ako synonymum k pojmu digitálne technológie sa používa aj pojem kognitívne technológie: *„Řekneme, že počítačové kognitivní technologie jsou jistou podmnožinou technologií informačních a komunikačních (ICT) a tento termín je zaveden jako užitečný, aby odlišil používání ICT při výuce od takového typu počítačových aplikací, které přispívají k vlastnímu učení, k poznání. Jestliže např. žáci použijí e-mail k odevzdání svého úkolu z matematiky nebo k vyhledání informací o nějakém matematickém problému na Internetu, jde jistě o použití ICT ve výuce, ale nikoliv o použití takové, při němž se žáci zdokonalují v matematických dovednostech a při němž se bystří jejich matematické uvažování.“* (Vaníček, 2013).

Digitálne technológie ponúkajú široké možnosti iného, moderného učenia sa, odovzdávania vedomostí a zručností. Sú hybnou silou, ktorá postupne pretvára tradičnú školu a jej výchovno-vzdelávací proces na školách. Podporujú vzájomnú kooperáciu žiakov, súťaživosť, zodpovednosť, komunikáciu, pozorovanie, kritické

myslenie, či tímovú prácu (Polakovič, Vránová, 2016). Komplexný prehľad v integrácii DT do vyučovacieho procesu možno nájsť v (Koreňová, 2015).

Do vyučovacieho procesu teda vstupujú rôzne technológie a pomerne významný vplyv na jeho kvalitatívnu zmenu majú pedagogické softvéry. Ide o druhy počítačových programov a aplikácií, ktoré umožňujú najmä tvoriť, skúmať a objavovať. Podľa (Slavičková, 2006) má pedagogický softvér podporovať aktivity:

- rozvíjajúce myslenie na základoch konštruktivismu,
- na upevňovanie vedomostí (etapa kryštalizácie a automatizácie poznávacieho procesu),
- smerujúce k rozvoju tvorivosti,
- vedúce k modelovaniu a simuláciám.

Kalaš (2013) uvádza: *„Na kvalitný pedagogický softvér sa môžeme pozerieť ako na „múdry papier“ (na ploche obrazovky). Nerieši za nás problémy, pomáha nám však experimentovať, manipulovať s objektmi, objavovať vzťahy a zákonitosti, skúmať a konštruovať. Konštruovať niečo, a tak konštruovať naše poznanie.“*

Mnoho softvérov vieme označiť prívlastkom pedagogické. Ak sa upriamime na vyučovanie matematiky a obzvlášť geometrických disciplín, potom uvedenú charakteristiku spĺňajú najmä softvéry označované ako:

- dynamické geometrických programy (Dynamic Geometry System, skr. DGS), napríklad Cabri II Plus, Cabri 3D, GeoGebra,
- matematické programy typu CAS (Computer Algebra System, skr. len CAS), napríklad Derive, Maple, Mathematica,
- mikrosveti (microworlds) – výučba algoritmov a alternatívny prístup ku geometrii, napríklad Logo, Imagine,
- tabuľkové procesory – kancelárske aplikácie na hromadné spracovanie dát, napríklad MS Office Excel, OpenOffice Calc,
- uzatvorené výučbové prostredia – výučbové programy na výklad a precvičovanie konkrétnych tém alebo tréning vybraných kompetencií, napríklad Building Houses, Veveričky (a siete kocky).

Rozvojom výpočtovej techniky v 20. storočí nastúpila vlna zmien a modernizačných prúdov, ktoré ovplyvnili celkový vývoj spoločnosti. S postupným zdokonaľovaním hardvérových podmienok sa rozvíjali aj softvérové možnosti, ktoré prirodzene prenikli aj do škôl a samotného výchovno- vzdelávacieho procesu.

Označením dynamické geometrické programy (ďalej len DGS) sa myslí na osobitné interaktívne programy určené ku štúdiu, výučbe a experimentovaniu v geometrii.

Polák (2016) vo všeobecnom prístupe k IKT, interaktivita znamená vzájomnú aktivitu medzi technologickým (technickým) zariadením a jeho užívateľom. Podľa Žilkovej (2009) sa pod pojmom interaktivita vníma možnosť okamžitej reakcie na podnet. V zmysle zavedenia pojmu interaktivita, interaktívny softvér je program, ktorý umožňuje užívateľovi meniť vstupy.

Ak ide o program zameraný na geometriu, hovoríme o interaktívnom geometrickom softvéri (ďalej len IGS). Geometrických programov, ktoré možno charakterizovať ako interaktívne, je mnoho.

Csiba, Vallo (2002) vymedzujú tieto spoločné znaky IGS:

- ľahká ovládateľnosť programu,
- široká použiteľnosť,
- prostredie analogické s geometrickou podstatou,
- interaktívna odozva geometrického modelu na zmenu vstupu.

Ukážkou čisto IGS je známy softvérový produkt AutoCAD (softvér typu CAD, computer-aided design), ktorý bol vyvinutý ako profesionálny program pre technické odbory na vzájomnú grafickú komunikáciu (tvorba technickej dokumentácie). Vaníček (2009) uvádza: „... interaktívna geometria je všeobecnejšia než geometria antiky, pretože modely geometrických konštrukcií hoci simulujú tradičné konštrukčné postupy, sú nositeľmi predovšetkým vzťahov – incidencie, usporiadania, polohových a metrických vlastností. Prítomnosť takýchto väzieb je kritériom, či nejaký softvér je, alebo nie je, vhodný pre výučbu. Napr. systémy CAD alebo grafické editory (Photoshop, Corel) umiestňovaním geometrických útvarov na plochu, bez väzieb na ďalšie objekty nemožno považovať za DGS.“

Programy typu CAD sa podstatne odlišujú od interaktívnych geometrických programov, ktoré označujeme ako dynamické. Tie sa označujú v skrátenej tvare ako DGS (z ang. Dynamic Geometry Software).

Ide o kategóriu pedagogických softvérov, medzi ktoré patria napr.: The Geometer's SketchPad, Cabri II Plus, Cabri 3D, Cinderella, či GeoGebra. DGS umožňujú konštruovať geometrické útvary, pričom dynamická geometrická konštrukcia nesie v sebe informáciu geometrickej povahy. Nejde len o súpis, či množinu geometrických útvarov. Ako nový prostriedok dovoľujú:

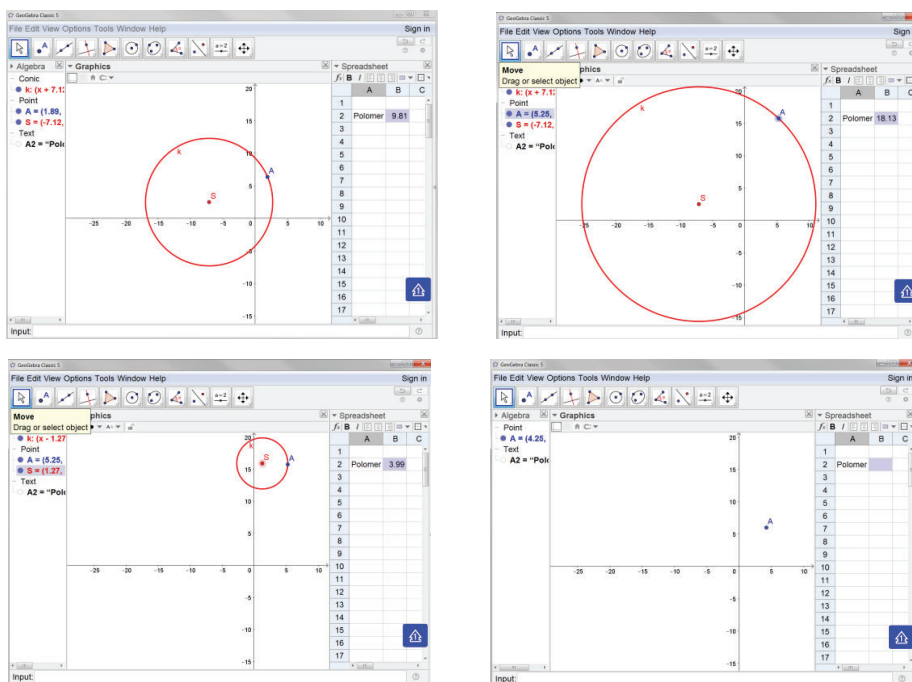
- objavovať geometriu v „pohybe“,
- experimentovať,
- odhadovať,
- skúmať vlastnosti geometrických útvarov,

a to všetko v intenciách zachovania relácie incidencie, zhodnosti, či vybraných metrických vlastností útvarov (Vallo, 2016).

Podstata dynamickej konštrukcie je založená na:

- dynamike v reálnom čase,
- „rodičovskom princípe“.

Vysvetlíme na príklade (Obr. 2). Ak sú v nákrese zvolené dva body S , A , kružnica $k(S, SA)$ sa zostrojí pomocou konštrukčného nástroja typu „kružnica určená stredom a bodom“. Zmenou pozície bodu S , resp. A sa krivka aktuálne prekreslí. Ak vymažeme bod S , „dedičná“ konštrukcia kružnice k ako krivky od neho závislé sa vymaže taktiež.



Obr. 2 Popis príkladu v GeoGebre

DGS štandardne obsahujú:

- základné konštrukčné nástroje (na zadávanie bodov, zostrojovanie priamok, kružníc, ... ; konštrukcie kolmíc, rovnobežiek, geometrických miest bodov, ... ; kužeľosečiek, ...),
- nástroje pracujúce so zobrazeniami,
- možnosť realizácie výpočtov a merania,
- nástroje na animáciu,
- vkladanie textu,

- nástroj Pohyb (ang. Move, resp. Drag) umožňujúci zmenu lokalizácie objektov a ich atribútov,
- osobitné procedúry (makrokonštrukcie, vkladanie číselných vstupov),
- nástroje na zmeny atribútov objektov (formátovanie ako farba, štýl a hrúbka čiar, ..., skryť/ukázať objekt).

Pôvodné verzie DGS sú dnes obohatené o funkčne iné – doplňujúce a podporné prostredia, napr. najbežnejšie používaný softvér GeoGebra má okrem dvoch rovinných nákresní aj CAS prostredie, 3D okno, algebrické okno, tabuľkové prostredie, príkazový riadok a kalkulátor pravdepodobnosti a to sú jednotlivé prostredia navzájom prepojené. Tým dosahuje novú kvalitu s významným vplyvom na vyučovanie. Je teda opodstatnené aj zavedenie novšieho označenia – dynamické geometrické prostredie (skr. DGE z ang. „dynamic geometry environment“).

S postupným začleňovaním počítačov do výučby matematiky sa vynorilo niekoľko netriviálnych didaktických otázok a problémov, ktoré bolo potrebné zodpovedať a uspokojivo vyriešiť. Vďaka vizualizácii máme pred sebou „novú“ formu školskej geometrie.

Ak vychádzame z intuície a snahy o čo najnázornejšie sprostredkovanie geometrického poznatku, potom sa v DGE bežne operuje so slovnými spojeniami typu:

- „označiť bod“ (tým sa nemyslí na pomenovanie bodu),
- „uchopiť bod (resp. iný útvar)“,
- „premiestniť bod“,
- „pevný bod“, či „voľný bod“,
- „zafarbiť bod“, „zmeniť štýl bodu“,

V klasickom ponímaní výučby geometrie tieto „terminologické“ spojenia nemohli vzniknúť, pretože odporujú axiomatickému ponímaniu nedefinovaného pojmu bod. Ide však o virtuálne manipulácie so zobrazovanými útvarmi na pracovnej ploche (obrazovke PC), ktoré činia DGS tým, čím sú.

Slovenská matematická terminológia nepozná vhodné pomenovanie tohto javu a v odbornej literatúre sa autori s touto ťažkosťou vyrovnávajú rôzne:

- fenomén zostáva nepovšimnutý,
- niektorí autori zavádzajú nový pojem tzv. „práca s geometrickou premennou“ (Jodas, Koreňová, 2002),
- iní používajú slovné spojenia ako „pohyblivosť bodu“, „pohyb bodu“ bez ďalšieho vysvetľovania (Žilková, 2009).

Zastávame názor, že nie je nutné zavádzať vyššie uvedené interpretácie. Uvedomíme si, že každý geometrický útvar je v DGE zadaný analyticky. Počítačový hardvér dokáže

polohu a tvar týchto geometrických útvarov (pre človeka v reálne vnímanom čase) prepočítať, prekresliť, či inak vhodne vizualizovať. Z matematického hľadiska ide o zmenu parametrov definujúcich jednotlivé útvary.

Myšlienka parametrizácie geometrických útvarov nie je nová. Napríklad už v učebnici Riečan B., Bero P., Smida J., Šedivý J. (1987): Matematika pre 4. ročník gymnázia, SPN Bratislava sa na str. 233 v kapitole Konštrukčné úlohy s jedným parametrom uvádza: *„Ak vystupuje v definícii geometrického útvaru nejaký číselný údaj, napríklad veľkosť úsečky alebo uhla, môžeme ho zvoliť za číselný parameter s určitým oborom; získame tak parametrický systém útvarov. ... Pri riešeníach konštrukčných úloh s parametrami sú nevyhnutné diskusie o vzájomnej polohe jedného útvaru (priamky, polpriamky, kružnice a pod.) a parametrického systému útvarov.“*

Parametrizácia konštrukcií v DGE ponúka dve významné príležitosti:

- prekonáva zaužívaný, časovo náročný a prácny spôsob realizácie konštrukcií – napríklad v tradičnej výučbe (papier, pravítko, kružidlo, ceruzka) bolo žiakom pri riešení úloh vedúcich k vyšetrovaniu množiny bodov danej vlastnosti odporúčané, aby najprv urobili odhad tvaru výslednej krivky; ten mali získať tak, že si na papier skonštruovali niekoľko špecifických prípadov,
- parametrizácia umožňuje žiakom/študentom realizovať experimenty – čím sa rozvíja schopnosť argumentácie a výrazne rozširuje „zásoba geometrických predstáv“ (myslíme analógiu slovnej zásoby, ktorú získava človek napr. čítaním kníh).

Pri parametrizácii konštrukcií sa stretneme aj s didaktickými nezrovnalosťami:

- nastavujú sa vždy hodnoty z určitého intervalu – táto nedokonalosť môže byť súčasne aj výhodou; za účelom dynamiky konštrukcie je niekedy nutné „povoliť“ aj taký rozsah intervalu, ktorý je z hľadiska definície konštruovaného útvaru „zbytočný“, napr. pre veľkosť vnútorného uhla v trojuholníku z intervalu $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$,
- taktiež treba poznamenať, že „nadmerná“ parametrizácia konštrukčnej úlohy (príliš veľa parametrov v jednej úlohe) môže predstavovať iný didaktický problém – napríklad, ak sa v diskusii o počte riešení úloha začína „nebezpečne vetviť na osobitné prípady“, následne je problematické vykonať kompletný rozbor úlohy, nakoľko nie vždy dokážeme odvodiť vzťahy medzi parametrami, resp. vyjadriť podmienku riešiteľnosti úlohy vo všeobecnom prípade.

Vždy záleží však na konkrétnej úlohe, poznatkoch žiakov a času, ktorý je k dispozícii na vyučovacej hodine.

1.3 Geometrické modelovanie a problematika zobrazovania priestoru

Geometrické modelovanie patrí medzi demonštračné vyučovacie metódy a je vhodné na rozvoj priestorovej predstavivosti žiakov. Modelovanie je teda metóda poznávania vo vyučovacom procese a má nezastupiteľné miesto vo vyučovaní geometrie. Konštatujeme, že geometria je tou najvhodnejšou časťou matematiky, kde je jej využitie ohľadom prepojenia s bežným životom, a teda s realitou, opodstatnené. Základ metódy tvorí manipulácia, ale aj pozorovanie konkrétnych predmetov, modelov či rôznych javov. Žiaci podľa návodu učiteľa zvyčajne spoznávajú, respektíve pozorujú predmety, javy, poprípade ich obrazy alebo modely. Táto metóda využíva aj názorné pomôcky alebo pokusy (Kořínek, 1987).

Demonštračná metóda patrí medzi expozičné vyučovacie metódy, konkrétne patrí do skupiny metód sprostredkovaného prenosu poznatkov. Prostredníctvom tejto metódy si žiak vytvára prvotné poznatky a vedomosti, osvojuje si ich činnosťou, pričom sa rozvíja aj ich samostatné uvažovanie a individualita. Uvedená metóda je z pohľadu žiaka náročná na sústredenie sa a udržanie ich pozornosti, pričom je často doplnená učiteľom aj o jeho vysvetľovanie a rozhovor.

Pojem modelovanie znamená, že navrhujeme, tvoríme a tiež používame modely. Zahŕňa to rôzne činnosti, pri ktorých modely buď vytvárame, alebo ich využívame. Žiaci sa môžu zapojiť do vyučovania tým, že si vytvárajú vlastné modely. Takýmto spôsobom lepšie pochopia rôzne geometrické pojmy a ich vlastnosti. Okrem toho to motivuje žiakov ku geometrickému poznávaniu a zároveň posilňuje ich vnímanie. Pomocou modelov sa žiaci sústreďujú na poznávanie dôležitých vlastností geometrických útvarov, ktoré skúmajú. Modelovanie tak posilňuje ich geometrické myslenie. Model nie je len niečo, na čo sa pozerajú – žiaci s ním môžu manipulovať a aktívne ho použiť pri riešení rôznych úloh a geometrických problémov.

Vo vyučovacom procese model funguje ako nástroj, ktorý nám pomáha spoznávať a získavať konkrétne informácie o danom objekte. Je dôležitý, pretože slúži ako konkrétny príklad alebo predloha, vďaka ktorej môžeme objavovať vlastnosti javu alebo procesu, ktorý skúmame. Cieľom využívania modelov je najmä spredmetniť predstavy o pojmoch, vzťahoch alebo procesoch (Židek, 2013).

Modelovanie v matematike rozvíja u žiaka kľúčové kompetencie, a teda schopnosť riešiť problémy z pohľadu vytvárania hypotézy, navrhovania postupy riešenia problému, zvažovania rôznych možností riešenia daného problému, rozvíjania schopnosti overiť hypotézu reálnou činnosťou u žiaka, kriticky myslieť, ale rozvíja aj tvorivosť daného žiaka (Ľubová, 2013).

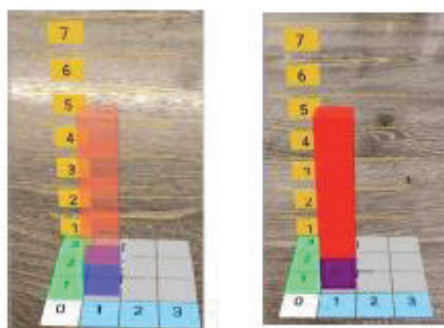
Geometrické modelovanie ako uvádza Rumanová, Laššová a Drábeková (2022) je vhodné pre žiakov mladšieho školského veku, ale vzhľadom na fakt, že žiaci riešia praktické problémy v každom veku a využívajú rôzne geometrické poznatky, tak aj tam má toto modelovanie svoje miesto. Učitelia geometrie majú príležitosť využívať bádateľské a tvorivé metódy výučby. Pre žiakov je v geometrickom vzdelávaní kľúčové praktické uplatnenie názornosti v kombinácii s tvorivými a inovatívnymi prístupmi. Takýmto prístupom sa aktivuje myslenie žiakov. Vytvára sa im priestor na diskusiu, učia sa formulovať problémy, aplikovať svoje poznatky pri riešení ďalších úloh a následne formulovať závery. Ide teda o aktívne učenie, ktoré podporuje rozvoj kritického myslenia u každého jednotlivca.

Uvedieme ukážku aktivity, v ktorej je využité modelovanie s využitím rozšírenej reality v Colette web portáli. Vyberáme ukážku úlohy, kde má riešiteľ postaviť stavbu z kociek na základe ukladania kociek na správnu pozíciu. Pri riešení tohto typu úloh sa v rozšírenej realite zobrazuje daná stavba z kociek, ktorú má riešiteľ kódovaním postaviť.

Zadanie úlohy

Vytvorte stavbu z kociek, ktorá je tvorená piatimi na sebe uloženými kockami, pričom súradnice základnej kocky sú $[1,1,1]$. Kocky ukladajte na správne pozície, aby ste vytvorili zadané teleso.

V úvode riešenia úlohy sa zobrazí riešiteľovi testovací pohľad, a ak je úloha správne vyriešená, tak sa jednotlivé kocky stavby v tomto pohľade zobrazia v plnej farbe (Obr. 3).



Obr. 3 Riešenie úlohy v Colette

2 Niektoré zahraničné štúdie a problematika stredného odborného vzdelávania ohľadom zobrazovania priestoru

Problematika zobrazovania priestoru a rozvoja priestorovej predstavivosti sa aktuálna téma je v zahraničnej literatúre. Uvádzame najzaujímavejšie štúdie.

Kayhan (2005) uvádza štúdiu s názvom „Investigation of high school students' spatial ability“, ktorej sa zúčastnilo 251 žiakov študujúcich na rôznych stredných odborných školách v Beypazari (Ankara, Turecko). Výskumníci použili dva testy „Test priestorových schopností (orig. názov testu je Spatial Ability Test)“ a „Skupinový test logického myslenia (orig. názov testu je Group Test of Logical Thinking) ako výskumné nástroje podľa (Ekstrom and Harman, 1976). Skúmaný bol vplyv strednej školy na:

- priestorové schopnosti žiakov,
- vzťahy medzi výsledkami v matematike,
- vzťahy medzi schopnosťami logického myslenia a priestorovými schopnosťami,
- technické kreslenie z pohľadu rozvoja priestorových schopností.

Autor konštatuje, že typ strednej školy nemá významný vplyv na priestorové, vizualizačné ani orientačné schopnosti žiakov, ale existuje významný pozitívny vzťah jednak medzi priestorovými schopnosťami a úspešnosťou v matematike, na druhej strane medzi schopnosťou priestorovej vizualizácie a priestorovej orientácie žiakov a výsledkami v matematike. Výskum potvrdzuje tiež, že čím lepšie majú žiaci priestorové schopnosti a orientáciu, tým sú úspešnejší v technickom kreslení. Na druhej strane, priestorová vizualizácia nemá preukázaný vplyv na ich úspešnosť v tejto oblasti (Kayhan, 2005). Následne v danej publikácii možno nájsť aj informácie ako zlepšiť a rozvíjať priestorové schopnosti žiakov stredných odborných škôl. Táto publikácia je preto vhodná aj pre budúcich a súčasných učiteľov matematiky, prípadne pre tvorcov učebných osnov.

Zaujímavý je článok s názvom „Geometric spatial ability as an element of cognitive learning process“ (Anamova and Nartova, 2019), kde bolo cieľom štúdie poukázať na problémy súvisiace s osvojovaním si geometrických a grafických disciplín súvisiacich s nízkou úrovňou predstavivosti žiakov strednej školy, konkrétne 1. ročníka dizajnérskeho odboru Moskovského leteckého inštitútu. Autori tejto štúdie taktiež poukázali na nedostatočnú nadväznosť učebných materiálov v danom odbore, pričom 55 žiakov absolvovalo predmet Deskriptívna geometria, v rámci ktorého mali technické kreslenie. V závere štúdie sa konštatuje, že hlavnou príčinou problémov s geometrickými a grafickými disciplínami u žiakov technického kreslenia je nedostatočne rozvinutá geometrická priestorová predstavivosť. Pre žiakov, ktorí

neabsolvovali technické kreslenie, no majú silnú geometrickú priestorovú predstavivosť, sú problémy s geometrickými a grafickými disciplínami, podľa autorov, zapríčinené nedostatočnou prepojenosťou učebných materiálov. Tiež uvádzajú, že k efektívnej výučbe geometrických a grafických predmetov vedie hlavne rozvíjanie geometrických priestorových schopností a podčiarkujú význam tvorby učebných materiálov, ktoré zabezpečujú plynulú nadväznosť a prepojenie s už osvojeným obsahom (Anamova and Nartova, 2019).

Barut a Retnawati (2020) opisujú vo svojej štúdií nedostatky žiakov s úrovňou myslenia s ohľadom na Van Hieleho teóriu, bol použitý test pre všetky je štyri úrovne (od vizualizácie až po dedukciu). Názov článku, kde je predmetná štúdia popísaná, je „Geometry learning in vocational high school: Investigating the students' difficulties and levels of thinking“. Štúdia bola realizovaná so žiakmi dvanásteho ročníka stredných odborných škôl v Yogyakarta a zber údajov autori uskutočnili prostredníctvom testu, a tiež rozhovorov. Záverom štúdie je potvrdenie žiackeho problému s nedostatočným porozumením geometrických pojmov, s vizualizáciou konkrétneho špecifického geometrického útvaru, ale aj nesprávnym pochopením a používaním symboliky alebo termínov využívaných v geometrii. Záverom autori článku uvádzajú, že prevažná časť žiakov je na úrovni vizualizácie v geometrickom myslení, zatiaľ čo len menej z nich dosahuje úroveň analýzy (úroveň 2) a úroveň abstrakcie (úroveň 3).

Zaujímavý je článok „Didactical design for distance concept in solid geometry to develop mathematical representation ability in vocational high school“ (Rahayu, Juandi and Jupri, 2021). Článok sa venuje pojmu vzdialenosť v geometrii telies a akcentom na rozvoj schopnosti matematickej reprezentácie a výskumu sa zúčastnilo 30 žiakov dvanásteho ročníka strednej odbornej školy v Garute (Indonézia). Vybraní žiaci prešli tzv. prekážkovým testom učenia a vzhľadom na výsledky daného testu boli žiaci rozdelení do troch skupín, z ktorých bol náhodne vybraný jeden žiak. Cieľom následného testovania týchto troch žiakov, realizovaného formou popisných otázok, bolo zistiť úroveň ich schopnosti reprezentovať a porozumieť pojmu vzdialenosti v oblasti geometrie telies. Analýza žiackych riešení odhalila, že žiaci mali problémy s viacerými aspektmi určovania vzdialenosti v kocke. Konkrétne, robili chyby pri samotnej konštrukcii vzdialenosti medzi danými bodmi. Okrem toho, ich vedomosti o základných pojmoch, ktoré sa používajú na určenie vzdialenosti v priestore, boli nedostatočné. Zistilo sa tiež, že hoci dokázali vypočítať vzdialenosť medzi bodom a úsečkou, často robili algebrické chyby pri týchto výpočtoch. Autori vytvorili vzhľadom na tieto skutočnosti didaktický plán na pochopenie pojmu vzdialenosť v geometrii telies. Uvádzajú tiež, že na reprezentáciu vzdialenosti v geometrii telies sú nevyhnutné základné pojmy (napríklad zostrojovanie geometrických útvarov v danom pomere, ortogonálne projekcie bodov, čiar a rovín).

Pre stredné odborné školy vznikla štúdia s cieľom vyvinúť okrem iného aj vzdelávacie materiály pre učiteľov, kde je zakomponované aj využitie dynamického softvéru GeoGebra. Suprpto, Setyansah a Devina (2021) pripravili materiály s názvom „GeoGebra application based tutorial materials to improve spatial mathematics abilities in vocational high schools“, aby sa rozvíjali matematické priestorové schopnosti žiakov desiateho ročníka stredných odborných škôl. Danej štúdie sa zúčastnilo 21 žiakov danej školy navštevujúcich odbor Účtovníctvo a financie v Madiun (Indonézii) a žiaci boli respondentmi výskumu. Výskum ukázal, že použitie GeoGebry vo výučbe zlepšuje matematické priestorové schopnosti žiakov, ktoré následne vykazovali rastúcu tendenciu. Autori štúdie taktiež konštatujú, že GeoGebra nielenže pomáha žiakom zlepšiť ich priestorové schopnosti, ale považujú dynamický softvér za nevyhnutný nástroj vo vyučovacom procese.

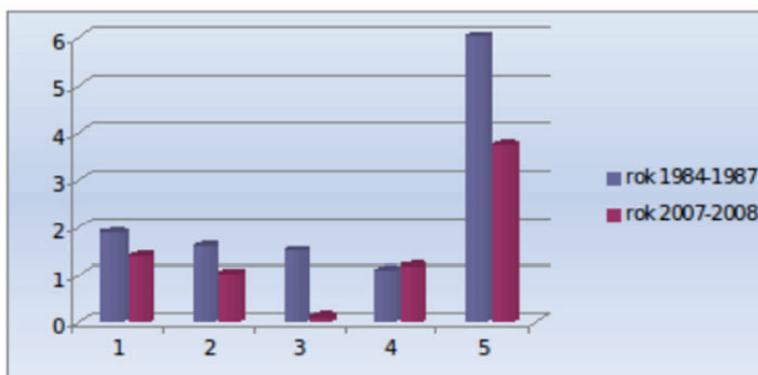
Štúdia s názvom „Enhancing learners' geometric thinking using dynamic geometry computer software“ bola prezentovaná autormi Adelabu, Makgato and Ramaligela (2019) s cieľom zistiť, či dynamický softvér GeoGebra môže zlepšiť úroveň geometrického myslenia žiakov aj s vzhľadom na Van Hieleho model. Do štúdie boli zapojení žiaci dvoch škôl z Južnej Afriky (87 žiakov) a daná štúdia trvala osem týždňov, pričom so žiakmi počas tejto doby pracovali výskumníci v dvoch skupinách. Pre účely výskumu boli žiaci podrobení predtestu a posttestu. Tieto testy sa zamerali na diagnostiku prvých troch úrovní geometrického myslenia podľa Van Hieleho teórie, pričom osobitný dôraz bol kladený na témy podobnosti a zhodnosti trojuholníkov. Z výsledkom štúdie vyplývajú nasledujúce závery, ktoré Adelabu, Makgato a Ramaligela (2019) formulujú nasledovne:

- zistilo sa, že žiaci, ktorí absolvovali výučbu tradičnými metódami, preukázali nižšiu úroveň rozvoja geometrického myslenia v porovnaní so žiakmi, ktorí mali možnosť pracovať s programom GeoGebra,
- používanie GeoGebry viedlo k výraznejšiemu zlepšeniu geometrického myslenia u žiakov, zatiaľ čo u žiakov vyučovaných tradičnými metódami bol tento pokrok menej markantný,
- implementovanie GeoGebry do vyučovacieho procesu efektívne zlepšuje geometrické myslenie žiakov, okrem toho schopnosť geometrického myslenia je kľúčová a využiteľná v rozmanitých sférach života,
- absencia geometrického myslenia má za následok oslabenie kľúčových kognitívnych schopností, vrátane logického, deduktívneho a analytického uvažovania, a taktiež negatívne ovplyvňuje schopnosť riešiť problémy.

V článku s názvom „A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities“ autorov Hegartyho a Wallera (2004) sa popisuje myšlienka ako vytvoriť nové testy súvisiace s priestorovou orientáciou. Ďalším cieľom bolo zistiť, či sa priestorová orientácia a mentálna rotácia, merané príslušnými testami, líšia. Štúdia

prebehla v dvoch experimentoch. Prvý experiment zahŕňal 62 novoprijatých študentov psychológie z Kalifornskej univerzity v Santa Barbare. V druhom experimente bol skúmaný súvis perspektívneho vnímania so schopnosťou pamätať si prostredie. Aby sa potvrdila odlišnosť perspektívneho vnímania od mentálnej rotácie, boli pri testovaní aplikované tri testy mentálnej rotácie. Do experimentu sa zapojilo 61 študentov psychológie z Kalifornskej univerzity v Santa Barbare. Štúdia sa okrem iného zamerala aj na objasnenie dôvodov, prečo nebola doteraz zistená disociácia medzi schopnosťou priestorovej orientácie a schopnosťou priestorovej vizualizácie.

Vo svojom výskume Schubertová a Molnár (2014) analyzovali porovnanie úrovne priestorovej predstavivosti žiakov v českej republike, pričom poukázali na jej klesajúci trend. Súčasťou ich analýzy bolo použitie neštandardizovaného testu, ktorý bol v rokoch 1984 – 1987 aplikovaný na 870 respondentov (žiacov druhého stupňa základných škôl, stredných škôl a študentov učiteľstva matematiky). Na porovnanie a zhodnotenie aktuálnej úrovne priestorovej predstavivosti bol v školskom roku 2007/2008 podobný test zadaný 536 účastníkom. Porovnanie výsledkov daných dvoch testov uvádzajú autori v grafe na obr. 4.



Obr. 4 Dáta z neštandardizovaného testu priestorovej predstavivosti (Schubertová, 2014)

Na základe porovnania priemerných bodových ziskov v teste autori dospeli k záveru, že dochádza k znižovaniu úrovne priestorovej predstavivosti u žiakov.

3 Zobrazenia priestoru vo vyučovaní matematiky na stredných školách technického zamerania na Slovensku

V kontexte predchádzajúcich kapitol, v ktorých sme sa komplexne venovali podstate priestorovej predstavivosti vo vyučovacom procese, zobrazením priestoru a iným súvisiacim pojmami, sa v nasledujúcej kapitole zameriame na analýzu témy zobrazenie priestoru v strednom odbore vzdelávania vybraných škôl.

Z celkového počtu 28 skupín odborov v kategórii Odborného vzdelávania a prípravy sme sa zamerali na technicky orientované študijné odbory, kde kľúčovú úlohu zohráva priestorové zobrazenie s využitím rôznych zobrazovacích metód. Výber bol cielený tak, aby po absolvovaní týchto štyroch ročných odborov získali žiaci úplné stredné odborné vzdelanie s maturitou. Vybrané boli tieto študijné odbory (Štátny inštitút odborného vzdelávania, 2021a):

- 23 Strojárstvo a ostatná kovospracujúca výroba I:
2381 M strojárstvo
- 36 Stavebníctvo, geodézia a kartografia:
3650 M stavebníctvo – oblasť pozemné stavebníctvo
3650 M stavebníctvo – oblasť rekonštrukcie a adaptácie budov
3650 M stavebníctvo – oblasť technické zariadenia budov
3656 K operátor stavebnej výroby
3658 K mechanik stavebnoinštalčných zariadení
3692 M geodézia, kartografia a kataster
- 39 Špeciálne technické odbory:
3917 M technické a informatické služby v stavebníctve
3917 M technické a informatické služby v elektrotechnike
3918 M technické lýceum
3918 M technické lýceum so zameraním na informatiku

Pre vybrané študijné odbory s úplným stredným odborným vzdelaním platí od 1. septembra 2015 vzdelávací štandard predmetu matematika. Tento štandard je podľa MŠVVaM SR (Štátny inštitút odborného vzdelávania, 2023a) dostupný pod názvom Matematika pre ÚSOV77 technické (Štátny inštitút odborného vzdelávania, 2013b). Obsah predmetu matematika je rozdelený do piatich hlavných tematických celkov (Tabuľka 3).

Tabuľka 3. Tematické celky vzdelávacieho obsahu predmetu matematika (Štátny inštitút odborného vzdelávania, 2013b)

Tematické celky	
	Čísla, premenná a početové výkony s číslami
	Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy
	Geometria a meranie
	Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika
	Logika, dôvodenie, dôkazy

Pre tematický celok Geometria a meranie stanovuje výkonový štandard, že absolvent študijného odboru okrem iného ovláda a vie v rovnobežnom premietaní načrtnúť kváder, jednoduché teleso zložené z malého počtu kvádrov, nakresliť rôzne pohľady ako bokorys, pôdorys a nárys jednoduchých útvarov zložených z kvádrov, taktiež zostrojiť rez kocky rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa, nakoniec riešiť praktické úlohy zamerané na študijný odbor (Štátny inštitút odborného vzdelávania, 2013b).

Tabuľka 4 poskytuje prehľad vyučovacích predmetov k odboru 2381 Strojárstvo pre dve nami vybrané školy, a to SOŠ technická vo Zvolene (Školský vzdelávací program, 2013a) a SPŠ strojnícka a elektrotechnická v Nitre (Školský vzdelávací program, 2015).

Tabuľka 4. Obsahové štandardy pre SOŠ technickú vo Zvolene a SPŠ strojnícku a elektrotechnickú v Nitre (Školský vzdelávací program, 2013b, 2015)

Obsahové štandardy	Vyučovací predmet
Geometria a meranie	Matematika
Technické zobrazovanie	Technické kreslenie
Informačné a komunikačné technológie	Aplikovaný softvér
Softvérové aplikácie v odbornej praxi	Grafické systémy Automatizácia prípravy výroby
Geometria a meranie	Matematika
Technická normalizácia	Technické kreslenie
Pravouhlé premietanie	
Kótovanie strojových súčiastok, predpisovanie tolerancií rozmerov a tvarov, stav povrchu	
Zhotovovanie výrobných a zostavných výkresov	
Základné vlastnosti a funkcie CAD, CAM systémov	Automatizácia prípravy výroby
Tvorba náčrtu, modelovanie súčiastok a zostáv	
Výkresová dokumentácia, prezentácia výsledkov práce	
Programovanie CNC – sústruženie, frézovanie	
Softvérové aplikácie v odbornej praxi	Grafické systémy
Konštrukčná príprava výroby	Aplikovaný software
Softvérové aplikácie v odbornej praxi	

Podrobné informácie k výučbe študijného odboru 3650 Staviteľstvo, ktoré sú dostupné napríklad v školskom vzdelávacom programe pre SOŠ technickú v Rožňave (Školský vzdelávací program, 2020), nájdete v Tabuľke 5.

Tabuľka 5. Obsahové štandardy pre SOŠ technickú v Rožňave (Školský vzdelávací program, 2020)

Obsahové štandardy	Vyučovací predmet
Geometria a meranie	Matematika
	Deskriptívna geometria
	Grafické systémy
	Konštrukčné cvičenia
	Odborné kreslenie

Zo školského vzdelávacieho programu SOŠ polytechnickej v Zlatých Moravciach (Školský vzdelávací program, 2013b) sme získali informácie k výučbe študijných odborov 3917 Technické a informatické služby a 3918 Technické lýceum. Prezentujeme vybrané obsahové štandardy a ich zaradenie do vyučovania (Tabuľka 6).

Tabuľka 6. Obsahové štandardy pre SOŠ polytechnickú v Zlatých Moravciach (Školský vzdelávací program, 2013b)

Obsahové štandardy	Vyučovací predmet
Geometria a meranie	Matematika
	Aplikovaná matematika
Technické zobrazovanie	Technické kreslenie
Obsluha technologických zariadení podľa odboru	Technická grafika

3.1 Zobrazovacie metódy vo vyučovacom procese na stredných odborných školách technického zamerania

Harant a Lanta (1965) uvádzajú, že základné geometrické poznatky, ako sú princípy priamok, rovín a pravých uhlov, boli v minulosti kľúčové pre rozvoj mnohých technických odvetví, vrátane stavebníctva, sochárstva a maliarstva. V súčasnej dobe sú tieto geometrické zobrazenia priestorových objektov nevyhnutné aj v strojárstve, zememeračstve a astronómii.

Premietanie je základnou zobrazovacou metódou, pričom rozlišujeme dva typy premietania:

- rovnobežné premietanie,
- stredové premietanie.

Spôsob, akým sa dosiahne bijekcia (teda jednoznačné zobrazenie, kde každému bodu priestoru zodpovedá práve jeden bod v priemetni, a naopak) v zobrazovacích metódach, sa líši v závislosti od zvoleného typu premietania a umiestnenia priemetne.

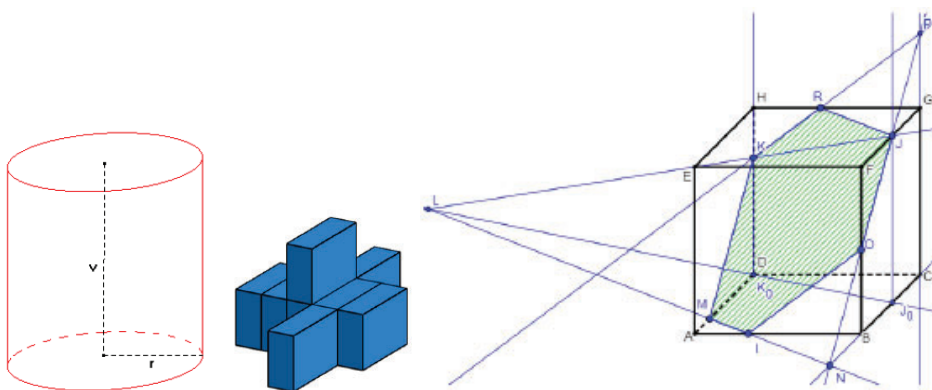
Pre účely výučby zobrazovacích metód sa zameriame len na lineárne metódy zobrazovania. V týchto metódach je bijektivnosť (jednoznačné priradenie) zabezpečená buď priradením bodu v priestore dvojicou bodov, alebo možnosťou bodu a reálneho čísla (Urban, 1965).

Ďalej budeme zobrazovacie metódy uvádzať s ohľadom na ich využitie v technickej a školskej praxi.

Pre účely vyučovania geometrie sa často využíva metóda nazývaná voľné rovnobežné premietanie. Ide o druh rovnobežného premietania, ktorého hlavnou výhodou je, že zobrazovanie trojrozmerného priestoru do roviny nie je podmienené voľbou konkrétnej súradnicovej sústavy (Harant a Lanta, 1965).

Uvádzame využitie voľného rovnobežného premietania:

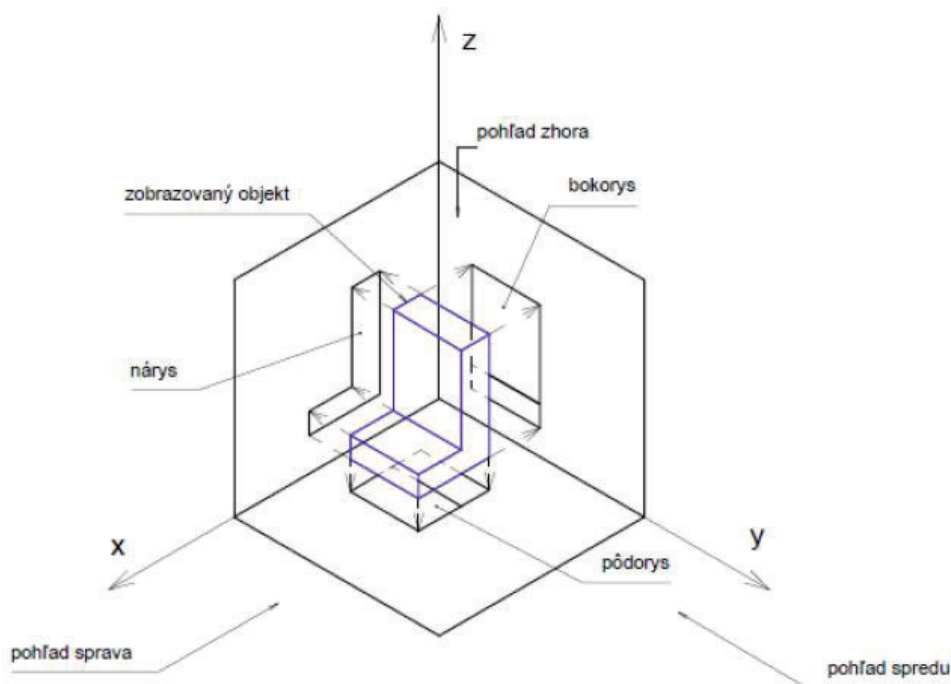
- na zobrazovanie jednotlivých telies aj ich skupín – ako sú kocka, kváder, kužeľ, valec, guľa, ... – z priestoru do roviny,
- je kľúčové dodržiavať zásady správnosti, názornosti a jednoduchosti,
- v školskej praxi sa využíva aj na zostrojovanie rezov telies danou rovinou (Obr. 5).



Obr. 5 Ukážky vo voľnom rovnobežnom premietaní

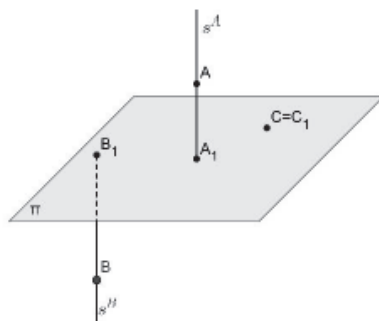
Kolmé premietanie je špeciálnym prípadom rovnobežného premietania, ktoré je veľmi dôležité v technickom kreslení alebo v strojárstve, kde sa používa na vytváranie ortogonálnych pohľadov (napríklad pôdorys, nárys, bokorys). Pri technickom kreslení platí zásada, že sa zobrazí len nevyhnutný počet pohľadov na teleso, tak aby bol jeho tvar a všetky rozmery jednoznačne určené.

Vo vyučovacom procese, najmä v predmete technika na základných školách, sa žiaci skutočne oboznamujú s tromi základnými pohľadmi na teleso. Tieto pohľady sú kľúčové pre pochopenie technického kreslenia a priestorovej predstavivosti. Ukážka zobrazenie telesa v rôznych pohľadoch pre technické účely (Obr. 6).



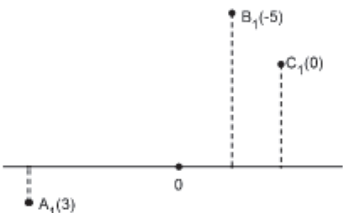
Obr. 6 Zobrazenie telesa v troch priemetniach v technických odboroch

Ďalším typom kolmého premietania na jednu priemetňu je kótované premietanie. Ľubovoľný bod (vzor) sa zobrazí po zostrojení premietacej priamky (kolmá na priemetňu a prechádzajúca daným bodom) do bodu (priemetu), ktorý je prienikom premietacej priamky a priemetne (Obr. 7).



Obr. 7 Body a ich priemety v kótovanom premietaní

Z priemetu je možné vytvoriť vzor daného bodu, preto k priemetu pripisujeme reálne číslo, tzv. kóta daného bodu (Obr. 8).

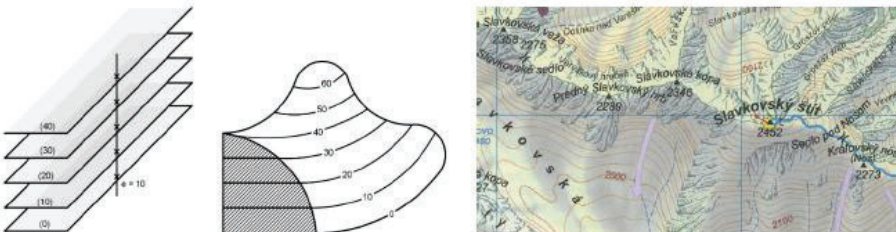


Obr. 8 Priemety bodov v kótovanom premietaní

Absolútna hodnota kóty sa rovná vzdialenosti bodu od priemetne. Body kladného polpriestoru majú kladné kóty a body záporného polpriestoru majú záporné kóty. Body ležiace v priemetni majú kóty rovnajúce sa 0. Kóty budeme pripisovať k priemetu bodu do zátvoriek (Harant a Lanta, 1965).

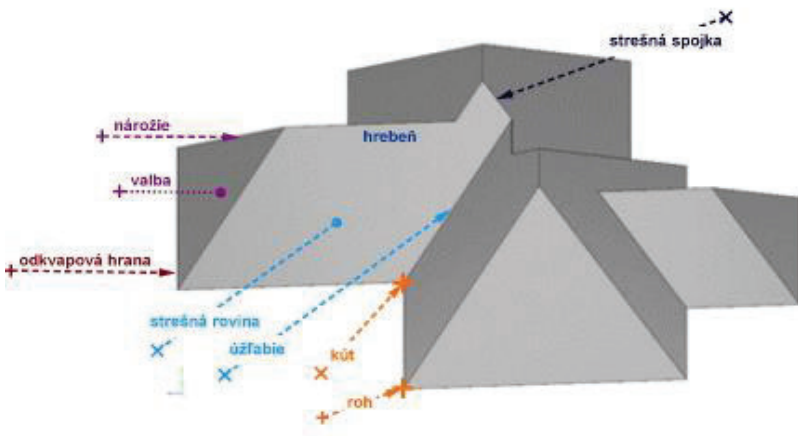
Využitie kótovaného premietania:

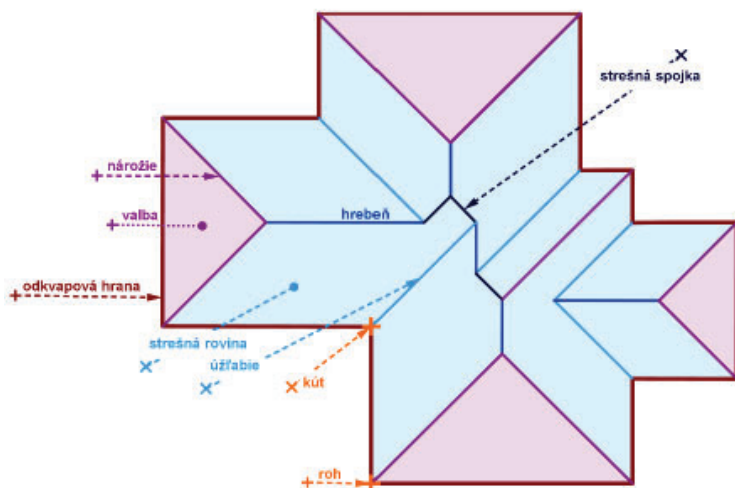
- topografické plochy, topografické mapy (Obr. 9),



Obr. 9 Kótované premietanie a vrstevnicový plán topografickej plochy

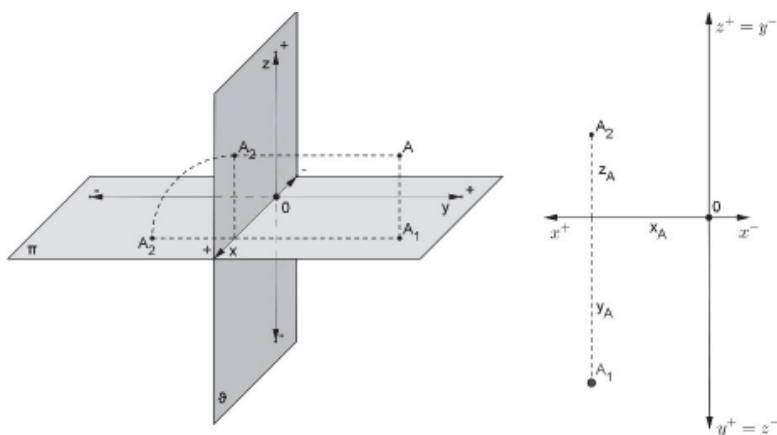
- teoretické riešenie striech (Obr. 10).





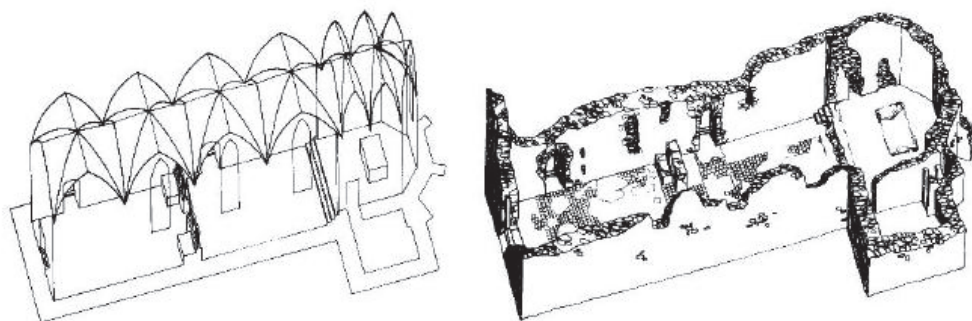
Obr. 10 Kótované premietanie a model strechy

Ďalším druhom rovnobežného premietania, ale už do dvoch navzájom kolmých priemetní, je Mongeove premietanie. Smer premietania je kolmý. Pôdorysňa π je prvá priemetňa (vodorovná rovina), druhú priemetňu označujeme ϑ a nazývame ju nárysňa. Priesečnicou daných priemetní je základnica x . Princíp premietania bodu v Mongeovom premietaní je znázornený na obr. 11.



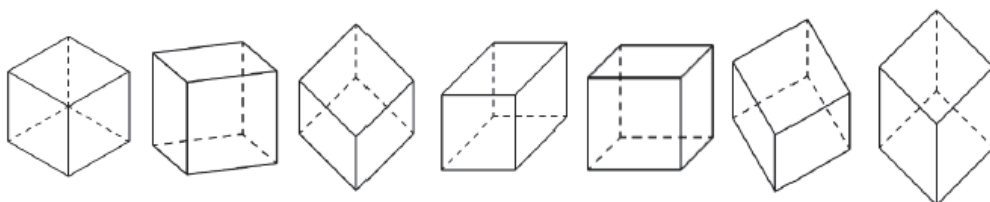
Obr. 11 Princíp Mongeového premietania

Axonometria je tiež rovnobežné premietanie, ale do roviny rôznobežnej so súradnicovými rovinami. Axonometria je považovaná za najnázornejšiu a najvhodnejšiu zobrazovaciu metódu z didaktického hľadiska. Často sa daná metóda využíva na zobrazenie objektov v strojárstve a stavebníctve (Obr. 12).



Obr. 12 Objekt zobrazení v axonometrii (Slivka a Slivka, 2019)

Na základe smeru premietacích priamok vzhľadom na priemetňu rozlišujeme kolmú a šikmú axonometriu. Na obr. 13 je zobrazená kocka v rôznych typoch axonometrii.

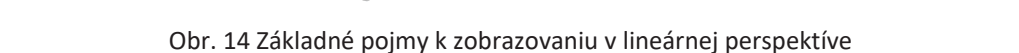


Obr. 13 Rôzne zobrazenia kocky v axonometrii

Tiež stručne popíšeme a uvedieme princíp aj vybranej zobrazovacej metódy, ktorú označujeme ako stredové premietanie. Ide o premietanie, ktoré je najlepšie vnímané ľudským zrakom. Jej princíp je založený na premietaní obrazu v priestore do jednej priemetne z jedného bodu (stred premietania), ktorého vzdialenosť od priemetne je konečná. Podľa Žarnaya a ďalších (2012) stredové premietanie je bežne používané v architektúre, geodézii a kartografii na zobrazenie veľkých alebo vzdialených objektov. V strojárstve sa táto technika používa len výnimočne, pretože si vyžaduje znalosť deskriptívnych grafických metód a môže viesť k zmene rozmerov objektov.

Stredovým premietaním je aj lineárna perspektíva, v ktorom je premietanie prispôbené zákonitostiam ľudského oka, z tohto dôvodu je často využívané medzi maliarmi (Kupčáková, 2002).

Na obr. 14 uvádzame základné pojmy vysvetľujúce princíp lineárnej perspektívy z geometrického pohľadu.



V lineárnej perspektíve sa reálne rovnobežné priamky zobrazujú ako zbiehajúce sa úbežnice do mysleného bodu (úbežník). Tento úbežník leží na priamke nazývanej horizont, ktorý zároveň prechádza priemetom daného objektu. Perspektívne zobrazenie tak vytvára ilúziu hĺbky a priestorovosti, čo je kľúčové pre realistické zobrazenie objektov v architektúre a umení. Vzhľadom na počet úbežníkov rozlišujeme rôzne typy perspektívy, konkrétne ukážky sú prezentované na obr. 15.



Rozlišujeme na základe perspektívneho pohľadu aj žabiú a vtáčiu perspektívu. Žabia perspektíva (perspektívny podhľad) je charakteristická nízkym bodom pozorovania a vtáčia perspektíva (perspektívny nadhľad) má zase pohľad zhora nadol.

Rozlišujeme na základe perspektívneho pohľadu aj žabiú a vtáčiu perspektívu. Žabia perspektíva (perspektívny podhľad) je charakteristická nízkym bodom pozorovania a vtáčia perspektíva (perspektívny nadhľad) má zase pohľad zhora nadol.

4 Zisťovanie aktuálneho stavu priestorovej predstavivosti žiakov stredných odborných škôl s technickým zameraním

V nadväznosti na problematiku stredného vzdelávania na Slovensku, konkrétne technicky orientovaných študijných odborov, ktorú sme už teoreticky spracovali v predchádzajúcich kapitolách, bol realizovaný výskum súvisiaci so zobrazovaním priestoru. Hlavným cieľom pedagogického výskumu bolo zistiť vzťah medzi geometrickými a priestorovými zručnosťami žiakov daných študijných odborov. Tiež výskum zisťoval schopnosti daných žiakov riešiť úlohy na zobrazovanie priestoru s prepojením na potreby konkrétneho študijného odboru.

4.1 Organizácia a priebeh pedagogického výskumu

Výskumné otázky výskumu boli:

- Navrhnuť stereometrický test, ktorý bude zahŕňať úlohy zo stereometrie v súlade so školským vzdelávacím programom a doplniť daný test o jednu úlohu, ktorá je špecifická pre konkrétny technicky orientovaný študijný odbor stredných odborných škôl.
- Zabezpečiť realizáciu vytvorených testov na stredných odborných školách v rôznych regiónoch Slovenska.
- Identifikovať na základe obsahovej analýzy riešení žiakov najčastejšie problémy a chyby, ktoré sa vyskytujú v riešení jednotlivých úloh v stereometrickom teste.
- Analyzovať a vyhodnotiť vybraný test priestorovej predstavivosti a zostavený stereometrický test pomocou vhodných štatistických metód, zistiť vzťah medzi jednotlivými testami s dôrazom na prepojenie geometrického učiva a odborných predmetov špecifických pre vybrané študijné odbory.

Pri výbere vhodných študijných odborov sme najprv analyzovali školské vzdelávacie programy s ohľadom na ich technické zameranie. Ďalším dôležitým kritériom bol výber takých školských vzdelávacích programov, ktorých úspešné absolvovanie vedie k získaniu úplného stredného odborného vzdelania v dĺžke štyroch rokov, zakončeného maturitnou skúškou. Po analýze sme vybrali študijné odbory uvedené v 3. kapitole.

Výskumu sa zúčastnilo 544 žiakov z desiatich stredných odborných alebo priemyselných škôl, v školskom roku 2021/2022 to boli žiaci druhého alebo tretieho ročníka a v školskom roku 2022/2023 to boli žiaci tretieho alebo štvrtého ročníka.

Zostavený bol stereometrický test, ktorý obsahuje päť úloh súvisiacich s obsahom vzdelávania v oblasti stereometrie v predmete matematika a vo vybraných odborných predmetoch príslušných študijných odborov. Druhým štandardizovaným testom na testovanie priestorovej predstavivosti žiakov bol zvolený test mentálnej rotácie. Použití bol revidovaný Test mentálnej rotácie (Peters et al. 1995) v prekreslenej verzii pôvodného papierovo-ceruzkového Testu mentálnej rotácie (Vandenberg and Kuse 1978) na základe pôvodných stimulov navrhnutých Shepardom a Metzlerom (1971).

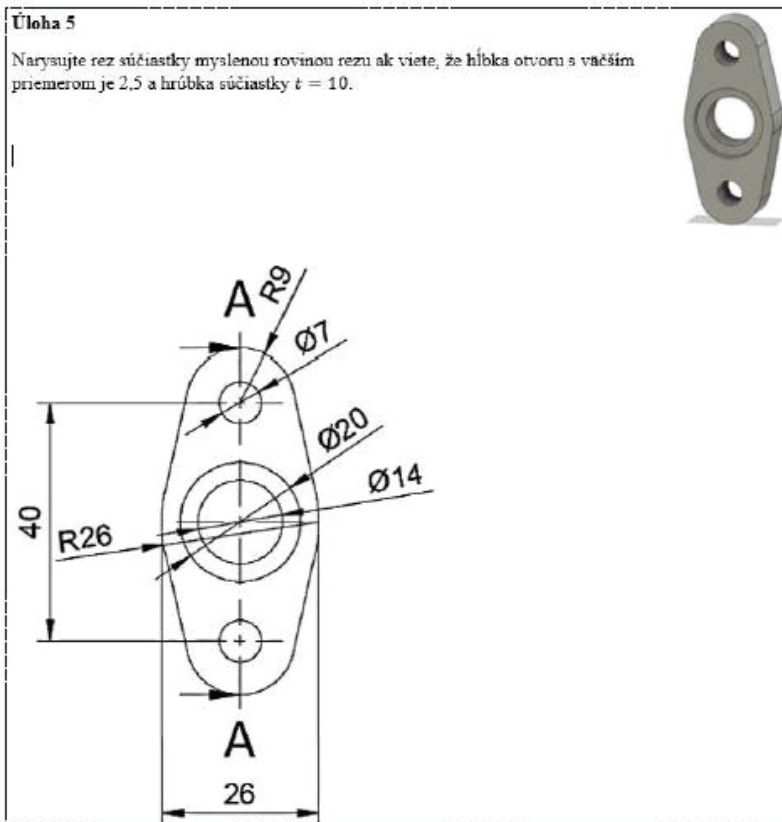
Stereometrický test má dve hlavné časti. Prvé štyri úlohy sú geometrického charakteru, zatiaľ čo piata úloha je špecificky zameraná na konkrétny študijný odbor. Test je uvedený v Príloha A. Úloha 5 v každej verzii testu (V1 – V3) súvisela s príslušným odborom a bola prekonzultovaná s učiteľmi daných odborov.

Úloha 5 V1 je určená pre žiakov navštevujúcich odbory uvedených v Tabuľke 7.

Tabuľka 7. Zaradenie odborov a škôl – Úloha 5 (verzia V1)

Odbor / škola	Počet žiakov
2381 M strojárstvo	
SPŠ v Dubnici nad Váhom – Dubnica nad Váhom	28
SPŠ strojnícka a elektrotechnická – Nitra	21
3918 M technické lýceum	
SOŠ polytechnická – Zlaté Moravce	23
SOŠ svätého Jána Bosca – Nová Dubnica	14
3918 M technické lýceum so zameraním na informatiku	
SOŠ strojnícka – Bánovce nad Bebravou	8
3917M6 03 technické a informatické služby v elektrotechnike	
SPŠ v Dubnici nad Váhom – Dubnica nad Váhom	27
3917 M 06 technické a informatické služby v stavebníctve	
SPŠ stavebná v Žiline – Žilina	14

Žiaci majú v úlohe narysovať rez súčiastky myslenou rovinou rezu (Obr. 16). Pri riešení tejto úlohy je kľúčové ovládať konštrukciu rezu súčiastky myslenou rovinou rezu, žiaci musia dodržať mierku, ďalej správne naniesť hodnoty, zostrojiť osi otvorov, šrafovať rez, ale aj rozlišovať hrúbky čiar a vyznačiť kóty.



Obr. 16 Zadaní úlohy 5 – verzia V1

Podobne uvádzame odbory a školy žiakov, ktorí riešili Úlohu 5 V2 (Tabuľka 8).

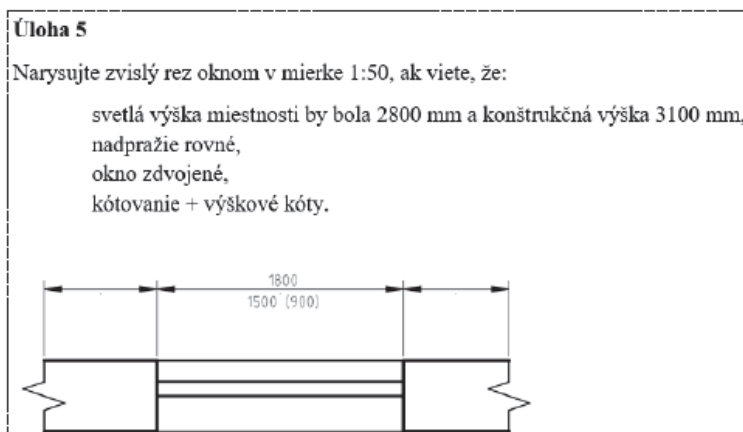
Tabuľka 8. Zaradenie odborov a škôl – Úloha 5 (verzia V2)

Odbor / škola	Počet žiakov
3650 M staveľstvo – oblasť pozemné staveľstvo	
SPŠ stavebná – Nitra	134
SPŠ stavebná Dušana Samuela Jurkoviča – Trnava	46
SPŠ stavebná v Žiline – Žilina	77
Stredná odborná škola stavebná - Építészeti Szakközépiskola – Nové Zámky	6
3650 M staveľstvo – oblasť rekonštrukcie a adaptácie budov	
SPŠ stavebná – Nitra	6
3650 M staveľstvo – oblasť technické zariadenia budov	
SPŠ stavebná – Nitra	18
3917 M 06 technické a informatické služby v stavebníctve	

SPŠ stavebná Dušana Samuela Jurkoviča – Trnava	15
3656 K operátor stavebnej výroby	
SOŠ polytechnická – Humenné	6
3658 K mechanik stavebnoinštalčných zariadení	
SOŠ polytechnická – Humenné	11

Úloha 5 V2 má v zadaní narysovať zvislého rezu oknom v danej mierke (Obr. 17). Dôležité je v úlohe:

- vedieť, čo je konštrukcia zvislého rezu oknom,
- dodržať danú mierku,
- rozlíšiť pojmy ako nadpražie rovné a okno zdvojené,
- rozlíšiť rozdiel konštrukčnej a svetlej výšky s následným nanesením správnych hodnôt,
- rozlíšiť hrúbky čiar,
- vyznačiť kóty pre svetlú a konštrukčnú výšku, ale aj kóty ostatných hodnôt.



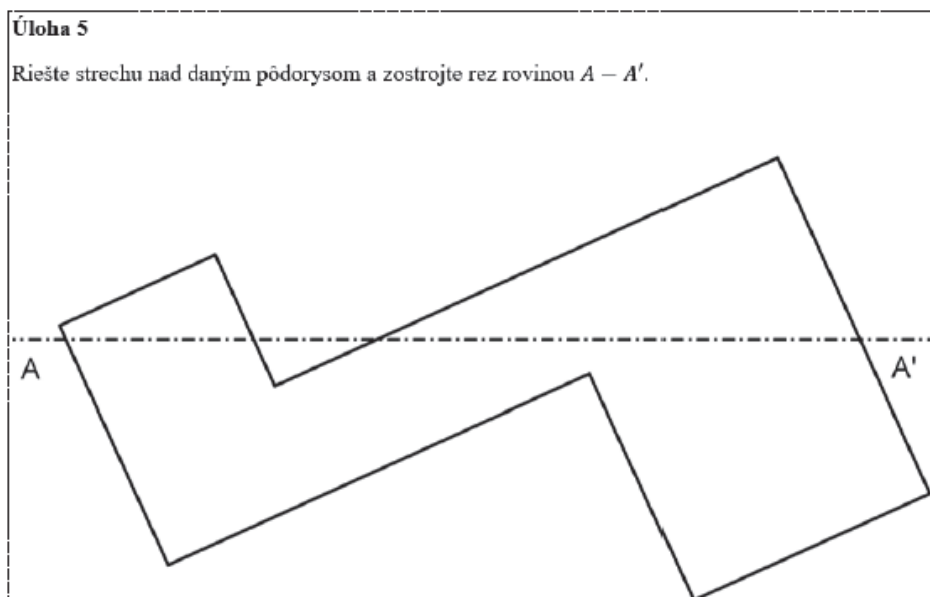
Obr. 17 Zadanie úlohy 5 – verzia V2

V poslednej Tabuľke 9 je uvedený prehľad žiakov navštevujúcich odbory a školy, ktorí riešili úlohu 5 vo verzii tretej – Úloha 5 V3.

Tabuľka 9. Zaradenie odborov a škôl – Úloha 5 (verzia V3)

Odbor / škola	Počet žiakov
3692 M geodézia, kartografia a kataster	
SPŠ stavebná – Nitra	37
SPŠ stavebná Dušana Samuela Jurkoviča – Trnava	6
SPŠ stavebná v Žiline – Žilina	47

Úloha 5 V3 je zameraná na riešenie strechy nad daným pôdorysom a následným zostrojením rezu danou rovinou. Žiaci pri riešení úlohy musia vedieť zostrojiť rez danou rovinou, tiež musia vedieť naniesť správne hodnoty, ale využívajú osi rôznobežných aj rovnobežných rovín, vedia vyznačiť tiež vzdialenosti (Obr. 18).



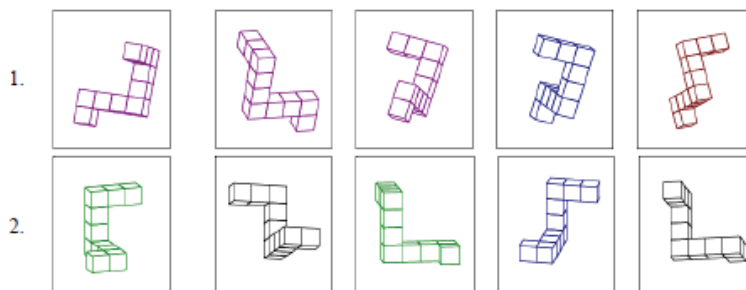
Obr. 18 Zadanie úlohy 5 – verzia V3

Druhým testom vo výskume bol revidovaný test mentálnej rotácie. Pôvodný test mal dvadsať úloh, rozdelených do štyroch sekcií po piatich úlohách. Každá úloha obsahovala hlavný stimul, ku ktorému boli priradené dve správne alternatívy (znázorňujúce nákres otočeného hlavného kockového telesa) a dve nesprávne alternatívy, nazývané distraktory. Zaujímavosťou je, že prvých desať úloh malo distraktory vytvorené zrkadlovým otočením kockových telies. Druhá polovica distraktorov potom pozostávala z nákresov otočených iných kockových telies. Aby sa eliminovalo hádanie participantov, autori Vandenberg a Kuse (1978) navrhli bodovanie: jeden bod bol pridelený len v prípade, že participant správne označil obe odpovede, v každom inom prípade bol za danú úlohu udelených nula bodov.

Vo výskume bola použitá revidovaná verzia testu mentálnej rotácie, preto tento test obsahoval 24 úloh rozdelených rovnomerne do dvoch častí, pričom každá úloha je tvorená piatimi stimulmi. Po pojmom stimul rozumieme istý pohľad na dané kockové teleso a následné možné jeho otočenie priestorovou rotáciou. Hlavný stimul je zobrazený vždy naľavo, vedľa neho sú zobrazené štyri alternatívne stimuly. Dve z nich sú správnou alternatívou hlavného stimulu, teda otočené verzie hlavného stimulu, a dve z nich sú distraktorom hlavného stimulu. Vzhľadom na tieto stimuly bol systém

bodovania testu nasledovný: jeden bod získal žiak len vtedy, ak označil obidva správne stimuly, ale ak označil iba jeden správny stimul, nezískal žiaden bod.

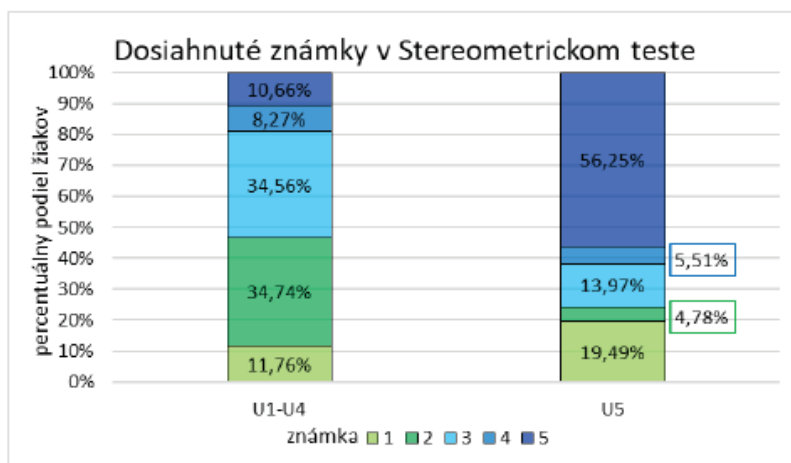
Keďže je test chránený autorským právom, autorské podmienky nám neumožňujú zverejniť daný test v plnom rozsahu ani v práci, ani nikde inde. Vzhľadom na tento fakt Obr. 19 zobrazuje iba dve nácvičné úlohy, ktoré nájdete na prvých dvoch stranách testu.



Obr. 19 Ukážka nácvičných úloh Testu mentálnej rotácie (Peters et al. 1995)

4.2 Analýza výsledkov získaných z pedagogického výskumu

Úspešnosť žiakov v stereometrickom teste bola analyzovaná zvlášť pre matematickú časť (Úloha 1 až Úloha 4) a odbornú časť (Úloha 5). Žiakom za stereometrický test boli udelené známky, pričom graf na obr. 20 znázorňuje úspešnosť žiakov vyjadrená percentuálnym zastúpením pre každú známku, ktorú získali.

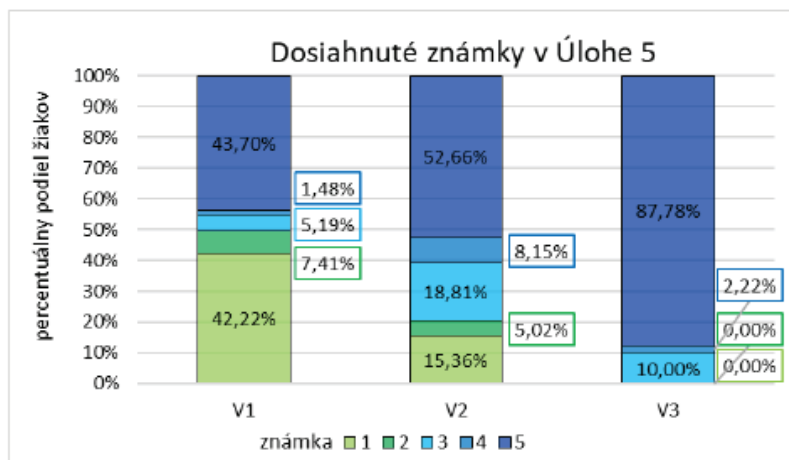


Obr. 20 Percentuálne zastúpenie známok žiakov v stereometrickom teste

Priemerná známka za matematickú časť bola 2,71, modus 2 a medián 3. Úloha 5 bola pre žiakov obzvlášť náročná, keďže ju nezvládlo až 56,25 % z nich, čo viedlo k udeleniu

známky 5. Toto číslo bolo najvyšším percentuálnym podielom spomedzi všetkých známok. Priemerná známka za odbornú časť (Úlohu 5) bola 3,74, modus 5 a medián 5.

Pre Úlohu 5 stereometrického testu boli pripravené tri verzie (V1 – V3), na základe ktorých bol vytvorený graf (Obr. 21). Daný obrázok detailne prezentuje, aké známky získali žiaci pri riešení každej konkrétnej verzie tejto úlohy.



Obr. 21 Percentuálne zastúpenie známok žiakov v stereometrickom teste – Úloha 5

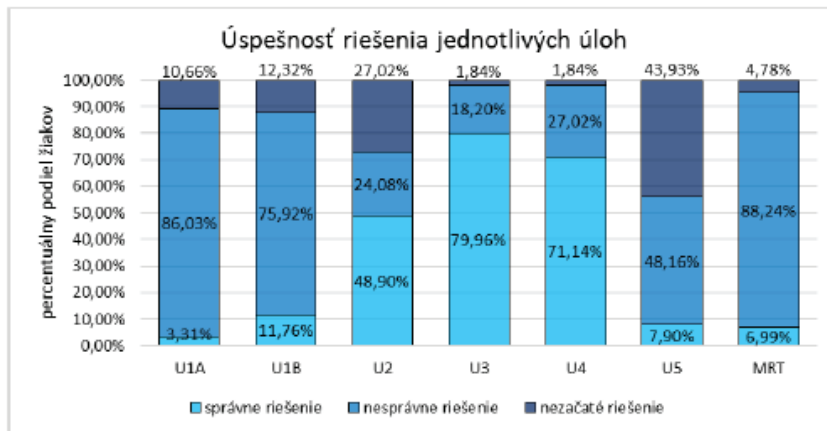
Neúspech žiakov pri riešení Úlohy 5 v troch verziách bol spôsobený dvoma hlavnými faktormi: nesprávnymi riešeniami a prípadmi, kedy žiaci úlohu ani nezačali riešiť. V grafe preto rozlišujeme tri kategórie odpovedí:

- nezačaté riešenia: úlohy, ktoré žiaci vôbec nezačali riešiť,
- nesprávne riešenia: úlohy, ktoré žiaci začali riešiť, no ich riešenie nebolo správne,
- správne riešenia: úplne správne vyriešené úlohy.

Z ďalšieho grafu (Obr. 22) možno vidieť tieto fakty:

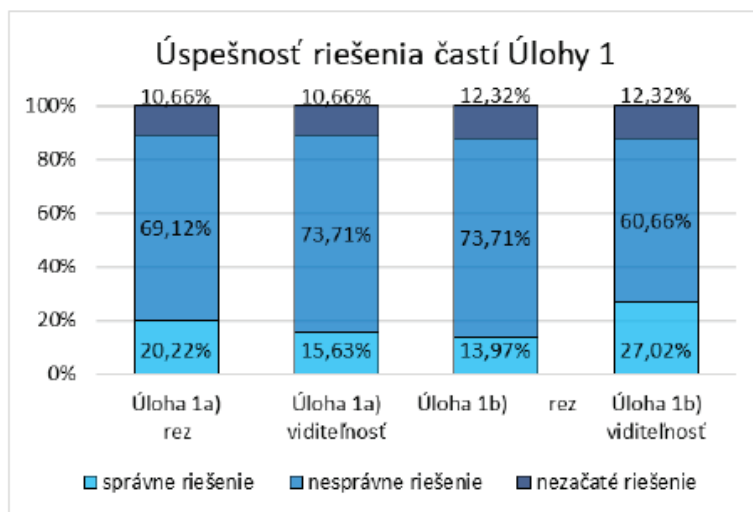
- najnáročnejšou úlohou bola Úloha 1a),
- žiaci neboli úspešní pri konštrukcii rezu kocky danou rovinou, a to tak v štandardnom, ako aj v neštandardnom zobrazení kocky,
- úlohu zameranú na určovanie súradníc vrcholu a bodu ležiaceho na hrane vyriešilo až 48,90 % žiakov,
- v porovnaní s inými úlohami, určovanie a zakresľovanie pohľadov kockových telies (Úloha 3 a Úloha 4) robilo žiakom podstatne menšie ťažkosti,
- Úlohu 5, ktorá súvisela s konkrétnym študijným odborom, správne vyriešilo len 7,90 % žiakov, zároveň je dôležité poznamenať, že až 43,93 % žiakov ju ani nezačalo riešiť,

- napriek veľmi nízkej 6,99 % celkovej úspešnosti v teste mentálnej rotácie, len 4,78 % žiakov tento test vôbec neriešilo.



Obr. 22 Úspešnosť riešenia úloh v stereometrickom teste a teste mentálnej rotácie

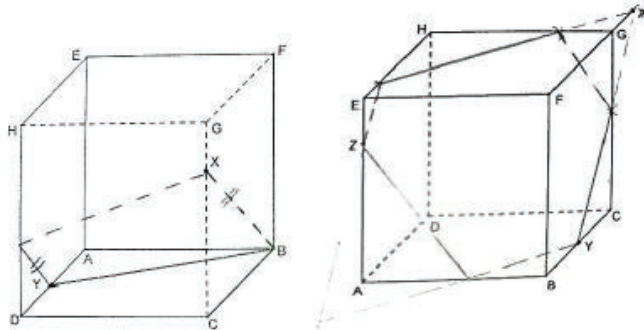
Uvádzať ďalej kvalitatívnu analýzu žiackych riešení stereometrického testu aj konkrétnymi ukážkami žiackych riešení. Úloha 1 sa zamerala na zostrojenie rezov kociek danými rovinami a vyznačenie viditeľnosti vzniknutých rezových útvarov. Graf na obr. 23 ilustruje úspešnosť žiakov pri riešení Úlohy 1a) a Úlohy 1b). Pri hodnotení oboch úloh sme osobitne posudzovali správnosť zostrojenia samotného rezu a tiež korektné vyznačenie viditeľnosti jednotlivých strán tohto rezu alebo jeho časti.



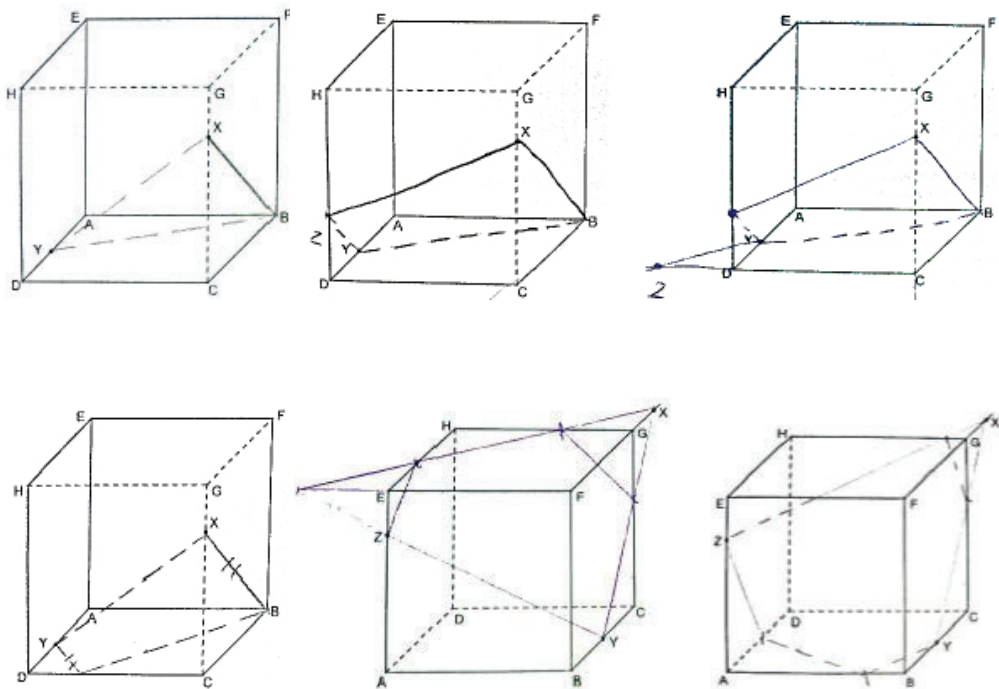
Obr. 23 Úspešnosť riešenia Úlohy 1

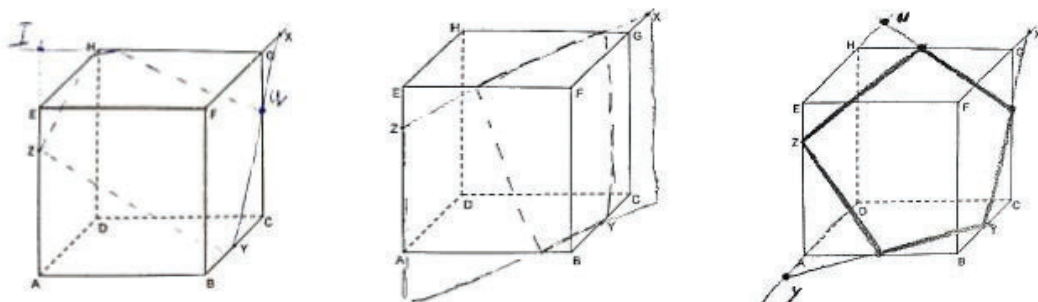
Ako sme už uviedli, Úloha 1 bola zameraná na zostrojenie rezov kociek danými rovinami a následné vyznačenie viditeľnosti strán týchto rezov. Pri konštrukcii rezu

bolo pre žiakov kľúčové správne aplikovať vlastnosti a vzájomné polohy bodov, priamok a rovín. Zároveň bolo pri vyznačovaní viditeľnosti rezového útvaru dôležité zohľadniť konkrétny pohľad na kocku. Na obr. 24 uvádzame ukážky správnych žiackych riešení úlohy a na obr. 25 sú zase uvedené nesprávne žiacke riešenia.



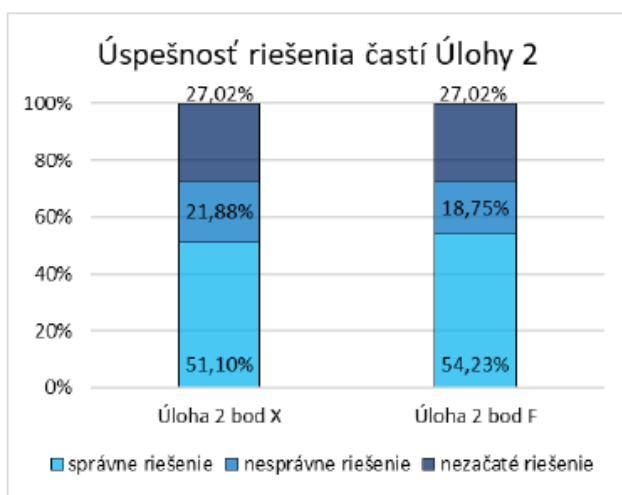
Obr. 24 Správne žiacke riešenia Úlohy 1a) a Úlohy 1b)





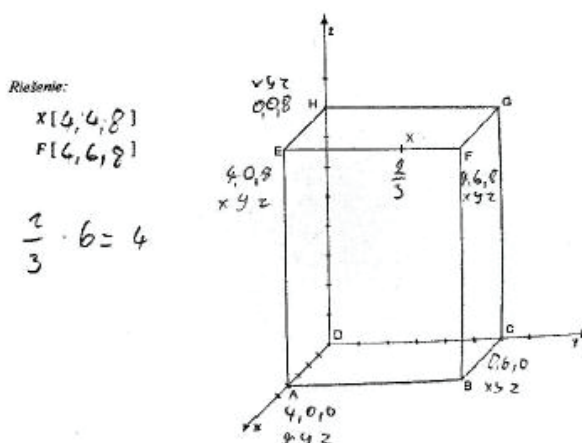
Obr. 25 Nesprávne žiacke riešenia Úlohy 1a) a Úlohy 1b)

Hodnotenie Úlohy 2 zahŕňalo určenie súradníc bodu X na hrane kvádra a súradníc vrcholu F . Z grafu (Obr. 26) je zrejmé, že 54,23 % žiakov správne určilo súradnice vrcholu F , zatiaľ čo 51,10 % žiakov úspešne určilo súradnice bodu X ležiaceho na hrane. Naopak, 21,88 % žiakov neurčilo správne všetky tri súradnice bodu X a 18,75 % žiakov chybné určilo všetky tri súradnice vrcholu F .



Obr. 26 Úspešnosť riešenia Úlohy 2

Správne žiacke riešenie úlohy je uvedené na obr. 27. V Úlohe 2 bolo potrebné určiť súradnice bodu $X \in EF$ a vrcholu F , pričom boli dané súradnice vrcholov $C[0,6,0]$, $H[0,0,8]$, $A[4,0,0]$ a $|EX| = \frac{2}{3}|EF|$.

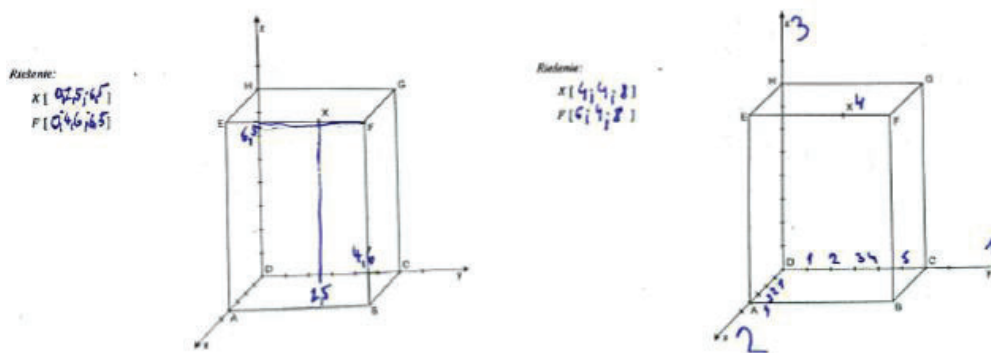


Obr. 27 Správne riešenie Úlohy 2

Na základe analýzy nesprávnych riešení bolo zistené, že 9,92 % žiakov má pravdepodobne nedostatočné priestorové schopnosti. Okrem toho sa objavili aj chyby, ktoré nemusia súvisieť len s priestorovou predstavivosťou, ale môžu byť spôsobené aj nepozornosťou. Konkrétne ide o zámenu:

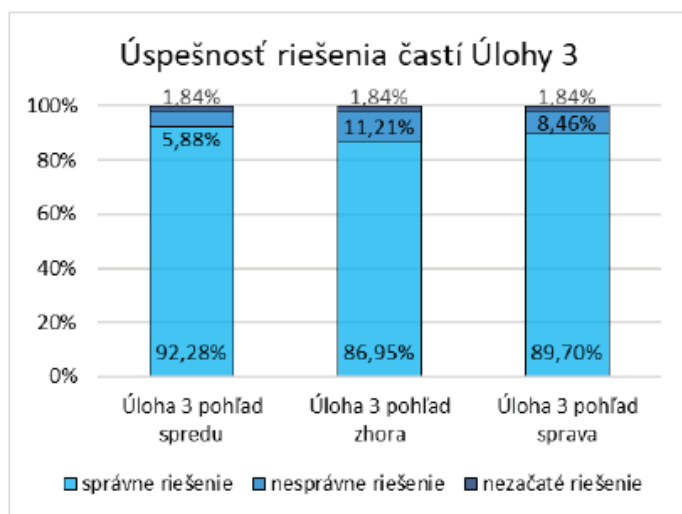
- súradníc v bodoch,
- súradníc jednotlivých bodov navzájom,
- ľavotočivej a pravotočivej súradnicovej sústavy.

Obr. 28 prezentuje ukážky nesprávnych riešení žiakov danej úlohy.



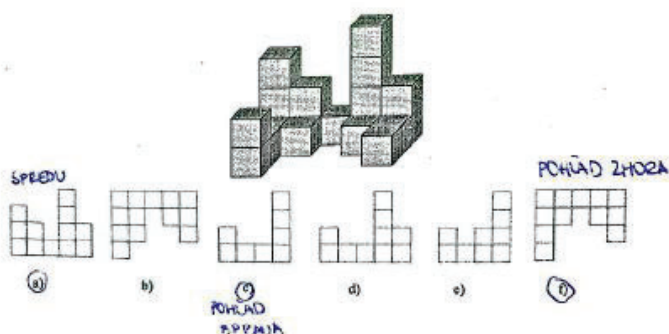
Obr. 28 Nesprávne riešenia Úlohy 2

Úlohu 3 žiaci zvládli riešiť bez väčších problémov, mali k danému kockovému telesu priradiť správne pohľady (pohľad spredu, pohľad zhora a pohľad sprava). Iba 1,84% žiakov nezačalo úlohu riešiť. Ďalšie zistenia z riešení úlohy vidieť na grafe (Obr. 29).



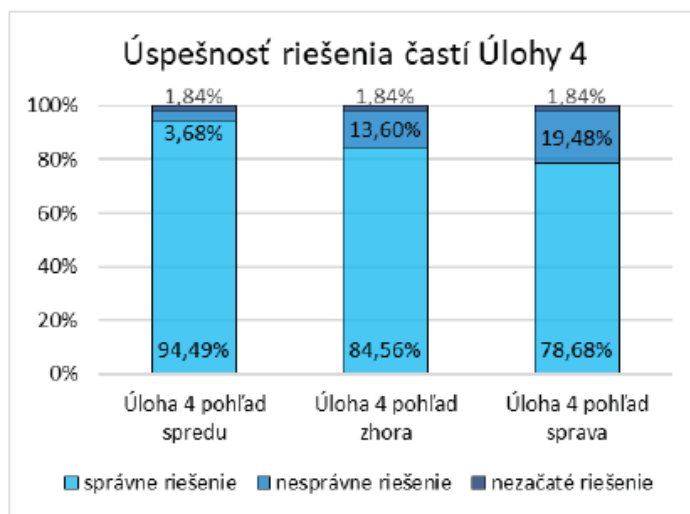
Obr. 29 Úspešnosť riešenia Úlohy 3

Najčastejšou chybou v žiackych riešeniach bolo nesprávne určenie pohľadu zhora. Konkrétne, žiacka odpoveď sa od správneho riešenia líšila ale iba o jeden štvorec, ktorý v danom pohľade bol pridaný. Pri určovaní pohľadu spredu bola zase častou chybou zámena počtu štvorcov v dvoch stĺpcoch. Čo sa týka pohľadu sprava, zistené nedostatky v riešeniach žiakov poukázali na nedostatočne rozvinuté schopnosti predstaviť si situáciu v priestore a pohľad na dané kockové teleso. Uvádzame taktiež správne riešenie na obr. 30.



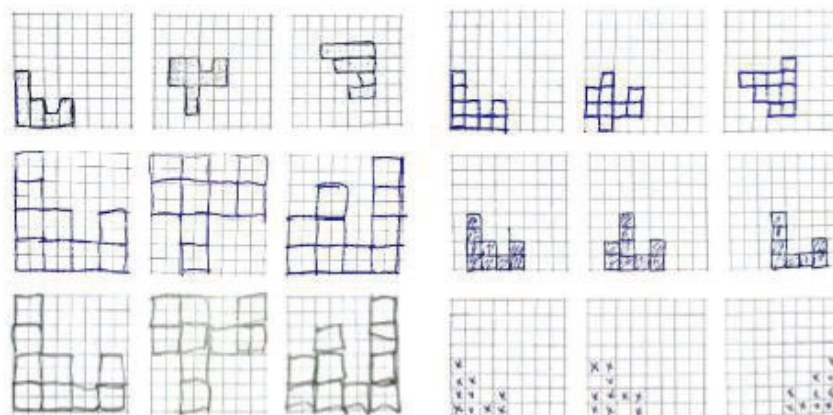
Obr. 30 Správne riešenie Úlohy 3

Podobne ako Úloha 3, aj riešenie Úlohy 4 nebolo pre žiakov náročné, mali do štvorcovej siete zakresliť pohľad spredu, pohľad zhora a pohľad sprava uvedeného telesa. Až 94,49% žiakov zakreslilo pohľad spredu správne, 84,56% žiakov správne zakreslilo pohľad zhora a 78,68% žiakov správne zakreslilo aj pohľad sprava (Obr. 31).



Obr. 31 Úspešnosť riešenia Úlohy 4

Najčastejšie chyby sme zistili pri zakresľovaní pohľadu sprava, kde žiaci často namiesto neho zakreslili pohľad zľava. Okrem toho sa žiaci dopúšťali aj iných chýb, ako bolo zakreslenie o jeden štvorec viac alebo menej v pohľadoch, otočenie pohľadu o 90° alebo nakreslenie osovo súmerného pohľadu daného telesa. Pozorovali sme aj rôzne ďalšie žiacke chyby v riešení úlohy, ktoré naznačujú celkový nedostatok priestorových schopností žiakov. Na obr. 32 sú uvedené ukážky nesprávnych žiackych riešení Úlohy 4.



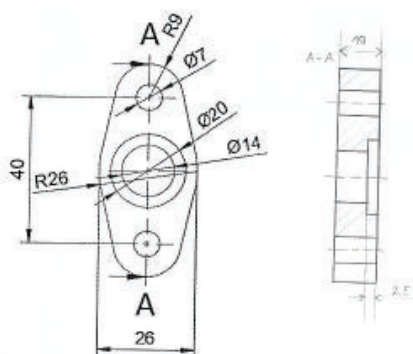
Obr. 32 Nesprávne riešenia Úlohy 4

Posledná úloha (Úloha 5) v stereometrickom texte súvisela s konkrétnym študijným odborom technického zamerania. V Tabuľke 10 uvádzame okrem počtu žiakov, ktorí riešili verzie V1 – V3 danej úlohy, aj relatívnu početnosť žiakov.

Tabuľka 10. Počet žiakov podľa študijného odboru vzhľadom na riešenie Úlohy 5

Verzia Úlohy 5	Počet žiakov	Relatívna početnosť žiakov
V1	135	24,82%
V2	319	58,64%
V3	90	16,54%

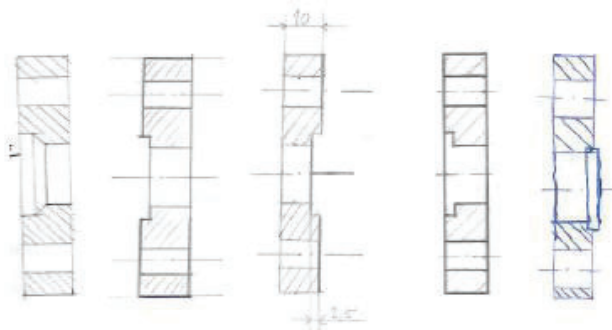
Úlohu 5 vo verzii V1 riešili žiaci so zameraním na strojárstvo, tiež žiaci technického lýcea a odboru technické a informatické služby, pričom žiaci mali narysovať rez súčiastky myslanou rovinou rezu. Na obr. 33 je správne žiacke riešenie Úlohy 5 V1.

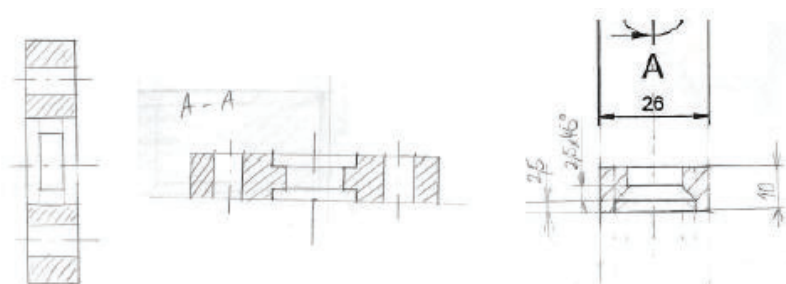


Obr. 33 Správne riešenie Úlohy 5 V1

Najčastejšie chyby (Obr. 34) vyskytujúce sa v riešeniach žiakov boli:

- nesprávne zakreslenie otvoru,
- nedodržanie mierky nanesením nesprávnych hodnôt,
- nezostrojenie osi otvorov,
- nevyšrafovanie rezov,
- nerozlišovanie hrúbok čiar,
- nevyznačením kót,
- zakreslenie rezu súčiastky horizontálne myslanou rovinou rezu, ktorá však nebola vyznačená v zadaní úlohy.



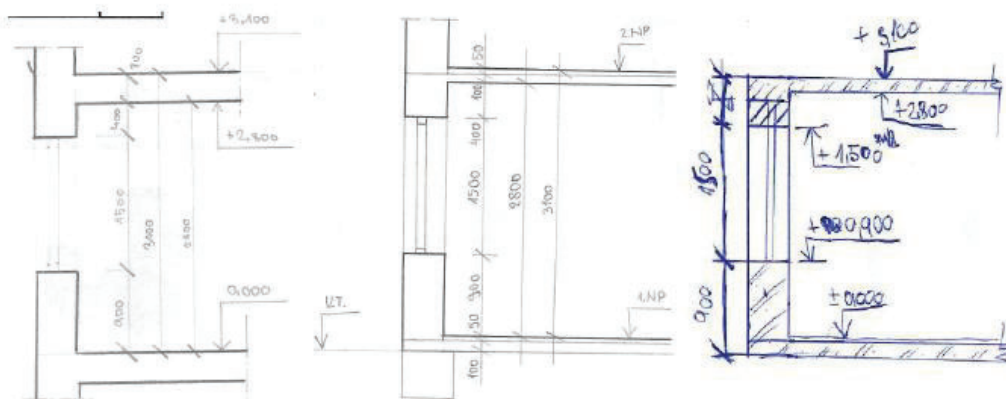


Obr. 34 Nesprávne riešenia Úlohy 5 V1

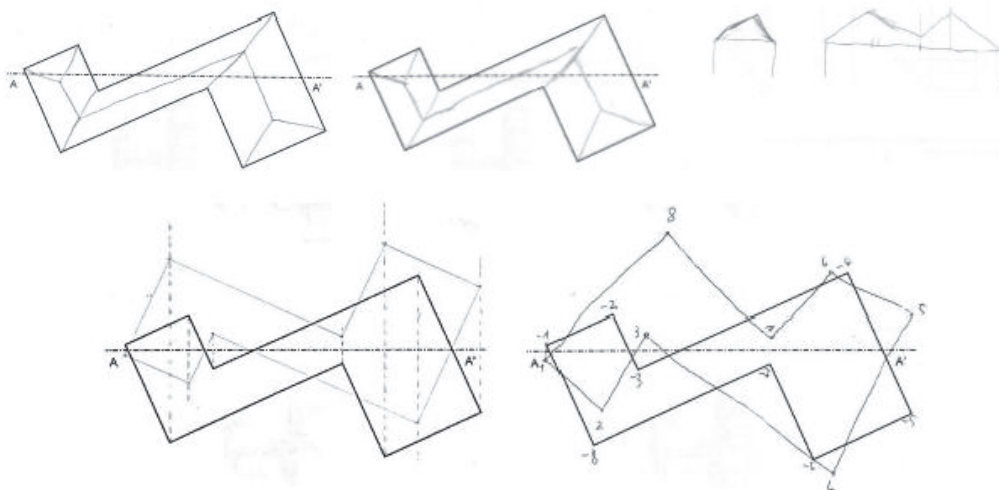
Úlohu 5 verzia V2 riešili zase žiaci odborov:

- staviateľstvo,
- technické a informatické služby,
- operátor stavebnej výroby,
- mechanik stavebnoinštalačných zariadení.

Na obr. 35 uvádzame správne žiacke riešenia danej úlohy, pričom môžeme konštatovať, že chyby súviseli len s nedostatočnými vedomosťami riešenej problematiky.



pôdorys strechy ako osovo súmerný. V týchto prípadoch rovinu rezu A-A' považovali za os súmernosti.



Obr. 36 Neprávne riešenia Úlohy 5 V3

4.3 Zistenia z pedagogického výskumu a odporúčania pre prax

Zistenia a postrehy, ktoré boli zaznamenané počas realizácie popísaného pedagogického výskumu v nasledujúcej podkapitole zosumarizujeme.

Žiaci študijných odborov s technickým zameraním riešili najskôr stereometrický test. Ukázalo sa, že úspešnosť žiakov bola vyššia v geometrickej časti daného testu (Úloha 1 až Úloha 4) v porovnaní s časťou súvisiacou s odborom (Úloha 5). Konkrétne:

- 80% žiakov získalo v geometrickej časti známku 3 alebo lepšiu, zatiaľ čo v časti súvisiacej s odborom to bolo len 38% žiakov,
- žiaci odborov strojárstvo, technické lýceum, technické lýceum so zameraním na informatiku, technické a informatické služby v elektrotechnike a technické a informatické služby v stavebníctve (riešitelia Úlohy 5 verzia V1) dosiahli najvyššiu úspešnosť, t. j. až 42 % týchto žiakov získalo známku 1,
- spomedzi žiakov študujúcich odbory stavebníctvo (oblasť pozemné stavebníctvo, oblasť rekonštrukcie a adaptácie budov, oblasť technické zariadenia budov), technické a informatické služby v stavebníctve, operátor stavebnej výroby a mechanik stavebnoinštalčných zariadení (riešitelia Úlohy 5 verzia V2) iba 15 % získalo známku 1,
- pokiaľ ide o žiakov študijného odboru geodézia, kartografia a kataster (riešitelia Úlohy 5 verzia V3), ani jeden z nich nezískal známku 1 alebo 2, naopak, až 87% týchto žiakov bolo ohodnotených známkou 5,

- bola zaznamenaná vysoká neriešiteľnosť jednotlivých úloh v stereometrickom teste, a teda Úloha 1a) – 11%, Úloha 1b) – 12%, Úloha 2 – 27%, Úloha 3 – 2%, Úloha 4 – 2%, Úloha 5 V1 – 36%. Úloha 5 V2 – 41%, Úloha 5 V3 – 66%.

Taktiež bola urobená obsahová analýza všetkých úloh (Úloha 1 – Úloha 5), ktoré riešili žiaci v stereometrickom teste. Výsledky tejto analýzy z pohľadu najčastejšie vyskytujúcich sa žiackych chýb zhrnieme do niekoľkých bodov:

- Úloha 1 – chyby vyplývajúce z nedostatočných vedomostí (žiaci nesprávne zostrojili rez kocky danou rovinou a to tak, že za konštrukciu rezu kocky danou rovinou považovali spojenie daných bodov roviny rezu, t. j. 65,17% z nesprávnych riešení v neštandardnom pohľade na kocku, 62,95% z nesprávnych riešení štandardnom pohľade na kocku), chyby spojené s priestorovou predstavivosťou (nesprávne vyznačenie viditeľnosti jednotlivých strán vzniknutého rezového útvaru – až 27,99% z nesprávnych riešení, ale aj nesprávne vytvorenie strán rezového útvaru z dvoch bodov patriacim rôznym rovinám, zostrojenie bodov nepatriacim rovine rezového útvaru, vedenie priamky bodmi nepatriacimi rovine rezového útvaru a taktiež považovanie dvoch mimobežných priamok za rôznobežné a následné vyznačenie spoločného neexistujúceho bodu),
- Úloha 2 – chyby spojené s priestorovou predstavivosťou žiakov (podstatou bolo pri určovaní hodnoty súradníc bodov zostrojenie neexistujúceho prieniku kolmice spustenej z daných bodov a osi y , predstavovalo to 9,92% z nesprávnych riešení), chyby z nepozornosti (zámena pravotočivej a ľavotočivej súradnicovej sústavy, alebo bodov X , F pri zápise súradníc jednotlivých bodov),
- Úloha 3 – chyby spojené s priestorovou predstavivosťou (pridaný bol jeden štvorec vzhľadom na správne zakreslenie pohľadu, pohľad zhora: 32,32% z nesprávnych riešení, pohľad sprava: 10,10% z nesprávnych riešení, chýbal jeden stĺpec vzhľadom na správne zakreslenie pohľadu, pohľad sprava: 11,11% z nesprávnych riešení, tiež boli zamenené stĺpce a zároveň bol pohľad otočený o 180° vzhľadom na jeho správne zakreslenie, pohľad spredu: 32,32%),
- Úloha 4 – chyby spojené s priestorovou predstavivosťou (zakreslení bol o jeden štvorec menej vzhľadom na správne zakreslenie pohľadu, 12,24% z nesprávnych riešení, alebo bol zakreslení o jeden štvorec viac vzhľadom na správne zakreslenie pohľadu, 4,76% z nesprávnych riešení), chyby vyplývajúce z nedostatočných vedomostí o pohľadoch telesa (zakreslení bol namiesto pohľadu sprava pohľad zľava, 13,61% z nesprávnych riešení, alebo namiesto pohľadu zhora bol zakreslený pohľad zdola, 2,72% z nesprávnych riešení).

- Úloha 5 – chyby spôsobené nedostatočnými vedomosťami z riešenej problematiky, chyby indikujúce problém v priestorovej predstavivosti žiakov.

V rámci ďalšej štatistickej analýzy testu mentálnej rotácie sme sa zamerali na vzťah medzi úrovňou mentálnej rotácie a študijným odborom žiakov. Zistili sme, že žiaci strojárskych a stavebných odborov dosahovali najvyššiu úroveň mentálnej rotácie a zároveň vykazovali aj najnižšiu variabilitu v tejto schopnosti. Zaujímavé je, že úroveň mentálnej rotácie sa medzi jednotlivými školami líšila v rámci špecifických odborov (strojársky odbor, technické a informatické služby a mechanik stavebnoinštalačných zariadení). Konkrétne, žiaci z dvoch škôl preukázali výrazne vyššiu úroveň mentálnej rotácie v porovnaní so žiakmi z ostatných škôl. Okrem toho sa potvrdil aj štatisticky významný rozdiel v úrovni mentálnej rotácie medzi žiakmi študujúcimi stavebný odbor a tými, ktorí navštevovali odbory technické a informatické služby a mechanik stavebnoinštalačných zariadení.

Z uvedených analýz dvoch testov (stereometrického a mentálnej rotácie) bola vytvorená aj analýza vzťahu medzi ich riešeniami, pričom sa ukázali nasledujúce vzťahy:

- žiaci stavebného odboru boli najúspešnejší pri konštrukcii rezu kocky danou rovinou a vyznačení viditeľnosti jednotlivých strán rezového útvaru bez ohľadu na pohľad kocky,
- úroveň mentálnej rotácie u žiakov, ktorí Úlohu 1 neriešili nebola nízka, bola skôr nadpriemerná, so zvyšujúcou sa úrovňou mentálnej rotácie sa spájal vyšší bodový zisk v tejto úlohe,
- pri riešení rezu kocky danou rovinou v štandardnom pohľade mala úroveň mentálnej rotácie pozitívny a štatisticky významný vplyv na úspešnosť riešenia tejto úlohy,
- najúspešnejší v riešení Úlohy 2 (pri určovaní súradníc bodov v sústave súradníc v priestore) boli žiaci strojárstva a stavebného odboru,
- so zvyšujúcou úrovňou mentálnej rotácie sa spája aj vyšší bodový zisk v Úlohe 2 a neriešenosť úlohy nesúvisí s úrovňou mentálnej rotácie žiakov,
- úroveň mentálnej rotácie má pozitívny a štatisticky významný vplyv na úspešnosť riešenia danej úlohy,
- vo výbere a pomenovaní pohľadov daného telesa (Úloha 3) boli najúspešnejšími žiaci strojárkeho odboru (plný počet bodov – 90% žiakov) a stavebných odborov (plný počet bodov – 84% žiakov),
- so zvyšujúcou sa úrovňou mentálnej rotácie sa spájal vyšší bodový zisk v Úlohe 3,
- zo zakreslenia pohľadov daného telesa (Úloha 4) vyplynulo, že najlepšie výsledky dosiahli žiaci strojárkeho odboru a stavebných odborov, priemer bol rovnaký 2,71 z možných 3,

- so zvyšujúcou sa úrovňou mentálnej rotácie sa spája vyšší bodový zisk v danej Úlohe 4,
- žiaci, ktorí Úlohu 3 a Úlohu 4 neriešili majú pomerne vysokú úroveň mentálnej rotácie,
- úroveň mentálnej rotácie má pozitívny a štatisticky významný vplyv na úspešnosť riešenia Úlohy 3 a Úlohy 4,
- úroveň mentálnej rotácie má pozitívny a štatisticky významný vplyv na úspešnosť riešenia Úlohy 5 V2,
- úroveň mentálnej rotácie má pozitívny, ale štatisticky nevýznamný vplyv na úspešnosť riešenia Úlohy 5 V1,
- úroveň mentálnej rotácie má negatívny a štatisticky nevýznamný vplyv na úspešnosť riešenia Úlohy 5 V3.

Nami získané výsledky sme analyzovali taktiež vzhľadom na možné vzťahy medzi schopnosťou mentálnej rotácie žiakov vybraných odborov s technickým zameraním, ich vedomosťami v oblasti priestorovej geometrie a tiež ich odbornými vedomosťami v rámci navštevovaného odboru. Na základe analýzy vzorky žiakov z odborov stavitelstvo, technické a informatické služby, operátor stavebnej výroby a mechanik stavebnoinštalčných zariadení, sa potvrdilo nasledovné:

- pri vyššej schopnosti mentálnej rotácie mali žiaci aj lepšie výsledky v oblasti geometrie,
- ak žiaci lepšie zvládli geometrické úlohy, tým lepšie bolo aj ich riešenie úloh súvisiacich s daným technickým odborom,
- úroveň riešenia úloh súvisiacich s odborom nie je podmienená len vysokou úrovňou mentálnej rotácie, je rovnako nevyhnutné, aby žiaci disponovali aj dostatočnými vedomosťami a zručnosťami z oblasti priestorovej geometrie.

Na základe výsledkov výskumu môžeme konštatovať, že úspešná príprava žiakov pre prax si vyžaduje nielen dostatočne rozvinuté priestorové schopnosti, ale je potrebné disponovať aj matematickými, konkrétne geometrickými vedomosťami.

Aj keď informačné technológie ponúkajú čoraz väčšie možnosti modelovania a zobrazovania trojrozmerných modelov, stále považujeme za aktuálne a nevyhnutné podporovať myslenie žiakov aj prostredníctvom manipulácie s modelmi.

Vzhľadom na neoblúbenosť riešenej problematiky u žiakov považujeme za nevyhnutné do vyučovacieho procesu zaraďovať rôznorodé didaktické aktivity a inovatívne materiály. Tie by nemali mať len vedomostný alebo vzdelávací charakter, ale mali by byť zároveň vhodné na osvojovanie daného učiva a slúžiť hlavne ako silný motivačný prvok vo vyučovacom procese.

5 Implementácia problematiky do vyučovacieho procesu – aktivity a úlohy

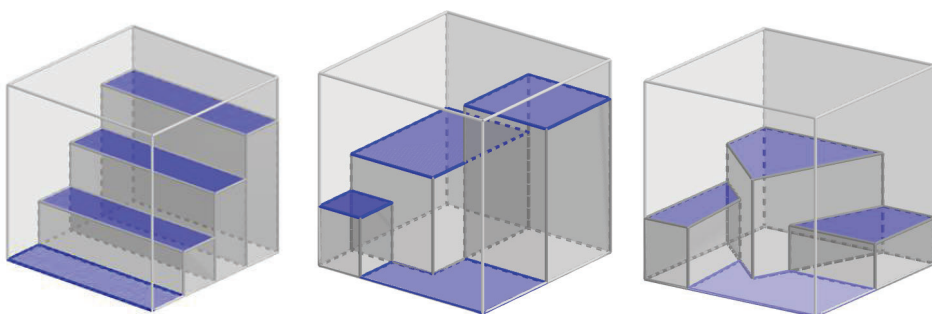
V nasledujúcej kapitole uvedieme niekoľko konkrétnych úloh alebo aktivít súvisiacich s nami riešenou problematikou, a teda sú vhodné na zlepšenie priestorovej predstavivosti žiakov. Sústredíme sa hlavne na originálne didaktické materiály, ktoré je možné efektívne využiť vo vyučovaní matematiky na stredných školách.

5.1 Úlohy ako mentálna rozcvička

Úlohy, ktoré uvádzame v tejto podkapitole, sú nenáročné a majú prípravný charakter. Premietanie (projekcia) jednotlivých útvarov, resp. trojrozmerných objektov do vybranej roviny (priemetne) slúžia na rozvoj priestorovej predstavivosti (Úloha 1, Úloha 2). Úlohy súvisiace s vlastnosťou hracej kocky (súčet bodiek na protiľahlých stenách sa vždy rovná 7) rozvíjajú aj kombinačné schopnosti (Úloha 3, Úloha 4, Úloha 5). Schopnosť vidieť v ikonickom (rovinnom) obrázku trojrozmerný objekt je prejavom dobrej úrovne priestorovej predstavivosti (Úloha 6). Pohyb po telese, či výpočet časti objemu vybraného objektu, súvisí s metrickými vlastnosťami a úlohami z praxe (Úloha 7, Úloha 8).

Úloha 1

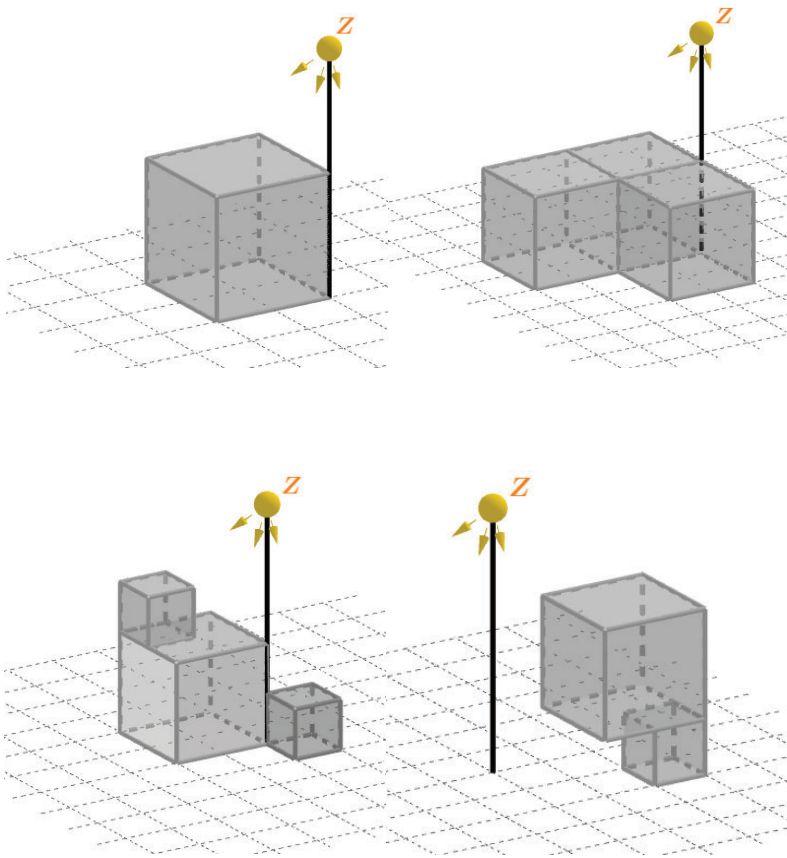
Do kocky s hranou dĺžky a sú vložené telesá (Obr. 37). Akú plochu majú namodro vyfarbené mnohoholníky?



Obr. 37 Telesá v kockách

Úloha 2

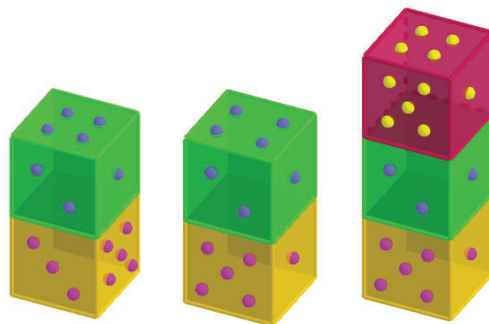
Bodový zdroj svetla Z osvetľuje jednotlivé telesá (Obr. 38). Nakreslite ich tieň.



Obr. 38 Telesá a bodový zdroj svetla

Úloha 3

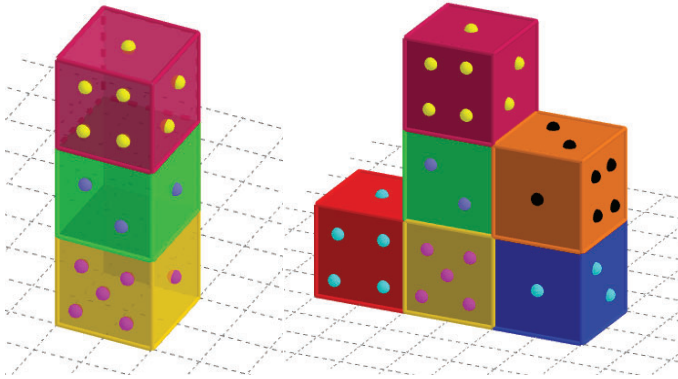
Hracie kocky na obr. 39 majú spoločné steny s rovnakým počtom bodiek. Aký je súčet bodiek na neviditeľných stenách hracích kociek?



Obr. 39 Hracie kocky

Úloha 4

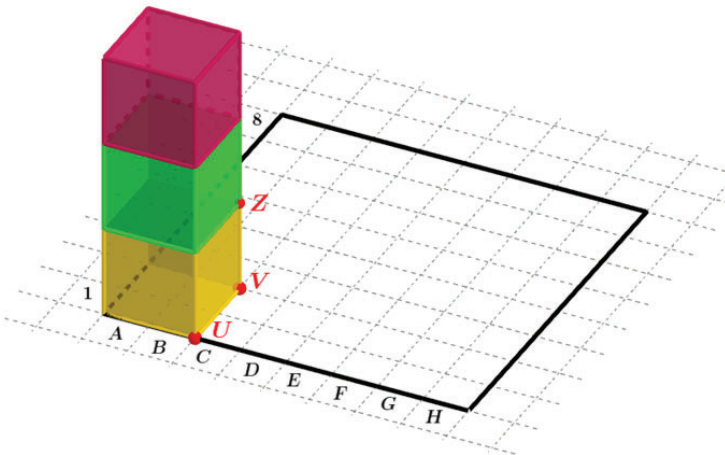
Stavby z kociek na obr. 40 sú zložené z hracích kociek. Učte súčet bodiek na tých stenách, ktoré sú rovnobežné s pôdorysňou alebo v nej ležia a nevidno na nich vyznačené príslušné body.



Obr. 40 Stavby z hracích kociek

Úloha 5

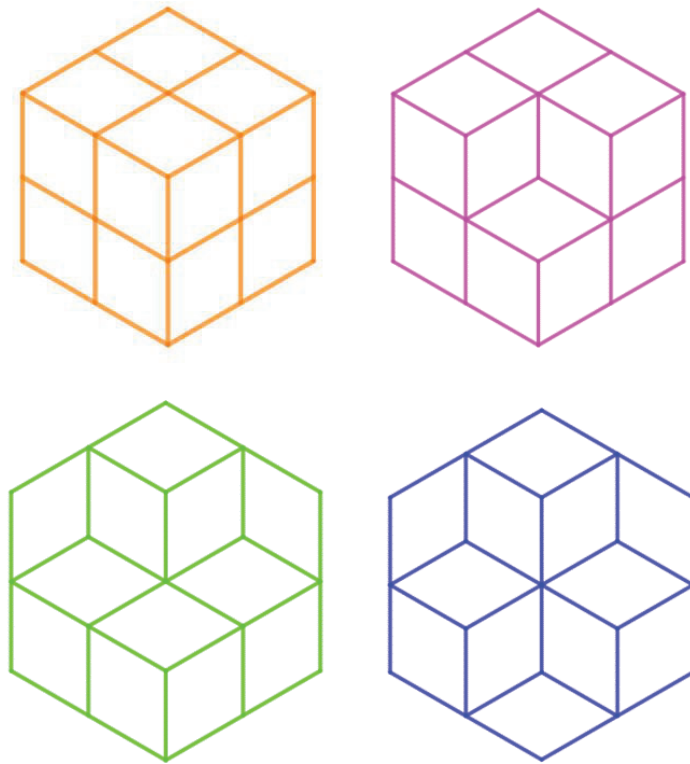
Stavbu z troch kociek (Obr. 41) najprv „prevrátime“ do roviny podstavy okolo priamky UV a následne na rovine otočíme okolo sklopeného bodu (Z) o 90° v smere pohybu hodinových ručičiek. Určte šachovnicové súradnice steny kocky, ktorá je označená zelenou farbou.



Obr. 41 Stavba z kociek v šachovnicovej sústave súradníc

Úloha 6

Koľko kociek je použitých v jednotlivých stavbách na obr. 42?

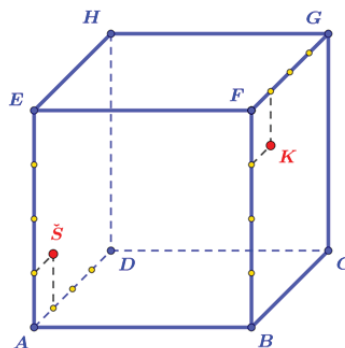


Obr. 42 Farebné stavby z kociek

Úloha 7

Kocka je položená na stole (stena $ABCD$ je na doske) a po jej povrchu sa pohybuje mravec. Vyštaruje z bodu S a skončí v bode K (Obr. 43).

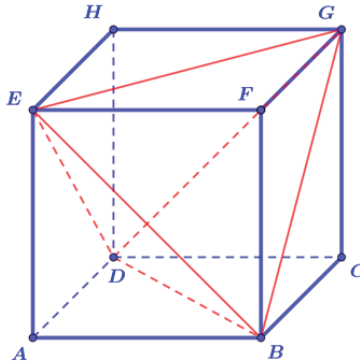
- Určte jeho najkratšiu možnú dráhu.
- Akú najkratšiu dráhu by prešiel, ak by sa pohyboval len v smere hrán kocky?



Obr. 43 Kocka a mravec

Úloha 8

Pomocou vrcholov kocky $ABCDEFGH$ určíme teleso s vrcholmi $BDEG$ ako je to uvedené na obr. 44. Aké je to teleso a koľko percent objemu zaberá z objemu kocky?



Obr. 44 Kocka a teleso

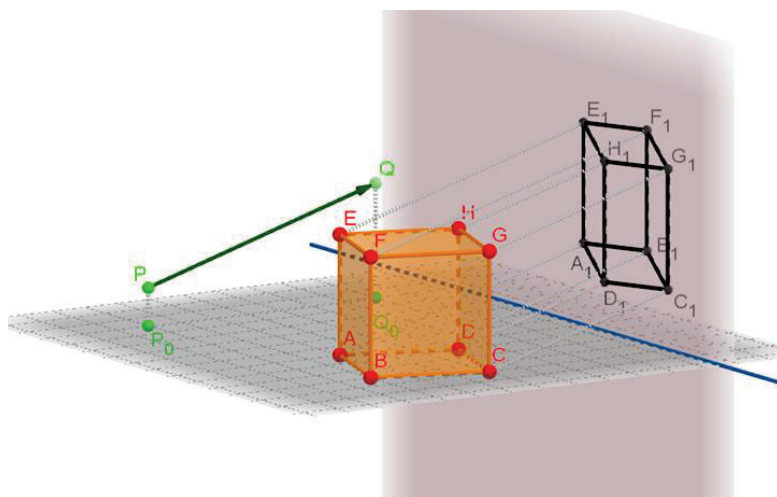
5.2 Úlohy zamerané na voľné rovnobežné premietanie

Voľné rovnobežné premietanie (v skratke VRP) je najpoužívanějšíe zobrazovanie trojrozmerných telies vo vyučovaní a to nielen matematiky, ale aj iných predmetov ako napr. fyzika, chémia alebo technická či výtvarná výchova. Základné princípy zobrazovania telies vo VRP sú žiakom známe a často zvládnuté formálne. Neraz im chýba názorná predstava o vytvorení príslušného obrazu telesa a to v závislosti od jeho pozície voči priemetni a smeru premietania. Vhodným výberom dynamického 3D softvéru možno modelovať princípy zobrazovania telies vo VRP. Tým sa zvýši úroveň priestorovej predstavivosti žiakov a zlepši aj schopnosť mentálnej rotácie telies v priestore.

Úloha 1

Vo vhodnom softvéri vymodelujte obraz telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní. Ako vzor použite kocku, ktorej polohu vzhľadom k smeru premietania (určeného vektorom $\vec{s}$) a priemetni π bude možné interaktívne zmeniť.

Námet na realizáciu je uvedený na obr. 45.



Obr. 45 Zobrazenie kocky vo voľnom rovnobežnom premietaní

Úloha 2

Zobrazte jednotkovú štvorcovú sieť pomocou voľného rovnobežného premietania a následne do nej zakreslite písmená rôzne písmená zo svojho mena.

Námet na realizáciu je na obr. 46.

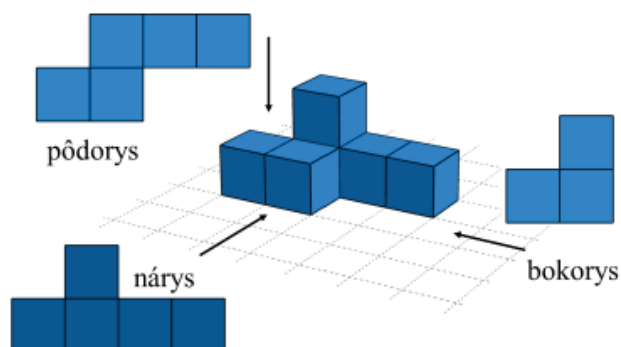


Obr. 46 Písmená e, A, Z vo voľnom rovnobežnom premietaní

5.3 Úlohy na modelovanie telies na základe slovného opisu

Jednou zo zložiek priestorovej predstavivosti je schopnosť vytvoriť si predstavu o telese na základe slovného opisu. Za účelom použitia v praxi je potrebné vytvorenú predstavu sprostredkovať iným a to pomocou grafického vyobrazenia. Najčastejším spôsobom je vytvorenie priemetov – pôdorysu, bokorysu, nárysu, či ďalších doplňujúcich rovinných rezov.

Pre určenie pohľadov na stavby z kociek a kvádrov (nárys, pôdorys, bokorys) sa budeme riadiť smermi určenými šípkami (Obr. 47).



Obr. 47 Pohľad na stavbu z kociek

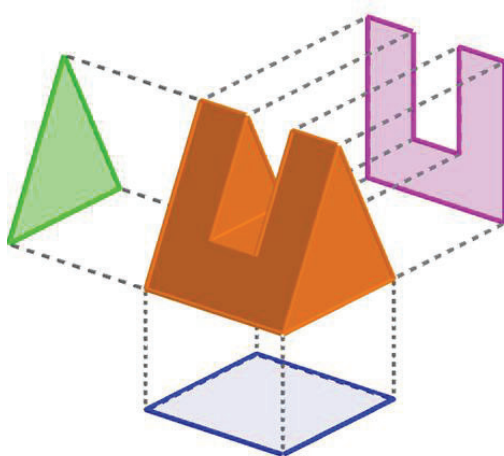
Úloha 1

Súčiastka mala pôvodne tvar pravidelného trojbokého hranola, ktorého podstavná hrana a výška mali hodnotu a . Zo súčiastky sa vyrezal menší pravidelný trojboký hranol tak, že:

- podstava mala hranu dĺžky $\frac{2}{3}a$,
- výška hranola mala dĺžku $\frac{a}{3}$,
- súčiastka bola rovinovo súmerná.

Vymodelujte súčiastku pomocou vhodného softvéru a určte jej pôdorys, bokorys a nárys.

Námet na realizáciu je na obr. 48.

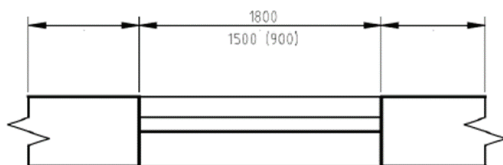


Obr. 48 Pohľady na teleso

Úloha 2

Narysujte zvislý rez oknom (Obr. 49) v mierke 1:50, ak viete, že:

- svetlá výška miestnosti by bola 2800 mm a konštrukčná výška 3100 mm,
- nadpražie rovné,
- okno zdvojené,
- kótovanie,
- výškové kóty.



Obr. 49 Okno

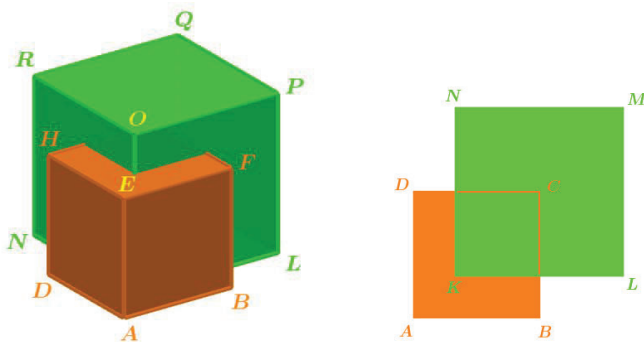
5.4 Úlohy a aktivity na prienik dvoch telies

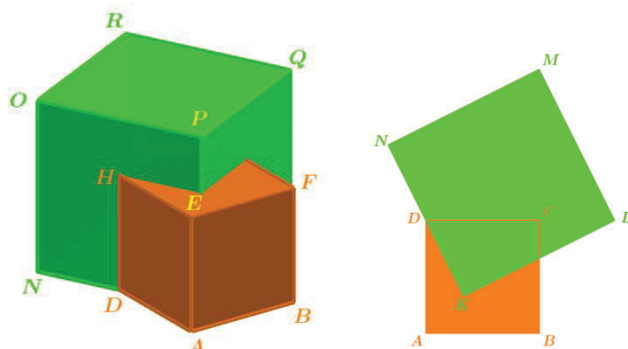
K štandardným stredoškolským stereometrickým úlohám patrí aj určovanie prieniku priamky s telesom. Riešenie úloh, v ktorých ide o určenie prieniku dvoch telies, je vhodný testovací nástroj vedomostí žiakov. Ide totiž o náročné „integrované“ úlohy. Vyžadujú sa a upevňujú vedomosti o vzájomnej polohe jednotlivých lineárnych útvarov, napríklad dvoch rovín, či priamok a rovín, rozvíjajú grafické zručnosti, a taktiež rozvíjajú schopnosť dobre sa orientovať v zložitejšom obrázku.

Úloha 1

Zostrojte a slovne opíšte prienik dvoch kociek naznačených na obr. 50, ak steny $ABCD$, $KLMN$ ležia v jednej rovine (ich vzájomná poloha podstáv je naznačená na obr. 50 vpravo). Vymodelujte prieniky vo vhodnom softvéri.

Dva námety na realizáciu uvádzame na obr. 50.

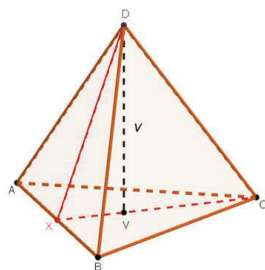




Obr. 50 Dve kocky a ich prienik

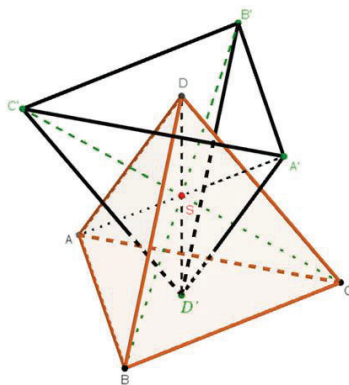
Úloha 2

Nech S je stred ľubovoľnej výšky štvorstena $ABCD$. Zobrazte štvorsten $ABCD$ v stredovej súmernosti podľa stredu S (Obr. 51). Následne zostrojte priesečník pôvodného a zobrazeného štvorstena.

Obr. 51 Štvorsten $ABCD$

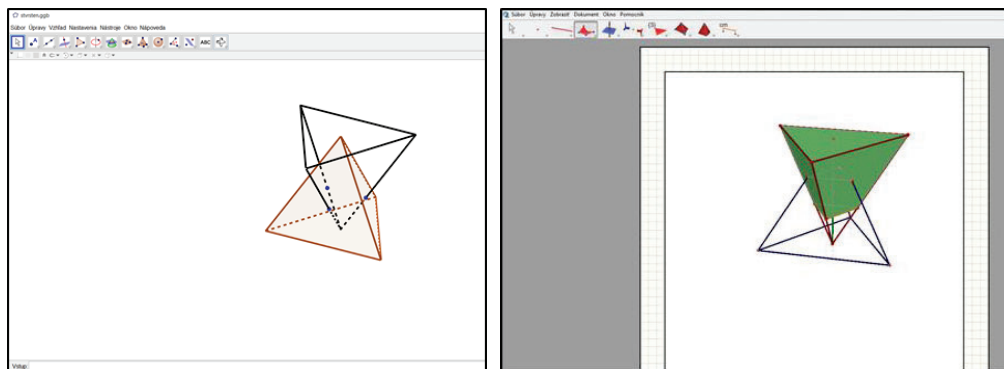
Námet k možnostiam riešenia úlohy.

Obrazom pravidelného štvorstena $ABCD$ v stredovej súmernosti podľa stredu S je pravidelný štvorsten $A'B'C'D'$ (Obr. 52).



Obr. 52 Štvorsten a jeho obraz v stredovej súmernosti

V rámci riešenia úlohy je možné úlohu ešte špecifikovať tak, že je potrebné vyznačiť v riešení napríklad prienik a zjednotenie štvorstenov, alebo tú časť štvorstena $ABCD$, ktorá bez prieniku zostane zo štvorstena $A'B'C'D'$. Riešenie úlohy nie je názorné vo voľnom rovnobežnom premietaní vzhľadom na predstavivosť, preto je vhodné je vizualizovať riešenie aj pomocou dynamických geometrických softvérov. Možné riešenia úlohy v GeoGebre (3D modul) a v Cabri 3D uvádzame na obr. 53.



Obr. 53 Využitie dynamických geometrických softvérov v riešení úlohy

5.5 Úlohy na rezy kockových telies a stavieb

Rovinné rezy kocky a ihlanov sú stereometrické polohové úlohy. Väčšinou ide o zadania, v ktorých sa vyžaduje zostrojiť rez jedného telesa (kocky, hranola, ihlana) jednou rovinou (určenou napr. tromi navzájom rôznymi bodmi v priestore). Úlohy, kde sa požaduje zostrojenie rezu nekonvexného telesa, sú neštandardné a pre žiakov zaujímavé.

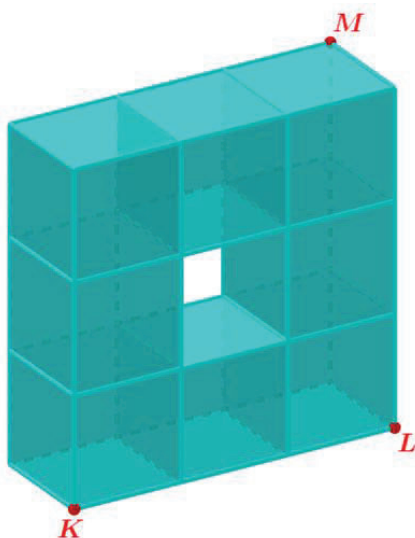
Kockové telesá, prípadné modifikované kockové stavby (zoskupenie viacerých kociek s rôzne dlhými hranami tak, že niektoré steny jednej kocky patria stene inej kocky) sú jednoduché modely rôznych súčiastok, stavieb, či iných predmetov.

Riešenie úloh o rezov na týchto telesách prináša iný pohľad na stereometrické učivo strednej školy a ukazuje na možné použitie získaných vedomostí v praxi (napr. prepílenie súčiastky daného tvaru kotúčovou pílou, ...). K praktickým úlohám patria aj tzv. opakované rezy na jednom telese prevedené rôznymi rovinami, napr. pílenie dreveného trámu na krov strechy dovtedy, kým nemá požadovaný rozmer a tvar. K nezvyčajným úlohám patria aj požiadavky na určenie metrických vlastností rezu (napr. obsah rezu, objem zvyšku telesa, ...), ktoré sú motivované praxou (napr. určenie spotreby materiálu na ďalšie spracovanie, ...).

Úloha 1

Zostrojte rez rovinou KLM kockového telesa na obr. 54 a vypočítajte jeho obsah.

Na danom obrázku uvádzame námet na kockové teleso a umiestnenie bodov K , L a M .

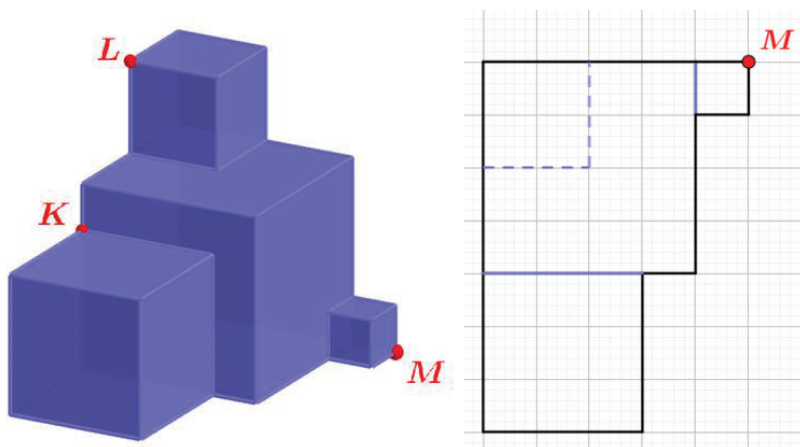


Obr. 54 Kockové teleso a body roviny KLM

Úloha 2

Teleso na obr. 55 (jeho pôdorys je naznačený vpravo) pozostáva z kociek s dĺžkami hrán 4 cm , 3 cm , 2 cm a 1 cm . Zostrojte rez rovinou určenou bodmi K , L a M .

Námet na kockové teleso a umiestnenie bodov K , L a M je súčasťou obr. 55.



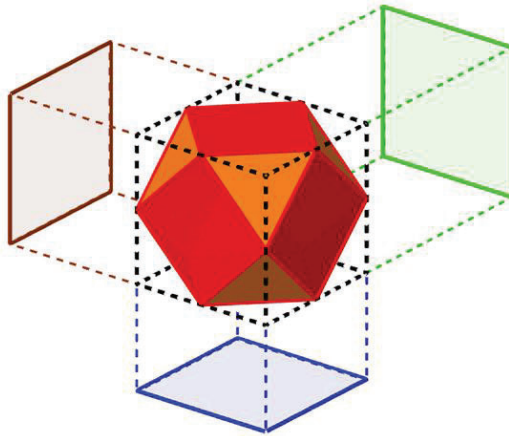
Obr. 55 Teleso s pôdorysom

Úloha 3

Z kocky s dĺžkou hrany a odrežeme postupne osem pravouhlých ihlanov tak, že ich hlavné vrcholy sú vo vrchoch kocky a podstava každého ihlana je určená stredmi

hrán, incidentných s hlavným vrcholom ihlana. Vo vhodnom softvéri znázorníte jednotlivé rezy kocky, určte pôdorys, bokorys a nárys zvyšku telesa. Určte tiež objem zvyšného telesa.

Námet na realizáciu je na obr. 56.



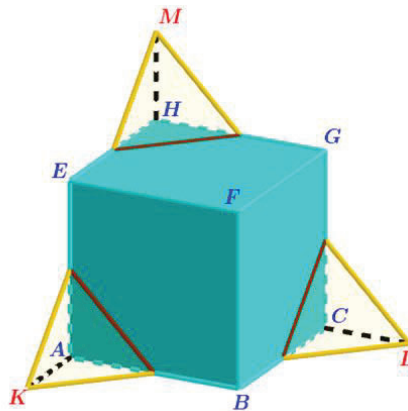
Obr. 56 Teleso vzniknuté z kocky

Úloha 4

Body K, L, M ležia postupne na predĺžení hrán DA, DC, DH kocky $ABCDEFGH$ tak, že $|AK| = |CL| = |HM| = \frac{|AB|}{2}$.

- Zostrojte rovinný rez kocky rovinou KLM .
- Zostrojte bokorys, nárys a pôdorys telesa, ktoré zostane po reze, ak odoberiete zvyšok obsahujúci vrchol F .

Námet na realizáciu uvádzame na obr. 57.



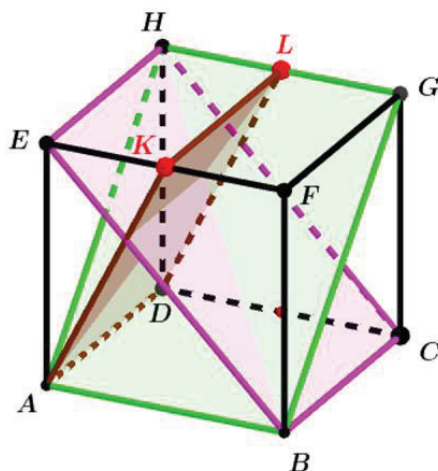
Obr. 57 Rez kocky danou rovinou

Úloha 5

Na kocke $ABCDEFGH$ je vyznačený bod K ako stred hrany EF . Pomocou vhodného softvéru určte zvyšnú časť telesa po troch na seba nadväzujúcich rezoch, ak by ste postupne:

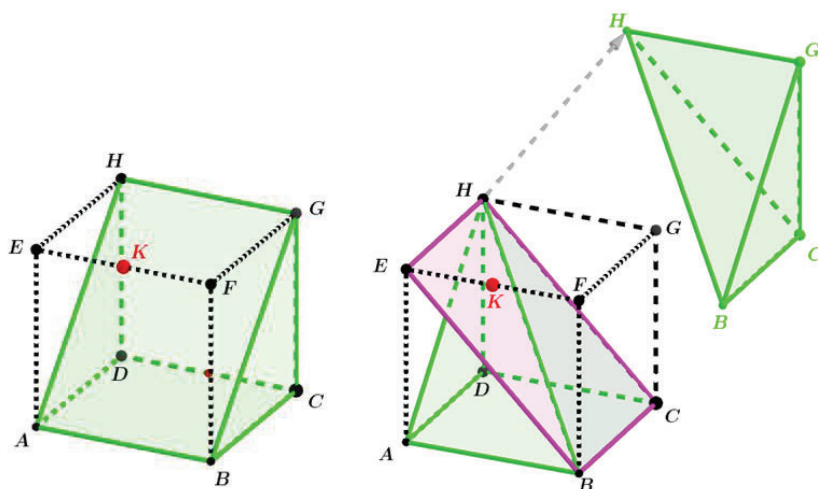
- po prvom reze rovinou ABG odstránili časť telesa obsahujúcu bod F ,
- po druhom reze rovinou BCE ponechali časť telesa obsahujúcu bod D ,
- po treťom reze rovinou ADK odstránili časť telesa obsahujúcu bod H .

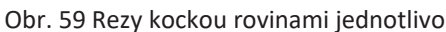
Námet na realizáciu je vidieť na obr. 58.



Obr. 58 Kocka a rez kocky tromi rôznymi rovinami

Na ďalšom obr. 59 sú naznačené postupne rezy kocky rovinami.

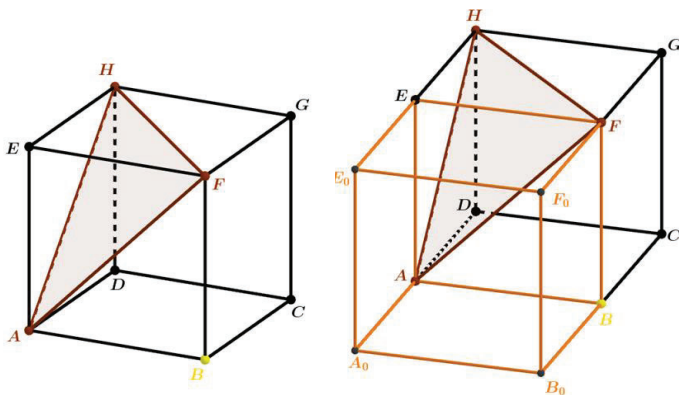


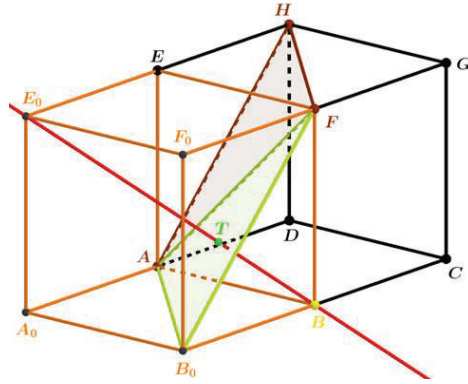


Myšlienka metódy „pridaj kocku“ je založená na doplnení „susednej“ kocky tak, že vznikne kockové teleso. Vzniknuté teleso je názornejšie a umožní žiakom riešenie úlohy (zvlášť metrických úloh) pomocou jednoduchších úvah, v ktorých sa spravidla odvoláva na základné poznatky o telesách, či stereometrické vety a kritériá.

Úloha 1

Námet na realizáciu je na obr. 60.





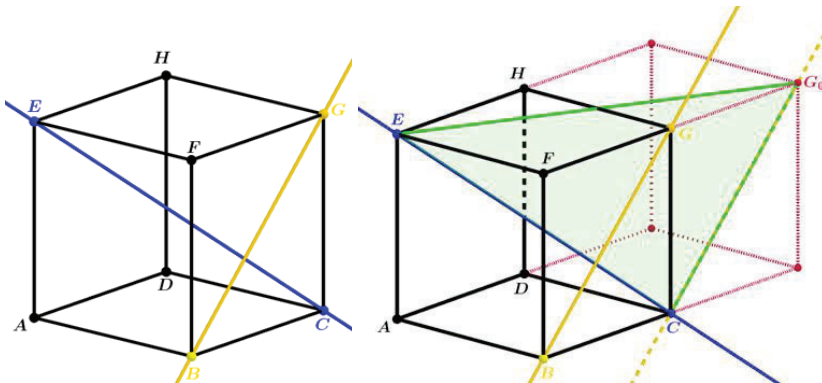
Obr. 60 Vzdialenosť bodu od roviny

Kolmica z bodu B na rovinu rezu AFH neprechádza vnútrom kocky $ABCDEFGH$. Pridaním zhodnej kocky tak, aby mali spoločnú stenu $ABFE$ doplníme danú kocku na kváder $A_0B_0CDE_0F_0GH$. Zostrojíme rez kvádom. Bod B má rovnakú vzdialenosť od bodov B_0 , A a F . Kolmica zostrojená z bodu B na rovinu rezu je telesová uhlopriečka doplnenej kocky $A_0B_0BAE_0F_0FE$. Vzdialenosť bodu B od roviny AFH sa rovná $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ (tretina dĺžky uhlopriečky; prienik priamky BE_0 s rovinou rezu je ťažisko trojuholníka AB_0F).

Úloha 2

Vypočítajte uhol priamok BG a CE , ktoré sú určené vrcholmi kocky $ABCDEFGH$.

Námet na realizáciu uvádzame na obr. 61.

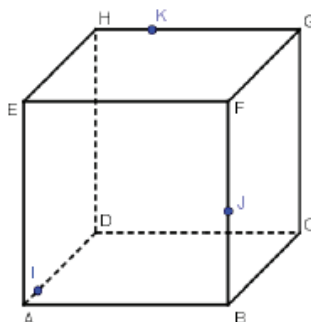


Obr. 61 Uhol dvoch priamok

Doplnením kocky a zostrojením rovnobežky CG_0 s priamkou CG získame trojuholník ECG_0 . Výpočtom sa presvedčíme, že pri vrchole C je pravý uhol. Priamky BG , CE sú na seba navzájom kolmé.

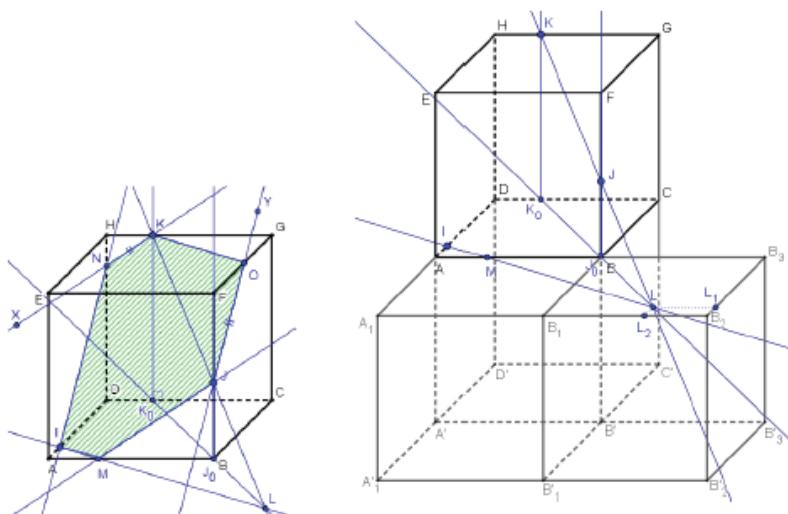
Úloha 3

Zostrojte rovinný rez kocky $ABCDEFGH$, ktorá je uvedená na obr. 62 a roviny $\overleftrightarrow{IJK}$.



Obr. 62 Rez kocky danou rovinou

Námet na dva spôsoby riešenia úlohy je na obr. 63.



Obr. 63 Rez kocky danou rovinou a využitie metódy „pridaj kocku“ v prvých krokoch riešenia úlohy

5.7 Aktivity súvisiace s extrémnymi úlohami

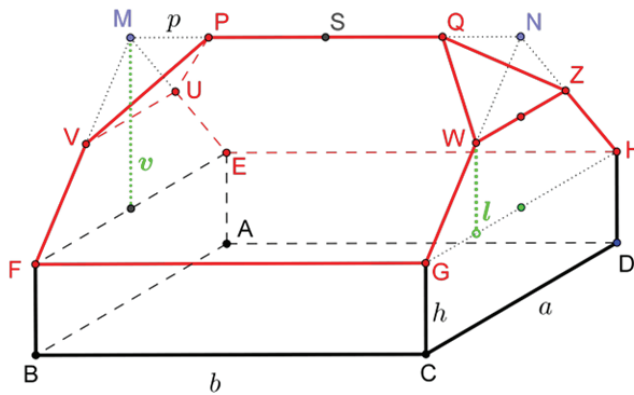
Úlohy, v ktorých ide o nájdenia najväčšej, resp. najmenšej, hodnoty určitej funkcie nazývame extrémnymi úlohami. Ich náročnosť a metódy riešenia sú rôzne. K štandardným postupom, ktoré identifikujú stacionárny bod (bod, v ktorom môže existovať lokálna extrémna hodnota), patrí použitie derivácie funkcie.

Táto metóda je však pre väčšinu stredoškôľakov nepoužiteľná, pretože diferenciálny počet nie je súčasťou obsahových štandardov iŠVP. Pomocou vhodného dynamického softvéru však žiaci dokážu sformulovať hypotézu o existencii príslušného extrému.

Ako námety na projekt predkladáme dve úlohy. Ku každej z nich uvedieme najprv stručný „teoretický úvod“.

Úloha 1 (tvar jednoduché strechy domu)

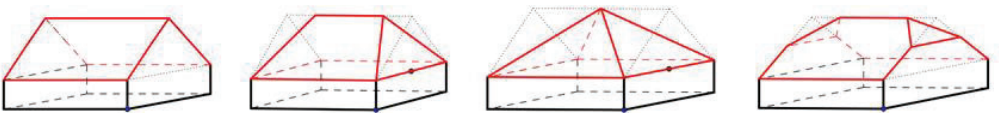
Vo vhodnom softvéri vymodelujte jednotlivé typy jednoduchých striech rodinných domov, ktoré majú obdĺžnikový pôdorys. Nastavte parametre pre polovalbovú strechu podľa obr. 64.



Obr. 64 Polovalbová strecha

Námet na riešenie je ďalším obr. 65, kde sú znázornené jednoduché strechy rodinných domov. Postupne zľava doprava ide o sedlovú strechu, valbovú strechu, stanovú strechu a polovalbovú strechu.

Ak pôdorys domu zostane rovnaký pre všetky uvedené typy striech, ktorý typ strechy má minimálny povrch? Je riešenie úlohy jednoznačné?



Obr. 65 Typy striech

Pre plochy striech platia vzorce:

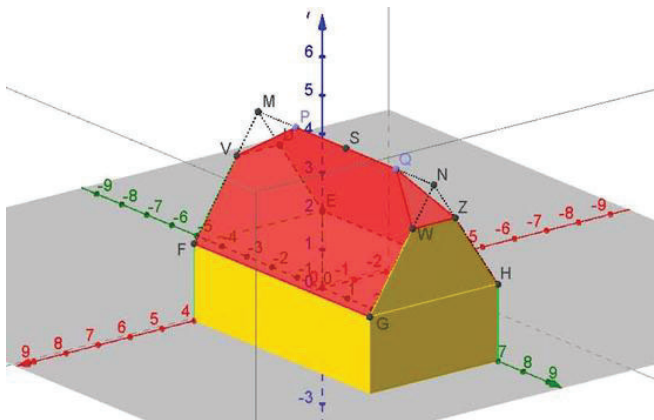
$$P_{\text{sedlová}} = b\sqrt{a^2 + 4v^2}$$

$$P_{\text{valbová}} = (b - p)\sqrt{a^2 + 4v^2} + a\sqrt{p^2 + v^2}$$

$$P_{stanová} = \frac{1}{2} \left(b\sqrt{a^2 + 4v^2} + a\sqrt{p^2 + v^2} \right)$$

$$P_{polovalbová} = (b - p)\sqrt{a^2 + 4v^2} \left(1 - \frac{l}{v} \right) + a \left(1 - \frac{2l}{\sqrt{2}v} \right) \sqrt{p^2 + (v - l)^2}$$

V príslušnom modeli určte parametre pre strechu s minimálnou plochou, napríklad Obr. 66.



Obr. 66 Príklad strechy s minimálnou plochou

Úlohu možno zadať ako projekt zameraný na prax. Zohľadnia sa jednotlivé typy striech, ako aj možnosť ich ďalšieho využitia podkrovia (napr. možná obytná časť), prípadne možnosti použitia krytín od rôznych výrobcov.

Teoretické výpočty možno softvérom automatizovať pre rôzne reálne situácie, napríklad pre výrobcom odporúčaný sklon strechy, s ohľadom spotrebu materiálu prepočítanú na m^2 plochy, rezervu v nákupe krytiny, cenu potrebných doplnkov (dažďové zvody, komín, strešné okno, ...). Započítať možno aj náklady na dopravu a vykládku zakúpenej krytiny, cenu práce a odhadovaný čas polozenia krytiny a podobne.

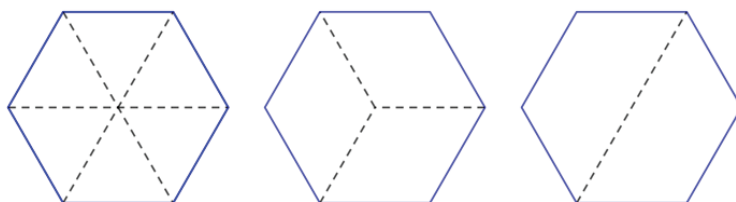
Úloha 2 (geometria včelieho plástu)

Vymodelujte (vo vhodnom softvéri) časť včelej bunky a určte (približne) hodnoty vnútorných uhlov kosoštvorca v prípade, že uvažovaná bunka bude mať minimálny povrch.

Námet na riešenie úlohy uvádzame ďalej.

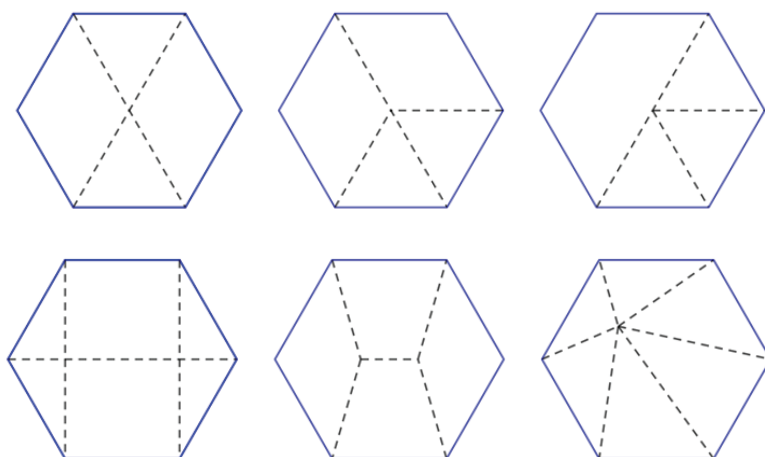
Pravidelný šesťuholník možno rozdeliť na rôzne rovinné útvary:

- navzájom zhodné (trojuholníky, kosoštvorce, lichobežníky) ako vidieť na obr. 67,



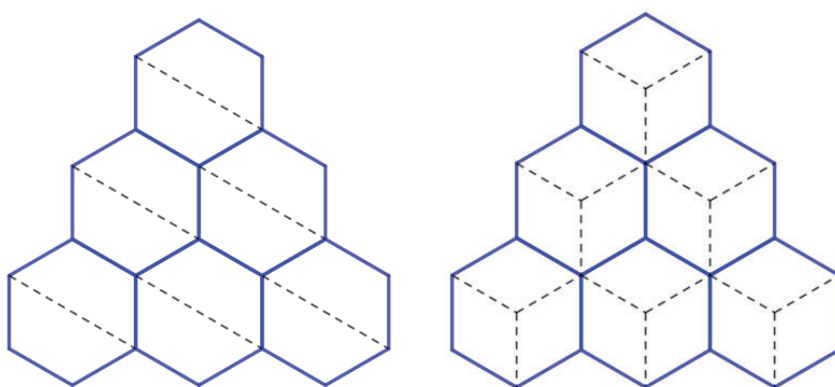
Obr. 67 Zhodné útvary pri delení šesťuholníka

- iné – kombinácie vyššie uvedených alebo náhodné rozdelenie (Obr. 68).



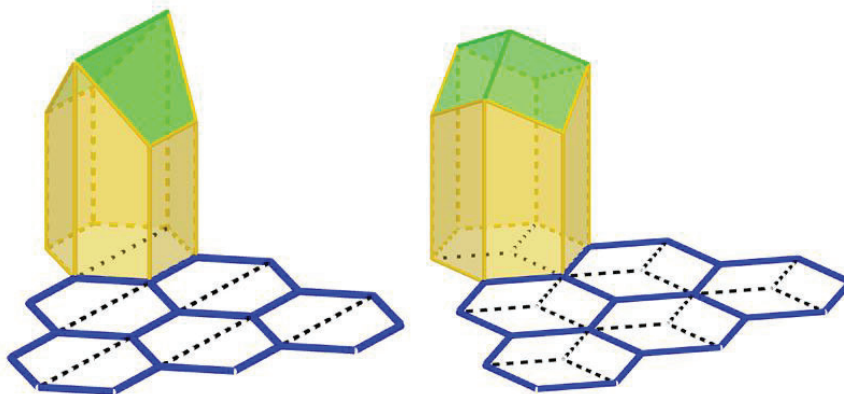
Obr. 68 Nezhodné útvary pri delení šesťuholníka

Pravidelný šesťuholník možno použiť ako dlažobnú tehličku na pokrytie časti. Ak by sme na ňom ponechali jednotlivé úsečky, dostali by sme rôzne zaujímavé vzory, napríklad ako uvádzame na obr. 69.



Obr. 69 Vzory z pravidelných šesťuholníkov

Tieto pokrytia môžu byť považované aj za pôdorysy zoskupených telies, ktoré sú naznačené na obr. 70.



Obr. 70 Telesá so šesťuholníkovým pôdorysom

Teleso vľavo by mohlo byť časťou tzv. plochého skrutkovača, kde sa zbrúsila horná podstava hranola na dva zhodné lichobežníky. Teleso vpravo môžeme považovať za jednu časť včelieho plástu, tzv. včelíu bunku, v ktorej sa rodia mladé včely alebo uskladňujú zásoby peľu a medu.

Z geometrického hľadiska nejde o šesťboký hranol, pretože samotné dno je zložené z troch kosoštvorcov. Tento tvar včeliej bunky je účelový. Pri konštantnom objeme sa tak minimalizuje povrch a tým aj znižuje spotreba včelieho vosku na jej vytvorenie. Rozmery včeliej bunky sú rôzne, závisia od viacerých faktorov (druh a veľkosť včiel, umiestnenie na pláste, ...).

5.8 Aktivity súvisiace so sieťami kocky

K častým manipulačným aktivitám, ktoré sa realizujú na hodinách matematiky, je vystrihovanie papierového modelu siete kocky. Z matematického hľadiska sieťou kocky intuitívne rozumieme množinu navzájom zhodných štvorcov, ktoré sú vhodne umiestnené v rovine (majú spoločné vybrané vrcholy a strany). Ich zložením v priestore dostaneme hranicu (obal) kocky.

Celkovo existuje až jedenásť rôznych typov siete kocky. Všetky siete kocky vieme skonštruovať so žiakmi experimentálne, ak postupujeme systematicky. V ďalšom texte uvádzame námet na takúto aktivitu.

Úloha 1

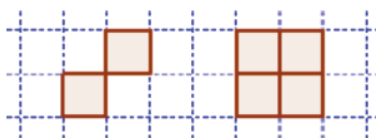
Zistite koľko existuje navzájom rôznych sietí kocky. Vymodelujte tieto siete ako papierové modely. Pri experimentovaní postupujte systematicky.

Uvádzame námet na realizáciu Úlohy 1.

V rovine vytvoríme štvorcovú mriežku, do ktorej umiestňujeme jednotkové štvorce:

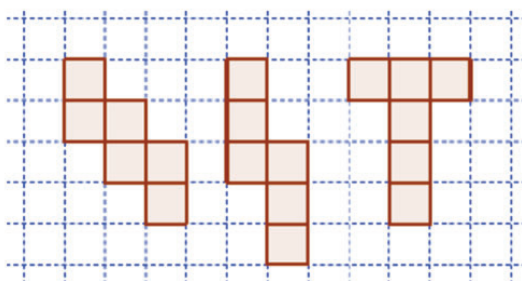
- vrcholy štvorcov sú mrežovými bodmi,
- vybrané dvojice štvorcov majú spoločnú stranu.

Nebudeme venovať pozornosť „uloženiam“ štvorcov na obr. 71, pretože buď odporujú druhému tvrdeniu (vybrané dvojice štvorcov majú spoločnú stranu) alebo z nich nie je možné vytvoriť sieť kocky.



Obr. 71 Nevhodné uloženie štvorce v štvorcovej sieti

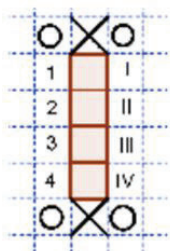
Používame označenie, ak na sieti kocky identifikujeme obdĺžnik, ktorého rozmery sú v pomere 4:1, povieme, že pôjde o sieť dĺžky štyri. Ak na sieti existuje obdĺžnik s pomerom dĺžok strán 3:1 a na tej iste sieti už neexistuje väčší obdĺžnik, povieme, že sieť má dĺžku tri. Obdobne sa určuje sieť kocky dĺžky dva (Obr. 72).



Obr. 72 Možné siete kocky

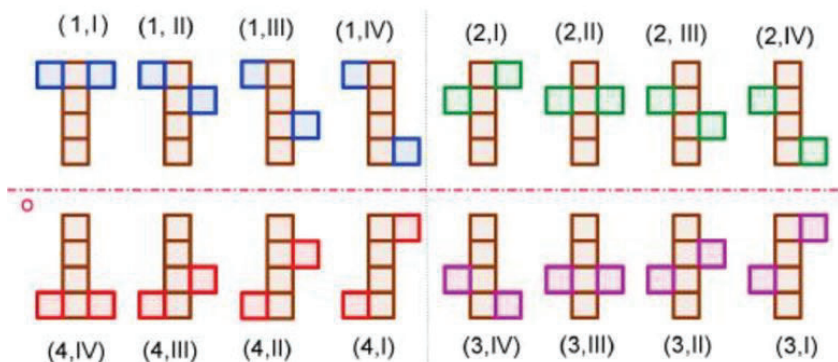
Pomocou vhodnej stavebnice alebo vystihnutých štvorcov z papiera začneme s „hľadaním“ sietí kocky dĺžky štyri.

Umiestnime obdĺžnik 4 x 1 do štvorcovej mriežky a označíme si „voľné pozície“ – rímskymi a arabskými číslicami (Obr. 73).



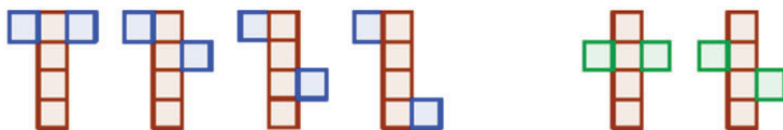
Obr. 73 Označenie obdĺžnika vo štvorcovej sieti

Prevereníím všetkých vyhovujúcich možností dostaneme tieto možnosti na obr. 74.



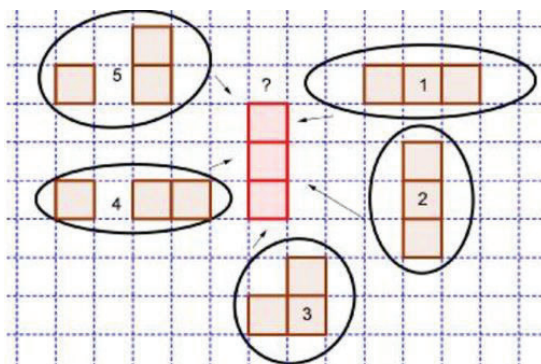
Obr. 74 Možnosti sietí kocky

Vyradeníím duplicitných možností, napr. (1, II) a (4, III) sú identické siete, získame len šesť možností (Obr. 75).



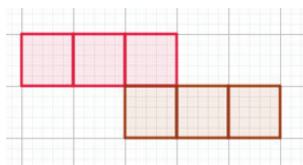
Obr. 75 šesť možností pre sieť kocky

Pri sieťach dĺžky tri je dopĺňanie chýbajúcich troch štvorcov náročnejšie na predstavivosť. Vychádzame zo základného rozloženia, kde ku dĺžke tri pridávame uvedené obrazce (Obr. 76).



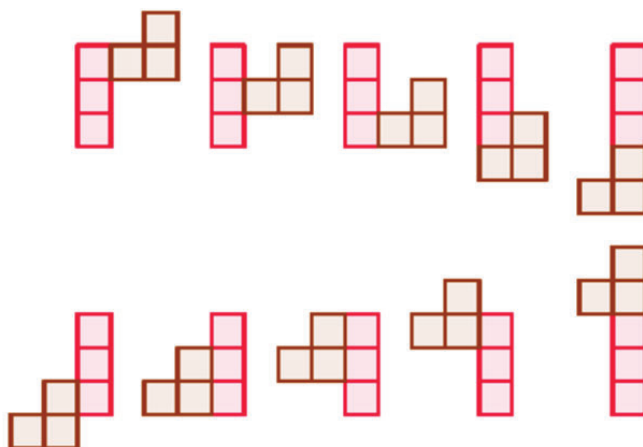
Obr. 76 Tvorba siete kocky pridaním obrazcov

Preverení všetkých možností zistíme, že existuje len jedna sieť dĺžky tri, kde sme pridali útvary zo skupín označený ako „1“, resp. „2“ (Obr. 77).



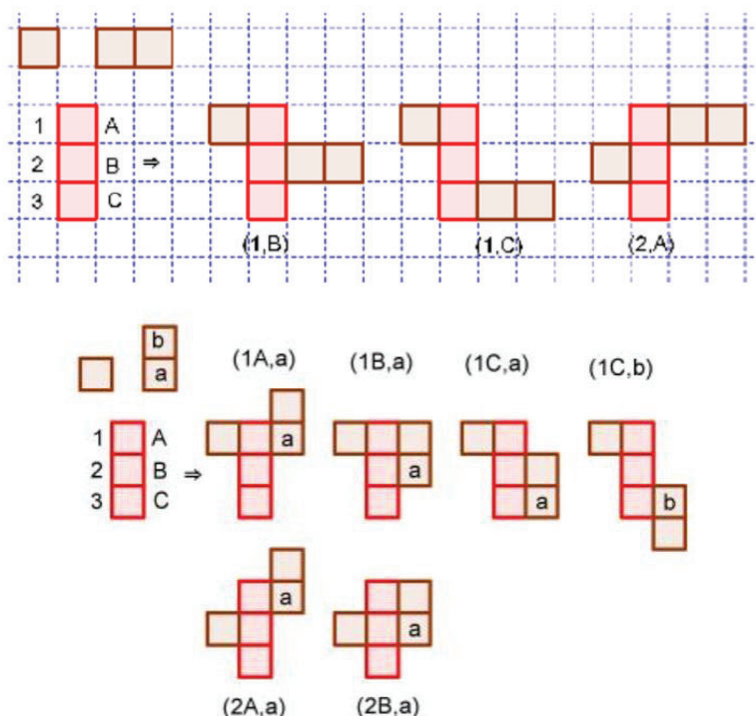
Obr. 77 Sieť kocky dĺžky tri

Ak ku „základu“ dĺžky tri prikladáme šesťuholník zo skupiny „3“, dostaneme útvary, ktoré nemôžu byť sieťou kocky, napríklad ako uvádzame na obr. 78.



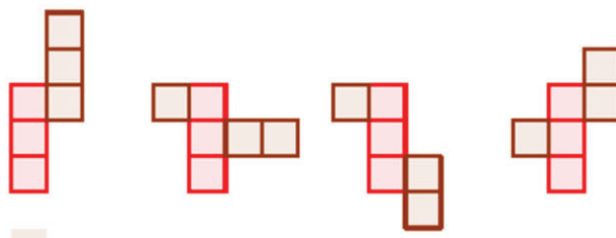
Obr. 78 Ukážky mnohouholníkov, ktoré nie sú sieťami kocky

Pokračujeme a ku „základu“ dĺžky tri prikladáme útvary zo skupín „4“ alebo „5“ podľa schém (Obr. 79).



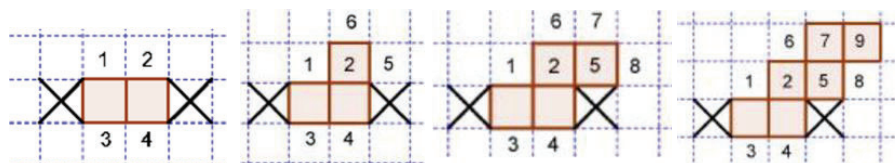
Obr. 79 Ďalšie mnohoúhelníky získané zo základu s dĺžkou tri

Po vyradení zhodných útvarov, Odvodíme, že existujú ďalšie tri siete dĺžky 3. Celkovo existujú štyri siete kocky dĺžky tri (Obr. 80).



Obr. 80 Ďalšie siete kocky

Pri hľadaní sietí dĺžky dva postupujeme nasledovne. Začneme s obdĺžnikom s rozmermi 2 x 1 a postupne pridávame po jednom štvorci tak, aby sme vždy zachovali dĺžku dva. Voľné pozície postupne čísloujeme (Obr. 81).



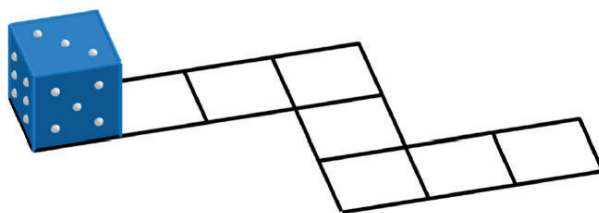
Obr. 81 Možné siete kocky s dĺžkou dva

Posledný útvar na obr. 81 je sieť kocky dĺžky dva. Ide o jedinú sieť takejto dĺžky (neuvažujeme zhodné útvary).

Záverom môžeme konštatovať, že existuje jedenásť rôznych sietí kocky (šesť má dĺžku štyri, štyri majú dĺžku tri a jedna má dĺžku dva).

Úloha 2

Do každého políčka herného plánu (Obr. 82) nakresli počet bodiek, ktoré budú viditeľné na stene kocky po jej otočení o 90° v smere pohybu. Nezabudnite, že súčet bodiek na protiľahlých stenách kocky je vždy sedem.

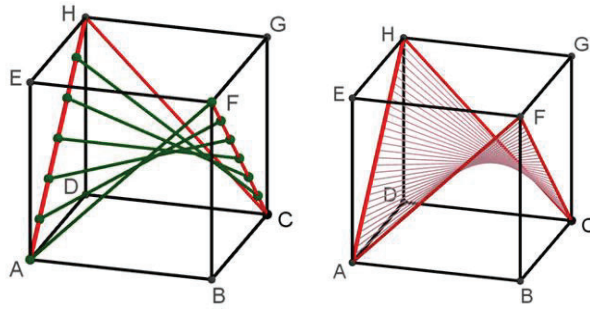


Obr. 82 Hrací plán a kocka

5.9 Strechy ako stavebné plochy v úlohách

Jednoduché strechy (rodinných) domov, ktorých časti sú mnohouholníky, sú pomerne častým riešením prekrytia stavieb. Existujú však aj zložitejšie typy, ktoré sú časťami hladkých plôch a dajú sa odlievať z betónu, prípadne „vyskladať“ ako časti dosiek, hranolov alebo železných prútov. Takých typov striech je v stavebníctve veľa, avšak k pomerne známym patria dve plochy – hyperbolický paraboloid (má tvar časti „sedla“) alebo tzv. konoidy.

Hyperbolický paraboloid je kvadratická plocha, ktorá je tzv. priamková plocha. Plocha, ktorú možno „vyskladať“ z priamok (nazývajú sa povrchové priamky), resp. úsečiek. Časť hyperbolického paraboloidu vymodelujeme pomocou priestorového štvoruholníka – štvoruholníka, ktorého protiľahlé strany sú mimobežkami (nemusia byť pravidelné, pokiaľ ide o dĺžky strán alebo veľkosti odpovedajúcich si uhlov. Symetria je však konštrukčnou výhodou). Napríklad v kocke $ABCDEFGH$ zvolíme ako vrcholy priestorového štvoruholníka body A, H, C, F . Na jeho stranách AH, FC zostrojíme n ($n \in \mathbb{N}$) bodov, ktoré budú krajnými bodmi úsečiek (Obr. 83).



Obr. 83 Časť hyperbolického paraboloidu v kocke

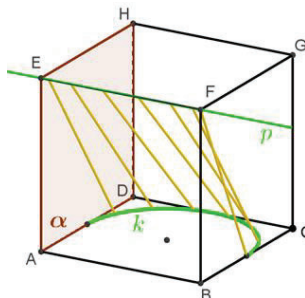
Úsečky konštruujeme postupne – začneme úsečkou AF a ďalej vykresľujeme až po body H, C .

Poznámka. V stavebníctve sa často používali časti hyperbolických paraboloidov ako strechy rôznych prístreškov (napr. na nástupištiach), ktoré sa odlievali zo železobetónu (povrchové úsečky znázorňujú železnú výstuž). Dažďová voda sa odvádzala zväčša cez nosný stĺp.

Konoid je špecifická plocha, ktorá tiež patrí medzi priamkové plochy. Ak máme určenú krivku k , rovinu α a ďalšiu priamku p , ktorá neleží rovine α , potom množina priamok, ktoré prechádzajú bodmi krivky k a priamky p tak, že sú rovnobežné s danou rovinou α , vytvárajú plochu zvanú konoid.

Krivka k býva v technickej praxi najčastejšie kružnicovým oblúkom alebo časťou paraboly. Hovoríme o kružnicovom, resp. parabolickom konoide. Napr., na obrázku je časť polkruhového konoidu. V kocke $ABCDEFGH$ sme zvolili ako krivku k polkružnicu (ležiacu v stene $ABCD$ tak, aby sa dotýkala hrany CD a body jej priemeru boli stredy hrán AD, BC), priamku $p \equiv FG$ a rovinu $\alpha \equiv ADH$.

Poznámka. V stavebníctve sa konoidy (Obr. 84) používali ako oporné steny na zadržanie sypkých materiálov, prípadne to boli stropy krížových klenieb nad nepravidelným pôdorysom. Časté bolo aj použitie v podobe slnečných markíz, ktoré boli samonosné (nepotrebovali oporný stĺp).



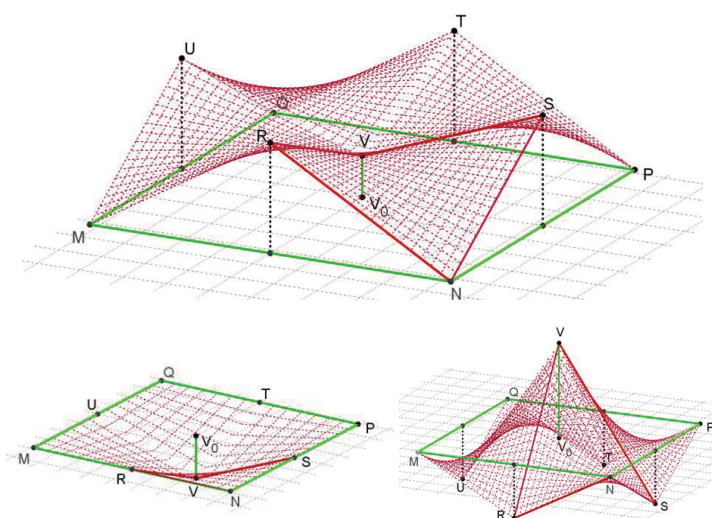
Obr. 84 Model konoidu v kocke

Úloha 1 (hyperbolický paraboloid ako strecha)

Na kolmiciach k rovine štvorca $MNPQ$ sú postupne zostrojené body R, S, T a U tak, päty kolmíc sú stredmi jeho strán. Bod V leží na kolmici k rovine daného štvorca, ktorého päta kolmice je jeho stredom.

Nad priestorovými štvoruholníkmi $RNSV, PTVS, QUVT$ a $MRVU$ vymodelujte (vo vhodnom softvéri) časti hyperbolických paraboloidov ako strechu, ktorej dažďovú vodu odvádzajú stĺpy ukotvené vo vrcholoch štvorca a v jeho strede. Zhotovte interaktívny model tak, aby bolo možné zmeniť vzdialenosti bodov R, S, T, U, V od roviny štvorca $MNPQ$.

Námet na realizáciu vidieť na obr. 85.

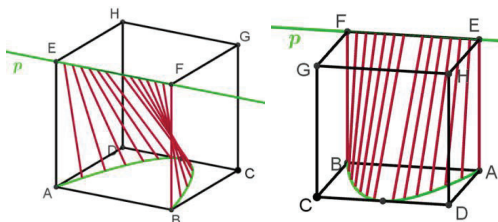


Obr. 85 Hyperbolický paraboloid ako strecha

Úloha 2

Pomocou vrcholov kocky $ABCDEFGH$ vymodelujte (vo vhodnom softvéri) časť konoidu, ak určujúca krivka je časťou paraboly prechádzajúcej bodmi A, B a vrcholom v strede hrany CD , ktorej určujúca priamka $p \equiv EF$ a rovina $\alpha \equiv ADH$.

Námet na realizáciu je na obr. 86.



Obr. 86 Časť konoidu vymodelovaného v kocke

6 Ukážky metodík pre učiteľov stredných odborných škôl: Vizualizácia priestoru s využitím prostriedkov IKT

V jednotlivých predchádzajúcich kapitolách publikácie sme sa zaoberali priestorovou predstavivosťou, jej rozvojom, ako aj základnou zobrazovacou metódou rovnobežným premietaním.

V ďalšej kapitole sa venujeme aj didaktike jeho výučby v matematickom vzdelávaní v kontexte Štátneho vzdelávacieho programu. Uvádzame nami navrhnuté metodiky k riešenej problematike, titulné listy metodík sú uvedené v Prílohe B.

6.1 Zobrazujeme 3D do 2D

Metodika „Zobrazujeme 3D do 2D“ je úzko spojená s problematikou zobrazovania priestoru s využitím rovnobežného premietania. Je vhodná pre všetky prvé ročníky stredných odborných škôl na zopakovania si princípov voľného rovnobežného premietania.

Úvod k metodike

V rámci úvodu do vyučovania geometrie priestoru je potrebné vysvetliť ako trojrozmerný geometrický útvar znázorniť v rovine (t. j. na tabulu, papier, do zošita ...). Je potrebné využiť v školskej praxi také premietanie z priestoru do roviny, aby spĺňalo zásady správnosti, názornosti a bolo pre žiakov aj jednoduché. Uvedené vlastnosti má rovnobežné premietanie. Žiaci by mali vedieť aspoň základné spôsoby a princípy zobrazovania základných geometrických útvarov do roviny, nielen automaticky pracovať s priemetom útvaru v rovine. Preto uvedený návrh na projektové vyučovanie môže pomôcť žiakom ujasniť si poznatky súvisiace s rovnobežným premietaním, a to vlastným skúmaním, pričom sme sa snažili skombinovať manipulatívnu činnosť žiakov s prácou v GeoGebre (3D modul). Žiaci rozdelení do skupín po vyriešení zadaných problémových úloh a po prezentácii ich výsledkov, vrátane záverečnej spoločnej diskusie s učiteľom, by mali pochopiť princíp rovnobežného premietania priestoru do roviny aj s jeho základnými vlastnosťami.

Priebeh výučby

- Podnet a motivácia (utvrdenie si základných pojmov súvisiacich s rovnobežným premietaním)
- Spoločné plánovanie (plán riešenia projektu, skupinová práca žiakov)

- Realizácia a prezentácia výsledkov (práca žiakov v skupinách, prezentácia žiackych zistení spojená s diskusiou)
- Hodnotenie výsledkov

Podnet a motivácia (cca 10 min.)

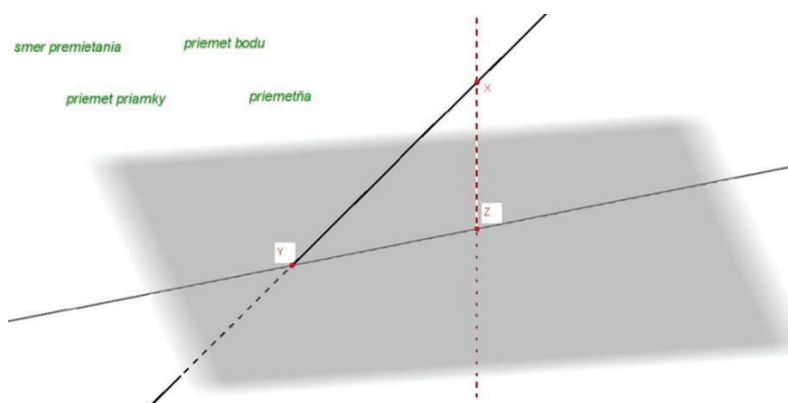
Na začiatku vyučovacej hodiny učiteľ vzbudí záujem žiakov o rovnobežné premietanie pomocou obrázkov, úloh a otázok, ktoré sú uvedené v pracovnom liste s názvom PL: Zobrazujeme 3D do 2D – motivácia (Príloha C). Hlavným zámerom úvodných úloh je zistiť, či žiaci majú predstavu o tom:

- aký je princíp rovnobežného premietania a čím je určené toto premietanie,
- čo môže byť priemetom rôznych geometrických útvarov,
- či si uvedomujú, že často riešia priestorovú situáciu v zošitoch, na papieroch, resp. učiteľ na tabuli, a teda túto situáciu riešia v rovine – v tzv. priemetni.

Riešenie úloh v uvedenom pracovnom liste využije učiteľ na motiváciu žiakov a zadáva im otázky na utvrdenie si pojmov priemetňa, smer premietania, priemet. Uvedieme príklady takýchto otázok:

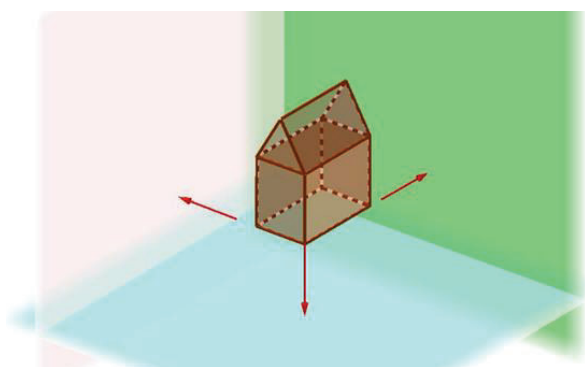
- Kde ležia priemety geometrických útvarov?
- Akú vlastnosť má smer premietania vzhľadom na rovinu, kde ležia priemety útvarov?
- Menia sa priemety daného geometrického útvaru pri zmene smeru premietania? Prečo?
- Má vplyv smer premietania na názornosť priemetu geometrického útvaru?

Poznámka. Úlohy v pracovnom liste (PL: Zobrazujeme 3D do 2D – motivácia) by mali viesť k utvrdeniu si princípu zobrazovania základných geometrických útvarov v rovnobežnom premietaní. Cieľom úlohy 1 je ujasniť si, čo je vlastne premietanie a aké pojmy sa žiakom s ním spájajú. Učiteľ v úlohe 2 využije pri práci so žiakmi interaktívne cvičenie na utvrdenie si pojmov súvisiacich s problematikou rovnobežného premietania (Obr. 87). Tiež s nimi diskutuje a môže otáčať s priemetňou, pričom zdôvodňuje dané zistenia v rámci riešenia tejto úlohy.



Obr. 87 Zadanie úlohy 2 v dynamickom programe GeoGebra v 3D module

V úlohe 3 učiteľ dá žiakom načrtnúť priemet domčka do daných troch rovín. Následne si tieto riešenia spoločne skontrolujú pomocou vytvorenej interaktívnej ukážky (Obr. 88), kde otáčaním domčka možno zobrazíť jeho priemety v jednotlivých rovinách.



Obr. 88 Zadanie úlohy 3 v dynamickom programe GeoGebra v 3D module

Vzhľadom na diskusiu učiteľa so žiakmi, ktorá vznikne pri spoločnom riešení uvedeného pracovného listu, učiteľ navodí problémovú situáciu. Tá bude zameraná na ďalšie bádanie, aké konkrétne priemety môže mať zadaný rovinný útvar v rovnobežnom premietaní. Toto bádanie bude súčasťou projektovej metódy realizovanej na vyučovacej hodine.

Zadania problémových úloh pre ďalšiu prácu žiakov na projekte sú uvedené v pracovnom list s názvom PL: Problémové úlohy pre projekt žiakov (Príloha D):

Úloha 1

Opíšte úsečku, ktorej priemetom v rovnobežnom premietaní je jeden bod. Existuje viacej možností?

Úloha 2

Zistite, aký geometrický útvar môže byť priemetom dvoch rovnobežných priamok v rovnobežnom premietaní. Tieto priamky sú rôznobežné s priemetňou a premietame ich kolmo do priemetne (t. j. smer premietania vzhľadom na priemetňu je kolmý).

Úloha 3

Aký geometrický útvar môže byť priemetom trojuholníka v rovnobežnom premietaní, ak smer premietania je rôznobežný s priemetňou?

Vhodné je upozorniť žiakov, že pri jednotlivých zadaniach úloh treba uvažovať o smere premietania a o polohe roviny vzhľadom na priemetňu, v ktorej leží daný geometrický útvar, t. j. treba uvažovať aj o vzájomnej polohe týchto dvoch rovín a smeru premietania. Uvedené vzájomné polohy ovplyvňujú výsledok, a teda aj priemet tohto geometrického útvaru.

Žiaci by mali prísť v rámci riešenia úlohy 1 na to, že musia zisťovať priemety úsečky, ak je daná úsečka s priemetňou rovnobežná alebo rôznobežná, prípadne úsečka leží v priemetni. Ďalej by sa mohli žiaci zamýšľať aj nad tým, ako sa uvedená úsečka premieta v rôznych vzájomných polohách vzhľadom na priemetňu, ak smer premietania je kolmý (rôznobežný) na priemetňu.

Rovnobežné priamky sú v úlohe 2 zadané tak, že sú s priemetňou rôznobežné. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe žiaci zisťujú, aké sú priemety priamok v danej polohe vzhľadom na priemetňu pre uvedený smer premietania.

V úlohe 3 si žiaci musia uvedomiť, že trojuholník je rovinný útvar. Žiaci preto zisťujú priemet tohto útvarov vzhľadom na polohu roviny (v ktorom daný útvar leží) a priemetne, resp. vzhľadom na vzájomnú polohu roviny útvaru a smeru premietania.

Spoločné plánovanie (cca 3 min.)

Žiaci sa rozdelia do skupín, pričom maximálny počet žiakov v jednej skupine je päť. Následne učiteľ vysvetlí žiakom, že výsledkom ich práce je skupinová prezentácia získaných odpovedí na uvedené problémové úlohy. Každá skupina si premyslí plán riešenia projektu. Žiaci si zvolia medzi sebou vedúceho skupiny, ktorý bude zistené výsledky prezentovať, a tiež sa dohodnú, akým spôsobom táto prezentácia prebehne. Ďalšiemu členovi skupiny bude pridelená funkcia zapisovateľ, pričom jeho úlohou bude zaznamenať príslušné odpovede na zadane problémové otázky. V rámci pracovného listu (PL: Problémové úlohy pre projekt žiakov) je aj tabuľka, do ktorej si žiaci môžu zapisovať svoje zistenia.

Skupina si taktiež zváži, či majú k dispozícii potrebný materiál pre riešenie úloh, či je každému žiakovi zrozumiteľné zadanie problémovej situácie a typ činnosti, ktorú sa žiaci rozhodnú použiť pri svojom riešení. Učiteľ môže žiakom odporučiť používať

aj manipulatívnu činnosť s rôznymi dostupnými rysovacími a písacími pomôckami, ale aj geometrický program GeoGebra. Upozorní žiakov, že svoje zistenia budú prezentovať v závere vyučovacej hodiny a budú mať na to priestor cca. 3 min.

Pomôckami pre učiteľa bude tabuľa, krieda, počítač, dataprojektor. Učiteľ vysvetlí žiakom aj spôsob hodnotenia projektu (splnenie úloh, správnosť úvahy, tvorivosť, prezentácia výsledkov).

Realizácia a prezentácia výsledkov (cca 27 min.)

Projekt sa rieši v triede v rámci jednej vyučovacej hodiny. Žiaci v triede sú rozdelení do viacerých skupín, pričom ich cieľom práce je vyriešiť vyššie uvedené problémové úlohy. Počas projektového plánovania, ale aj realizácie projektu je učiteľ v pozícii konzultanta, pomáha žiakom len v prípade nutnosti. Na prácu v skupinách majú žiaci približne 15 minút vrátane prípravy stručnej záverečnej prezentácie ich zistení.

Vedúci skupín si vyžrebujú poradie, v ktorom budú skupiny prezentovať svoje projekty. Voľba náhodného poradia tak minimalizuje časové straty počas vyučovacej hodiny. Potom vedúci každej skupiny prezentuje svoju prácu, podá konkrétne vysvetlenia k jednotlivým zadaným úlohám. Prebehne aj prípadná vizualizácia odpovedí na tieto problémové úlohy. Vedúci skupiny tiež môže vo svojej prezentácii zhodnotiť, čo sa im na projekte podarilo dosiahnuť, s čím mali prípadné problémy a ako sa im pracovalo v skupine. Po každej prezentácii skupiny nasledujú otázky od žiakov z ostatných skupín, ktoré súvisia s prezentovanými zisteniami danej skupiny. Takýto postup sa zopakuje pre všetky skupiny žiakov.

Hodnotenie výsledkov (cca 5 min.)

V závere vyučovacej hodiny učiteľ slovne hodnotí prácu všetkých skupín, pričom stručne analyzuje ich riešenia. Odporúčame učiteľovi vyzdvihnúť pracovnú atmosféru počas vyučovacej hodiny, oceniť prácu všetkých žiakov a poďakovať im za vyriešenie problémových úloh. Ak má nejaký žiak potrebu vyjadriť sa k hodnoteniu projektu, tak to učiteľ žiakovi umožní.

Učiteľ stručne zopakuje žiakom správne odpovede na zadané problémové úlohy, a tým zosumarizuje objavené zistenia. Nakoniec môže poskytnúť žiakom prehľadnú tabuľku s jednotlivými priemetmi uvedených geometrických útvarov (napríklad Tabuľka 11), prípadne využije program GeoGebra na zobrazenie geometrických útvarov v priemetni.

Tabuľka 11. Priemety rôznych geometrických útvarov v rovnobežnom premietaní

geometrický útvar	smer premietania	priemetom daného geometrického útvaru je/sú
úsečka		bod, ak je zadaná úsečka kolmá na priemetňu

	kolmý na priemetňu	úsečka, ak je zadaná úsečka rôznobežná s priemetňou
úsečka	rôznobežný s priemetňou	bod, ak je zadaná úsečka rovnobežná so smerom premietania
		úsečka, ak nie je zadaná úsečka rovnobežná so smerom premietania
dve rovnobežné priamky	kolmý na priemetňu	dva rôzne body, ak sú dané rovnobežky kolmé na priemetňu
		totožné priamky, ak dané rovnobežky ležia v rovine kolmej na priemetňu, ale nie sú na priemetňu kolmé
		rôzne rovnobežné priamky, ak sú dané rovnobežky rôznobežné s priemetňou
trojuholník	rôznobežný s priemetňou	úsečka, ak rovina, v ktorej leží daný trojuholník, je rovnobežná so smerom premietania
		trojuholník zhodný s daným trojuholníkom, ak rovina, v ktorej leží daný trojuholník, je rovnobežná s priemetňou
		nezhodný trojuholník s daným trojuholníkom, ak rovina, v ktorej leží daný trojuholník, je rôznobežná s priemetňou

6.2 Hľadáme prieniky lineárnych útvarov v priestore

Navrhnutá metodika s názvom „Hľadáme prieniky lineárnych útvarov v priestore“ je určená pre žiakov strednej školy, nadväzuje na problematiku znázorňovania trojrozmerného priestoru s dôrazom na fixáciu žiackych vedomostí k danej téme.

Úvod k metodike

Stereometria patrí k jednej z najneoblúbenejších súčastí vyučovania matematiky na rôznych typoch a stupňoch škôl. V školskej praxi je málo priestoru na rozvoj priestorovej predstavivosti žiakov, preto stereometrické úlohy neriešia žiaci s obľubou. A práve tu využitie prostriedkov IKT, hlavne dynamických programov, interaktívnych demonštrácií súvisiacich s riešením geometrických úloh v priestore, môže žiakom vo vyučovacom procese len pomôcť, ale tiež ich aj zaujať. Preto v danej metodike ponúkame časť uvedenej problematiky, t. j. hľadanie prieniku dvoch rovín alebo priamky a roviny, doplnenú o konkrétne úlohy a interaktívne demonštrácie súvisiace s riešením týchto úloh.

Priebeh výučby

- Evokácia (zopakovanie si pojmov súvisiacich s hranatými telesami a ich zobrazovaním do roviny – práca s pracovným listom)

- Uvedomenie si významu (práca žiakov v skupinách, riešenie úloh s využitím počítačov)
- Reflexia (problémová úloha, diskusia so žiakmi)

Evokácia (cca 10 min.)

Hlavným zámerom úloh v prvej fáze je zistiť, či si žiaci pamätajú princípy rovnobežného premietania a vedia ho použiť pri zobrazovaní hranatých telies používaných v školskej praxi. Zároveň s nimi učiteľ zopakuje aj polohové vlastnosti základných lineárnych útvarov v priestore (učiteľ využíva pracovný list s názvom PL: Hranaté telesá – Príloha E).

Poznámka. Pri hľadaní odpovedí na jednotlivé úlohy z pracovného listu PL: Hranaté telesá môže učiteľ využívať aj na konkrétne modely telies, prípadne využívať dynamický program GeoGebra s 3D modulom, resp. interaktívnu tabuľu. V rámci úlohy 2 treba žiakov upozorniť na fakt, že na obrázkoch sú už dané priemety telies vo voľnom rovnobežnom premietaní. Prípadne po vyplnení zadanej tabuľky môže učiteľ so žiakmi overiť Eulerovu vetu pre konvexné mnohosteny, t. j. platnosť vzťahu $v - h + s = 2$. Po vyriešení úlohy 3 a úlohy 4 z pracovného listu by mali byť žiakom zrejmé vzájomné polohy dvoch priamok, priamky a roviny, dvoch rovín, a taktiež pojmy súvisiace s polohovými vlastnosťami lineárnych útvarov (priesečník, priesečnica, počet spoločných bodov rôznych lineárnych útvarov, ...).

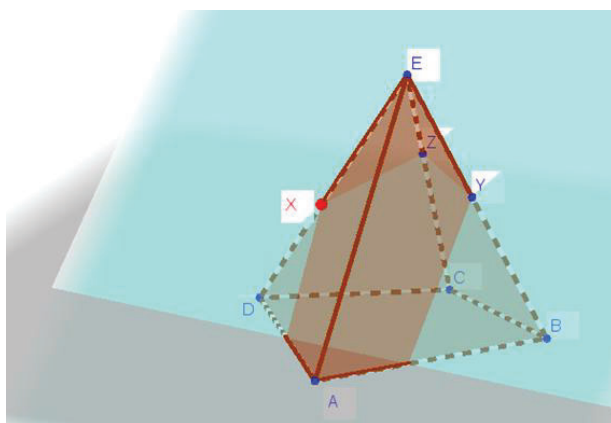
Uvedomenie si významu (cca 25 min.)

V hlavnej časti metodiky využívame bádateľskú metódu na skúmanie počtu spoločných bodov dvoch ľubovoľných lineárnych útvarov v priestore, a tiež objavujeme algoritmus na ich nájdenie. Učiteľ využije pracovný list s názvom PL: Zadania úloh k hľadaniu prienikov lineárnych útvarov, zadáva žiakom postupne problémové úlohy, pričom žiaci môžu riešiť úlohy priamo v danom pracovnom liste (pozri Príloha F).

Úloha 1

Daný je štvorboký ihlan $ABCDE$ a rovina XYZ . Aký n -uholník môže byť rezom štvorbokého ihlana a roviny? Od čoho to závisí?

Žiaci vedú v rámci riešenia úlohy 1 diskusiu s učiteľom o tom, koľko stien ihlana môže preťať rovina. Musia si zároveň uvedomiť, že každá stena ihlana je ďalšia rovina, a teda zisťujú priesečnice dvoch navzájom rôznobežných rovín.



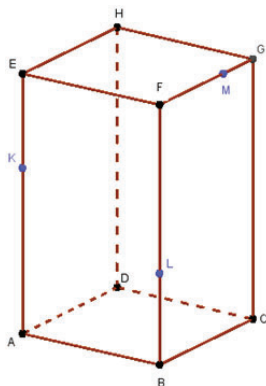
Obr. 89 Interaktívna konštrukcia na zisťovanie vzájomnej polohy dvoch rovín

V interaktívnej konštrukcii (ukážka je na obr. 89) budú žiaci pohybovať bodom X po hrane DE , kým nezistia všetky n -uholníky, ktoré vzniknú rezom danej roviny a telesa. Medzitým ich učiteľ upozorní nato, aby si všímali priesečnice roviny XYZ a stien ihlana.

Touto aktivitou sledujeme to, aby žiaci zistili, že dva spoločné body roviny rezu a steny určia ich priesečnicu. Po tomto experimentovaní by žiaci nemali mať problém vyriešiť nasledujúcu úlohu 2.

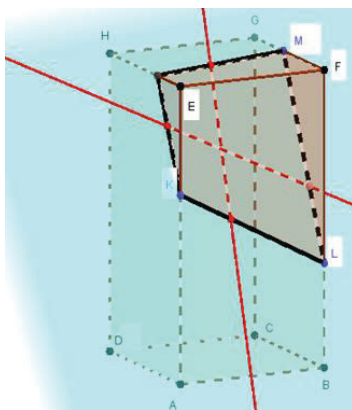
Úloha 2

Zostrojte rovinný rez kvádra $ABCDEFGH$ rovinou KLM , kde body K, L, M sú postupne vnútornými bodmi hrán AE, BF, FG (Obr. 90). Vypíšte všetky úsečky, ktoré tento rez ohraničujú a vyznačte tri rôzne priamky, ktoré ležia v rovine KLM .



Obr. 90 Zadanie úlohy 2

Žiaci by si mali uvedomiť pri riešení tejto úlohy dôležitú skutočnosť, že priesečnica dvoch rovín je vždy priamka. A taktiež by mali zistiť, že všetky priamky ležiace v rovine KLM majú priesečníky s ľubovoľnými rovinami (stenami kvádra) vždy na danej priesečnici týchto dvoch rovín (roviny KLM a príslušnej steny kvádra).



Obr. 91 Riešenie úlohy 2

Riešenie úlohy 2 (Obr. 91) využije učiteľ ďalej v bádaní, kde ležia všetky priesečníky priamok (ležiace v rovine KLM) so stenami kvádra $ABCDEFGH$. Žiakov chceme doviesť k myšlienke, že priesečník priamky s rovinou hľadáme pomocou priesečnice dvoch rôznobežných rovín. Preto sme aj zadali žiakom dokresľovať do obrázka rôzne priamky ležiace v rovine KLM a vyznačiť ešte ich priesečník s niektorou stenou kvádra.

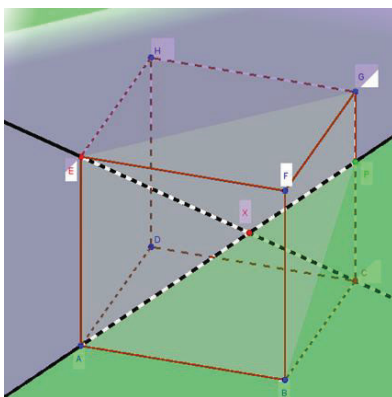
Poznámka. Ak bude mať učiteľ možnosť, tak po vyriešení úlohy 2 odporúčame zadať žiakom aj nasledujúcu úlohu: „Vyznačte v pravidelnom štvorbokom ihlane $ABCDV$ prienik rovín ABV a CDV .“ Úlohu riešia všetci spoločne. Učiteľ načrtne situáciu na tabuľu, resp. využije program GeoGebra a vedie so žiakmi diskusiu o danom probléme. Predpokladáme, že žiacka odpoveď bude: „Prienikom daných rovín je bod V .“ Vymodelujeme následne riešenie úlohy, pripomenieme im, že prienikom dvoch rovín je vždy priamka. Potom vyznačíme rôzne priamky ležiace v rovine ABV (alebo v rovine CDV), zisťujeme prienik s druhou rovinou CDV (resp. ABV). Žiaci by sa mali zase presvedčiť, že všetky tieto priesečníky priamok s rovinami ležia na priesečnici rovín ABV a CDV .

Po vyriešení úloh, ktoré súvisia s hľadaním prieniku dvoch rovín, prejde učiteľ so žiakmi na problematiku hľadania prieniku priamky a roviny.

Úloha 3

Zostrojte priesečník priamky EC a roviny ABP v kocke $ABCDEFGH$, kde bod P je vnútorným bodom hrany CG . Zapište postup konštrukcie s využitím interaktívnej konštrukcie (Obr. 92).

V tejto úlohe má učiteľ k dispozícii jej riešenie v podobe interaktívnej konštrukcie vytvorenej v programe GeoGebra 3D modul (ukážka je na obr. 92).



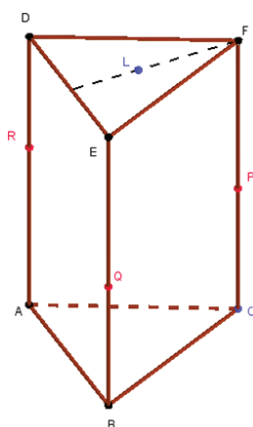
Obr. 92 Interaktívna konštrukcia pre demonštráciu prieniku priamky a roviny

Učiteľ ukáže žiakom riešenie úlohy 3, a teda otáčaním kocky prezentuje rôzne polohy tohto riešenia. Môže pohybovať bodom P a meniť tak polohu priamky, čím si žiaci všímajú aj pohyb bodu X ako priesečníka priamky EC s rovinou ABP . Po tejto ukážke učiteľ žiakov vyzve, aby porozmýšľali nad postupom konštrukcie zo zadania úlohy a skúsili sa tento postup aj zapísať. Následne učiteľ správny postup konštrukcie na zistenie prieniku priamky a roviny napíše na tabuľu.

Nasleduje úloha 4, ktorú môžu žiaci riešiť ako domácu úlohu. Žiaci využijú už napísaný postup z predchádzajúcej úlohy a budú zostrojovať ďalší prienik priamky a trojbokého hranola. Túto úlohu môžu žiaci riešiť vo voľnom rovnobežnom premietaní, resp. v programe GeoGebra alebo s využitím interaktívnej tabule.

Úloha 4 – domáca úloha

Zostrojte priesečník priamky CL a roviny PQR v trojbokom hranole $ABCDEF$, kde body P, Q, R sú postupne vnútornými bodmi hrán CF, BE, AD a bod L je vnútorným bodom steny DEF .



Obr. 93 Zadanie k úlohe 4

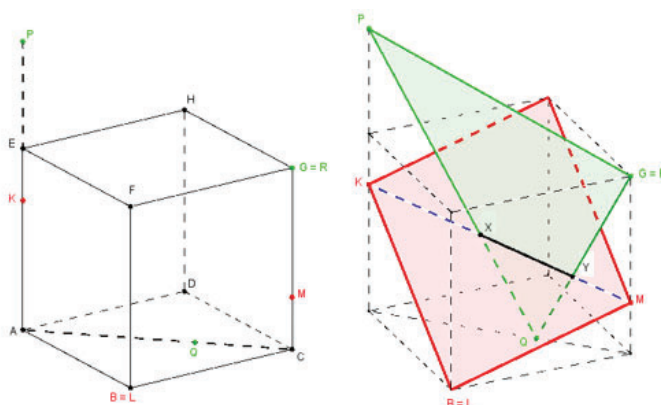
Poznámka. Na obr. 93 je ukážka zadania úlohy 4, ktorú učiteľ spolu so žiakmi načrtne na tabuľu, aby u žiakov nenastal problém s pochopením zadania danej úlohy. Žiaci využívajú pri riešení zadanej úlohy postup konštrukcie, ktorý si spoločne napísali v rámci riešenia úlohy 3. Uvedená úloha má viacero možností voľby roviny, v ktorej má ležať priamka CL . Preto v tejto časti riešenia vedie učiteľ so žiakmi diskusiu o voľbe tejto roviny. Nakoniec ale vyznačí v danom hranole takú rovinu, ktorá je najnázornejšia a rez hranola touto rovinou nie je komplikovaný (môže to byť napríklad rovina CFL).

Reflexia (cca 10 min.)

V závere metodiky učiteľ overí vedomosti žiakov problémovou úlohou (Úloha 5), pričom ponechávame na individuálnom zvážení učiteľa, či budú žiaci pracovať samostatne alebo v skupinách. Správne riešenie úlohy učiteľ prezentuje žiakom využitím programu GeoGebra (učiteľovi je k dispozícii vytvorená interaktívna konštrukcia na obr. 94).

Úloha 5

Zostrojte prienik rovnobežníka $KLMN$ a trojuholníka PQR , ktoré sú znázornené na obr. 94.



Obr. 94 Súčasť zadania úlohy 5 a jej riešenie

Poznámka. Žiakom poskytne učiteľ obrázok s vyznačenými bodmi oboch útvarov (Obr. 94). Spresníme zadanie úlohy: „Pomocným telesom na vyznačenie daných bodov rovín je kocka $ABCDEFGH$, kde body K, M sú postupne vnútornými bodmi hrán AE, CG , bod L je totožný s vrcholom B , bod R je totožný s vrcholom G , bod Q je vnútorným bodom úsečky AC a bod P leží na polpriamke AE za bodom E .“

6.3 Rôzne pohľady na rezy hranatých telies rovinou

Posledná navrhnutá metodika s názvom „Rôzne pohľady na rezy hranatých telies rovinou“ je vhodná pre žiakov strednej školy a môže plynule nadviazať na metodiku s názvom Hľadáme prieniky lineárnych útvarov v priestore.

Úvod k metodike

Vo všeobecnosti žiaci menej obľubujú riešiť stereometrické úlohy, pretože majú väčšinou problém s priestorovou predstavivosťou. Priestorovú predstavivosť možno rozvíjať tiež tréningom, ku ktorému patrí aj riešenie úloh na zostrojovanie rezov telies danou rovinou. Pri takýchto úlohách je nutné nechať žiakov vykonať aspoň niekoľko krokov samostatne a korigovať tak prípadné chyby v algoritmickej postupnosti alebo v rysovaní. Žiaduce je preto dané riešenie úlohy vhodne vizualizovať, a tak aspoň čiastočne eliminovať uvedený problém. Odporúčame dynamický program GeoGebra 3D modul, ktorý umožňuje učiteľovi jednoducho a pritom prehľadne vytvárať rezy telies rovinou. Program ponúka aj možnosť rotovať zobrazené telesá, a teda vidieť rez z rôznych pohľadov.

Priebeh výučby

- Evokácia (zopakovanie si vzájomných polôh dvoch lineárnych útvarov v priestore – priamka, rovina)
- Uvedenie si významu (individuálna práca žiakov na riadenom bádání, ktoré bude vedené učiteľom, riešenie úloh s využitím počítačov)
- Reflexia (problémová úloha, diskusia so žiakmi)

Evokácia (cca 10 min.)

Úvod vyučovacej hodiny bude sústredený na zopakovanie si vedomostí o vzájomných polohách priamky a roviny, tiež dvoch rovín v priestore. Učiteľ by mal žiakov zaujať danou témou, aby priestorová predstavivosť, ktorá často absentuje u žiakov stredných škôl, nebola hlavnou prekážkou pri riešení úloh na rezy rôznych telies. Preto učiteľ vedie so žiakmi diskusiu k riešenej problematike a využíva na to nasledujúce dve úlohy. Učiteľ a žiaci spoločne hľadajú odpovede na úlohu 1 a úlohu 2, pričom prepájajú tieto riešenia s náčrtmi na tabuli.

Úloha 1

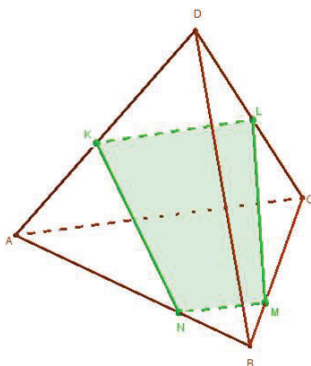
Doplňte nasledujúce tvrdenia, vysvetlite ich a načrtnite situáciu v kvádri:

- Dve roviny môžu mať tieto vzájomné polohy:.....
- Tri rôzne roviny majú vzájomných polôh.
- Priamka a rovina môžu byť navzájom

V rámci jednotlivých tvrdení učiteľ ponechá náčrt všetkých možností urobiť žiakom, pričom s nimi tak učiteľ stručne zopakuje aj vlastnosti rovnobežného premietania, pretože zobrazujú kváder v rovine. Následne si vysvetľujú vzájomné polohy dvoch lineárnych útvarov v priestore, ktoré by už mali žiaci poznať z nižších ročníkov. Na náčrty kvádra a všetkých vyslovených riešení žiaci využívajú rysovacie pomôcky.

Úloha 2

Aká je vzájomná poloha rovín ABC a KLM , BCD a KLM v ihlane $ABCD$ (Obr. 95). V prípade, že sú niektoré dvojice rovín rôznobežné, zostrojte aj ich priesečnicu. Vedeli by ste vysvetliť, čo je štvoruholník $KLMN$ vzhľadom na ihlan $ABCD$?



Obr. 95 Vzájomná poloha rovín

Poznámka. Pri riešení úlohy 1 a úlohy 2, ako hľadať spoločné body dvoch lineárnych útvarov, budú žiaci skúmať a objavovať geometrické zákonitosti platné pre vzájomné polohy. Učiteľ ich nasmeruje k zopakovaniu si vlastností, ktoré využívame pri konštrukcii rezu telesa rovinou, prípadne ich môže žiakom napísať na tabuľu a poskytne im to ako zhrnutie problematiky vyplývajúcej z riešenia daných dvoch úloh.

Uvedomenie si významu (cca 25 min.)

V priebehu tejto fázy učiteľ využije bádateľskú metódu na skúmanie vzťahov medzi rôznymi lineárnymi útvarmi v priestore, ktoré následne aplikuje pri zostrojovaní rezu hranatých telies rovinou. Žiaci často pristupujú k riešeniu úloh s uvedeným zadáním algoritmicky. Význam zostrojovania rezov telies rovinou žiakom priblíži prostredníctvom aktivít a úloh, ktoré budú realizovať samotní žiaci, čím získajú na vlastné otázky a nejasnosti aj odpovede.

Najskôr s nimi učiteľ analyzuje možnosti riešenia konkrétnych úloh a následne aplikuje uvedené modelové postupy v riešení ďalších problémových úloh. Preto najskôr učiteľ nastolí problémové situácie vo forme úloh, ktoré sú uvedené v pracovnom liste s názvom PL: Rôzne pohľady na rezy hranatých telies rovinou (Príloha G).

Poznámka. Učiteľ môže každému žiakovi dať uvedený pracovný list, kde bude žiak riešiť úlohy alebo ho riešia spoločne, pričom daný pracovný list majú žiaci prezentovaný. Po prečítaní zadania každej úlohy nechá učiteľ žiakom priestor, aby si samostatne premysleli jej riešenie. Potom vedie s nimi spoločnú diskusiu k daným otázkam v rámci jednotlivých úloh. Žiaci si vytvárajú na papieri potrebné náčrty telies aj s ich riešením. Práca s uvedeným pracovným listom, vrátane spoločnej diskusie, by mala trvať cca. 10 min. Na záver bádateľských činností žiakov pri riešení úloh učiteľ spolu so žiakmi zhrnie objavené zistenia a sformuluje, čo je to vlastne rez hranatého telesa rovinou. Pri konštrukcii rezu telesa rovinou využijeme nasledujúce vety, ktoré by mal učiteľ žiakom spomenúť:

- Ak dve rovnobežné roviny pretína tretia rovina, potom ich pretína v rovnobežných priamkach.
- Ak je priamka rovnobežná s dvoma rôznobežnými rovinami, tak je rovnobežná aj z ich priesečnicou.
- Nech každé dve z troch rovín sú rôznobežné. Potom ak dve z priesečníc prechádzajú jedným bodom, tak ním prechádza aj tretia priesečnica; ak dve z priesečníc nemajú spoločný bod, tak sú rovnobežné a je s nimi rovnobežná aj tretia priesečnica.

Po porozumení pojmov súvisiacich s vysvetlením rezu rôznych hranatých telies rovinou bude učiteľ pokračovať v bádaní pri riešení ďalších úloh na konštrukciu rezov (Úloha 3 až Úloha 5). V riešení úloh využije aj program GeoGebra 3D modul.

Poznámka. Uvedené úlohy riešia žiaci spoločne s učiteľom, pričom každé teleso je vytvorené v programe GeoGebra 3D modul. Učiteľ pracuje v GeoGebre a žiaci si na papieri črtajú dané riešenia. Učiteľ prečíta žiakom zadanie každej úlohy, predstaví model telesa v GeoGebre, naznačí riešenie úlohy a spoločne so žiakmi o ňom diskutujú. Učiteľ využíva vytvorené konštrukcie telies, kde sú zadania úloh aj uvedené.

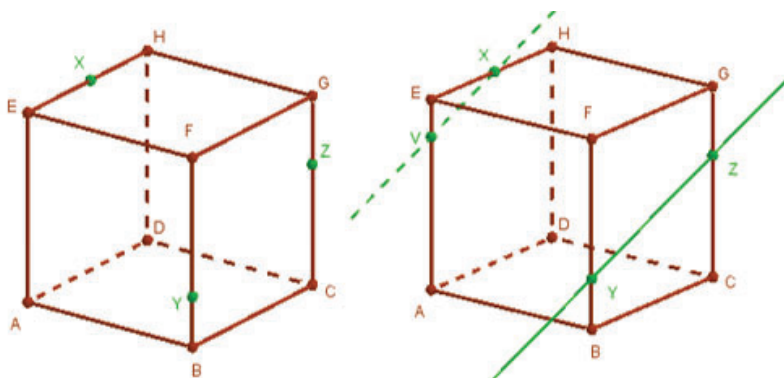
Cieľom tejto aktivity (riešenie úlohy 3 až úlohy 5) nie je striktne uviesť celé riešenie úlohy, ale prezentovať základné princípy zostrojovania rezov hranatých telies rovinou. Ak žiak ale vo svojom náčrte rezy telies dokončí samostatne, učiteľ to kladne ohodnotí a vyzdvihne jeho prácu tiež pred ostatými žiakmi. K jednotlivým stratégiám riešenia sme zaviedli aj ich výstižnejšie pomenovanie, ktoré súvisí s konkrétnym princípom najčastejšie používaným pri zostrojení rezu telesa rovinou v školskej praxi.

Ďalšie úlohy na precvičenie uvedených princípov môže učiteľ zadať žiakom, ak majú dané princípy vysvetlené. Žiaci ich môžu riešiť dobrovoľne alebo ako zadanie na domácu úlohu (Príloha H – Úlohy na precvičenie rezov telies rovinou).

Úloha 3

Daná je kocka $ABCDEFGH$ a rovina XYZ (konštrukcia v GeoGebre). Využijeme v danom riešení princíp 1 „spájanie bodov“ a princíp 2 „rovnobežnosť“.

Princíp 1 „spájanie bodov“ je založený na vlastnosti: „Dvoma bodmi rezovej roviny, ktoré ležia v tej istej stenovej rovine telesa, prechádza priamka,“ t. j. takéto dva body môžeme spojiť. Princíp 2 „rovnobežnosť“ je zase založená na vlastnosti: „Časti rezu v rovnobežných rovinách sú tiež rovnobežné,“ napríklad časti rezu v protiľahlých stenách kocky sú rovnobežné (Obr. 96). Žiakov treba upozorniť na ihlany, kde sa tento princíp „rovnobežnosti“ nedá využiť.

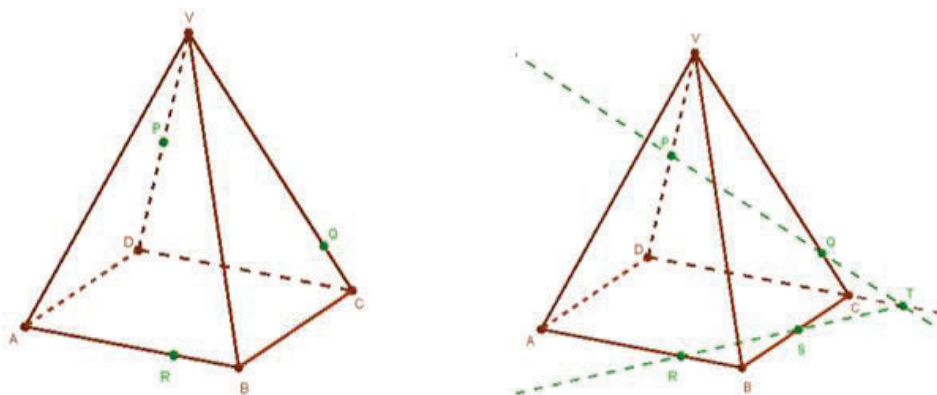


Obr. 96 Úloha 3 – využitie princípu 1 a princípu 2

Úloha 4

Daný je ihlan $ABCDV$ a rovina PQR (konštrukcia v GeoGebre). Využijeme v danom riešení princíp 3 „predlžovanie hrán“.

Princíp 3 „predlžovanie hrán“ sa používa pri rezoch telies rovinou danou tromi bodmi vtedy, keď tento rez nevieme dokončiť podľa princípu 1 alebo princípu 2. Pri riešení tejto úlohy si majú žiaci uvedomiť, že treba predĺžiť časť rezu v jednej stene tak, že pretne predĺženú jednu hranu susednej steny. Treba si voliť ale takú susednú stenu, kde sa nachádza už nejaký bod rezu. Priesečníkom takýchto priamok je bod, ktorý je ďalším bodom patriacim do rezovej roviny (Obr. 97).

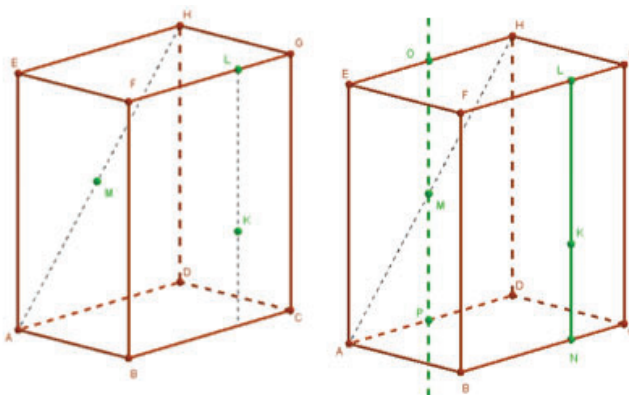


Obr. 97 Úloha 4 – využitie princípu 3

Úloha 5

Daný je kváder $ABCDEFGH$ a rovina KLM (konštrukcia v GeoGebre). Využijeme v danom riešení princíp 4 „spájanie bodov v nekonečne“.

Princíp 4 „spájanie bodov v nekonečne“ je rozšírením predchádzajúceho princípu 3, to znamená, že sa nemusia uvedené priamky pretnúť, t. j. rovina rezu daná tromi bodmi a priamka určená dvoma z týchto bodov je rovnobežná s hranou telesa alebo na nej leží. Preto tento princíp 4 využíva vlastnosť (Obr. 98): „Ak je priamka určená dvoma zo zadanych troch bodov rezu rovnobežná s hranou telesa (alebo je s touto hranou totožná), tak tretím bodom rezu vedieme rovnobežku s touto priamkou.“

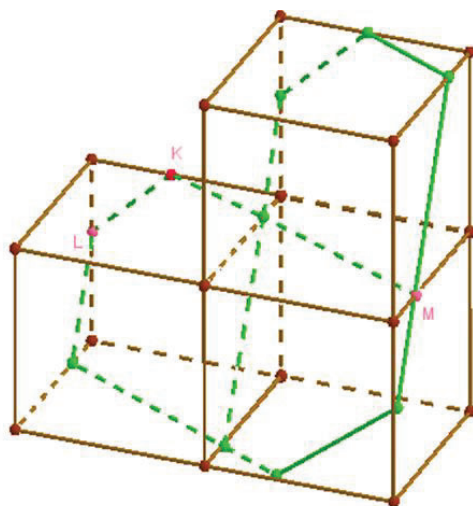


Obr. 98 Úloha 5 – využitie princípu 4

Reflexia (cca 10 min.)

V poslednej fáze overí učiteľ vedomosti žiakov zostrojením rezu rovinou nielen telies, ako je kocka, hranol alebo ihlan, ale aj tak, že zadá žiakom kockové teleso a rovinu, ktorá má toto teleso rezať (Príloha I – Zadanie problémovej úlohy). Ponecháme pritom na zvážení učiteľa, či budú žiaci pracovať samostatne alebo v skupinách (učiteľ ale

vytlačí žiakom zadanie úlohy). Môže taktiež učiteľ správne riešenie úlohy najskôr prezentovať žiakom s využitím programu GeoGebra (učiteľovi je k dispozícii aj riešenie, ktoré je súčasťou prílohy Zadanie problémovej úlohy) a až potom začnú úlohu žiaci riešiť samostatne. Prípadne danú problémovú úlohu dokončia ako domácu úlohu, avšak žiaci ju začnú riešiť ešte na vyučovacej hodine. Riešenie problémovej úlohy je uvedené na obr. 99.



Obr. 99 Riešenie problémovej úlohy

Záver

V publikácii s názvom „Teória a prax zobrazovania priestoru na stredných školách technického zamerania“ prezentujeme aktuálne problémy súvisiace s problematikou zobrazovania priestoru v rámci stredného vzdelávania na Slovensku. Naše poznatky vyplývajúce priamo z realizovaného pedagogického výskumu, spolu s princípmi a metódami z teórie vyučovania matematiky, aplikujeme priamo do návrhov úloh, aktivít a aj metodík pre učiteľov.

Kľúčový je pre nás v daných návrhoch dôraz na zobrazovanie priestorových objektov do roviny, čo je aj hlavnou témou predloženej publikácie. Poukazujeme taktiež na fakt a zistenie, že lepšie zvládnutie geometrických úloh žiakmi technických odborov priamo korelovalo s ich lepším výkonom pri riešení úloh súvisiacich s daným odborom, ktorý študujú. Môžeme teda konštatovať, že úspešné riešenie úloh súvisiacich s daným odborom si nevyžaduje len vysokú úroveň mentálnej rotácie, ale aj nevyhnutné vedomosti a zručnosti z priestorovej geometrie. Vzhľadom na túto skutočnosť boli následne navrhnuté didaktické materiály z problematiky zobrazovania priestoru.

Veríme, že komplexným spracovaním problematiky sme významne prispeli k výskumu v oblasti teórie vyučovania matematiky, s osobitným dôrazom na jej praktické využitie v školskej praxi.

Literatúra

ADELABU, F. M., MAKGATO, M. and RAMALIGELA, M. S. (2019). Enhancing Learners' Geometric Thinking Using Dynamic Geometry Computer Software. Online. *Journal of Technical Education and Training*, vol. 11, no. 1. Available from: <https://penerbit.uthm.edu.my/ojs/index.php/JTET/article/view/3092> [viewed 2023-05-17].

ANAMOVA, R. R. and NARTOVA, L. G. (2019). Geometric spatial ability as an element of cognitive learning process. Online. *Periódico Tchê Química*, vol. 16, no. 32, 542 p. Available from: https://doi.org/10.52571/ptq.v16.n32.2019.560_periodico32_pgs_542_550.pdf [viewed 2024-05-10].

BARUT, M. and RETNAWATI, H. (2020). Geometry learning in vocational high school: Investigating the students' difficulties and levels of thinking. Online. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1613, no. 1, 12 p. Available from: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1613/1/012058/meta> [viewed 2024-07-05].

BRINCKOVÁ, J., UHERČÍKOVÁ, V. a VANKÚŠ, P. (2013). *Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike*. Online. Bratislava: KEC FMFI UK Bratislava. 98 s. ISBN 978-80-8147-019-6. Dostupné z: <http://www.comae.sk/netradicnemetody.pdf>.

CSIBA, P. a VALLO, D. (2002). Interaktívne geometrické softvéry. *Acta Didactica 5*. Formovanie prírodovedných poznávacích metód. Prírodovedec 94: Nitra, FPV UKF v Nitre, p. 101 -104.

DULOVÁ, Z. (2017). *Prostorová představivost ve výuce na ZŠ*. Diplomová práce. Online. Brno: Pedagogická fakulta MU, 72 s. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/407130/pdf_m/thesis.pdf.

DUŠEK, F. (1964). Rozvoj prostorové představivosti. *Matematika ve škole*, vol. 14, no. 6, s. 313-318.

EKSTROM, R. B. and HARMAN, H. H. (1976). *Manual for kit of factor-referenced cognitive tests*. New Jersey, Princeton: Educational testing service.

FERGUSON, C. W. (2008). A comparison of instructional methods for improving the spatial-visualization ability of freshman technology seminar students. Online. *Technology Interface Journal/Spring*. Western Carolina University, vol. 9, no. 2, 15 p. ISSN# 1523-9926. Available from: https://tij.org/issues/issues/spring2009/I11_Ferguson/Ferguson-Spatial.pdf [viewed 2022-04-11].

FRANCOVÁ, M. (1991). *Geometrická predstavivosť. Matematika a didaktika matematiky*. Brno: MU.

FULIER, J., ĎURIŠ, V. a FRANTOVÁ, P. (2007). *Systémy počítačovej algebry (CAS) vo vyučovaní matematiky*. Nitra, Slovensko: FPV UKF v Nitre.

FULIER, J. a MICHALIČKA, P. (2005). Informačné a komunikačné technológie vo vzdelávaní v matematike. *Informačné a komunikačné technológie vo vyučovaní matematiky* (Prírodovedec 199, s. 5-15). Nitra, Slovensko: FPV UKF v Nitre.

FULIER, J., VRÁBELOVÁ, M., VRÁBEL, P., KMEŤOVÁ, M., RYBANSKÝ, Ľ., LEHOČKÁ, Z. N., KÓŠOVÁ, M., UHRÍNOVÁ, E., LEDNICKÝ, L. a Csáky, A. (2014). *Zvyšovanie matematických kompetencií žiakov nižšieho sekundárneho vzdelávania (ISCED 2)*. Nitra, Slovensko: FPV UKF v Nitre.

GROMOV, G. (1995). *Roads and crossroads of the internet history*. NetValley.

GURNY, H. G. (2003). *High School Students' Performance on Vandenberg's Mental Rotations Test: Art Ability, Gender, Activities, Academic Performance, Strategies, and Ease of Taking the Test*. Master's thesis. Online. New Rochelle: College of New Rochelle, 135 p. Available from: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED479372.pdf>.

HARANT, M. a LANTA, O. (1965). *Deskriptívna geometria pre 2. a 3. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl*. Bratislava: SPN. 324 s. ISBN 68-182-68.

HEGARTY, M. and WALLER, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. Online. *Intelligence*, vol. 32, no. 2, pp. 175-191. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.intell.2003.12.001> [viewed 2024-07-07].

HRADECKÝ, F., ZEDEK, M., ŠIMEK, J., MIKULČÁK J. a MELINA Š. (1969). *Metodika vyučovania deskriptívnej geometrie a rysovania*. UK v Bratislave. Bratislava.

International Society for Technology in Education. (2007). *National educational technology standards for students*. ISTE: Interntl Soc Tech Educ.

KADERÁVEK, F. (1950). *Plochy stavebně-inženýrské praxe*. JČMF, Praha.

KALAŠ, I. (2001). *Čo ponúkajú informačné a komunikačné technológie iným predmetom*. Bratislava, Slovensko: ŠPÚ Bratislava.

KALAŠ, I. a kol. (2013). *Premeny školy v digitálnom veku*. Bratislava, Slovensko: SPN.

MERTENS, D. (1974). *Schlüsselqualifikationen*. Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt-und Berufsforschung, 7(1), 36-43.

KAYHAN, E. B. (2005). *Investigation of high school students' spatial ability*. Master's Thesis. Online. Middle East Technical University. 78 p. Available from:

<https://open.metu.edu.tr/bitstream/handle/11511/14868/index.pdf?sequence=1>
[viewed 2024-10-12].

KLEMENT, M. (2005). Cit. podľa DULOVÁ, Z., (2017). *Prostorová představivost ve výuce na ZŠ*. Diplomová práce. Online. Brno: Pedagogická fakulta MU, 72 s. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/407130/pedf_m/thesis.pdf.

KOREŇOVÁ, L. (2015). *Digitálne technológie v školskej matematike*. Bratislava, Slovensko: KEC FMFI Univerzita Komenského.

KOŘÍNEK, M. (1987). *Didaktika základní školy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

LABORDE, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.

LABORDE, C. (2005). Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamic geometry environments. *Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics* (pp. 22-35). Korea National University of Education.

LINN, M. C. and PETERSEN, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. Online. *Child development*, vol. 56, no. 6, pp. 1479-1498. Available from: <https://doi.org/10.2307/1130467>.

LUKÁČ, S., DOBOŠ, J., HARMINC, M., SEMANIŠINOVÁ, I., MADARAS, T., PÁLENÍKOVÁ, K., RUMANOVÁ, L. a VARGA, M. (2021). *Zbierka inovatívnych metodík z matematiky pre stredné školy*. 2. dopln. vyd., Bratislava: CVTI (online), 704 s. ISBN 978-80-8240-010-9.

ĽUBOVÁ, B. (2013). *Matematické modelovanie v rukách žiaka*. Bratislava: Metodicko-pedagogické centrum.

MAIER, P. H. (1998). Spatial geometry and spatial ability – How to make solid geometry solid? Online. *Semantic Scholar*. [Accessed 2001]. Available from: <http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1996/maier.pdf>.

MOLNÁR, J. (2004). *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. 86 s. ISBN 80-244-0927-5.

MOLNÁR, J., PERNÝ, J. and STOPENOVÁ, A. (2006). *Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji*. Online. Dostupné z: <https://adoc.pub/download/prostorova-pedstavivost-a-prostedky-k-jejimu-rozvoji.html>.

PARENČAJ, J. a REPÁŠ, V. (1985). *Diagnostika rozvoja stereometrických predstáv študentov vysokých škôl technických*. Vol. 16, no. 4. MFvŠ.

PAVLOVIČOVÁ, G. (2010). *Stavby z kociek a priestorové zručnosti vo vyučovaní geometrie*. Nitra: FPV UKF v Nitre. s. 23-31. ISBN 978-80-8094-723-1.

PETERS, M., LAENG, B., LATHAM, K., JACKSON, M., ZAIYOUNA, R. and RICHARDSON, C. (1995). A Redrawn Vandenberg & Kuse Mental Rotations Test - Different Version and Factors that affect Performance. Online. *Brain and Cognition*, vol. 28, no. 1, pp. 39-58. Available from: <https://doi.org/10.1006/brcg.1995.1032> [viewed 2022-03-04].

POLÁK, J. (2016). *Didaktika matematiky II. Obecná didaktika matematiky*. Plzeň, Česká republika: Fraus.

POLAKOVIČ, P. a VRÁNOVÁ, M. (2016). Pedagogický pohľad na edukačný proces podporovaný digitálnymi technológiami. *e-PEDAGOGIUM*, Vol. 16(3), 118 - 126. DOI: 10.5507/epd.2016.036.

PRASOLOV, V. V. and ŠARYGIN I. F. (1989). *Zadači po stereometrii*. Nauka Moskva (rusky).

PŘÍHONSKÁ, J. (2014). Hry, stavebnice a hlavolamy jako didaktický prostředek pro rozvoj prostorové představivosti. *Geometrická představivost*. Olomouc: Univerzita Palackého, s. 83 – 100.

RAHAYU, E. G., JUANDI, D. and JUPRI, A. (2021). Didactical design for distance concept in solid geometry to develop mathematical representation ability in vocational high school. Online. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1882, no.1. Available from: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1882/1/012077/pdf> [viewed 2024-10-18].

RUMANOVÁ, L. a KIŠ, V. (2016). Zaujímavé nerozvinuteľné priamkové plochy v technickej praxi a bežnom živote. *Acta Mathematica Nitriensia*, Vol. 2, No. 1, ISSN: 2453-6083, s. 19 – 26.

RUMANOVÁ, L., LAŠŠOVÁ, K. a DRÁBEKOVÁ, J. (2022). *Metódy zobrazovania vo vyučovacom procese s prepojením na prax*. Nitra: UKF. 102 s. ISBN 978-80-558-1924-2.

RUMANOVÁ, L. a VALLO, D. (2013). „Tréning“ priestorovej predstavivosti žiakov s využitím štvorstena. *Aktivizujúce prvky vo výučbe matematiky*. Nitra: FPV UKF v Nitre, s. 31–37.

SEMANIŠINOVÁ, I., HUBEŇÁKOVÁ, V., KRAJČIOVÁ, J., VODIČKOVÁ, V., HARMINC, M., RUMANOVÁ, L., ZÁHORSKÁ, J. a PÁLENÍKOVÁ, K. (2021). *Zbierka inovatívnych metódik z matematiky pre základné školy*. 2. dopln. vyd. Bratislava: CVTI (online), 406 s. ISBN 978-80-8240-009-3.

SHEPARD, R. N. and METYLER, J. (1971). Mental Rotation of Three-Dimensional Objects. Online. *Science*, vol. 171, no. 3972, pp. 701-703. Available from: <https://doi.org/10.1126/science.171.3972.701> [viewed 2022-06-15].

SCHUBERTOVÁ, S. and MOLNÁR, J. (2014). K některým s prostorovou představivostí souvisejícím jevům. *Geometrická představivost*. Olomouc: Univerzita Palackého, s. 101 – 108.

SLAVÍČKOVÁ, M. (2006). Inovácia vyučovania matematiky na druhom stupni základných škôl pomocou informačných technológií. *Matematika v škole dnes a zajtra*. 7. ročník konferencie. Ružomberok, Slovensko.

SLIVKA, M. a SLIVKA, J., (2019). *Schéma archeoparku kartuziánskeho kláštora*. OZ Kláštorisko.

STOFFA, J. a STOFFOVÁ, V. (2017). *Terminológia informatiky a IKT*. Trnava, Slovensko: TYPI Universitas Tyrnaviensis.

ŠEDIVÝ, O., PAVLOVIČOVÁ, G., RUMANOVÁ, L. a VALLO, D. (2007). *Stereometria. Umenie vidieť a predstavovať si priestor*. FPV UKF v Nitre, Edícia Prírodovedec č. 271, Nitra 2007, ISBN: 978-80-8094-180-2.

ŠEDIVÝ, O. a RUMANOVSKÁ, H. (1988). *Niekoľko metodických poznámok k rozvoju priestorovej predstavivosti*. Pedagogickej fakulty v Nitre. Matematika 4. Nitra: Pedagogická fakulta, s. 219 – 228.

ŠEDIVÝ, O. a VALLO, D. (2012). *Siete kocka – aké a koľko*. Zborník príspevkov zo seminára: Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky. FPV UKF v Nitre, Nitra.

ŠTÁTNY INŠTITÚT ODBORNÉHO VZDELÁVANIA. (2013a). *ŠVP pre odborné vzdelávanie a prípravu pre skupinu učebných a študijných odborov 23, 24 Strojárstvo a ostatná kovospracúvacia výroba*. Online. 3. vyd. Bratislava: © Štátny inštitút odborného vzdelávania. 306 s. Dostupné z: https://siov.sk/wp-content/uploads/2020/04/SVP_23_24-Strojarstvo_a_ostatna_kovospracuvacia_vyroba.pdf [citované 2023-06-18].

ŠTÁTNY INŠTITÚT ODBORNÉHO VZDELÁVANIA. (2013b). *Matematika pre ÚSOV technické*. Online. Bratislava: © Štátny inštitút odborného vzdelávania. 6 s. Dostupné z: https://siov.sk/wp-content/uploads/2019/02/matematika_USOV_technicke.pdf [citované 2023-02-12].

ŠTÁTNY INŠTITÚT ODBORNÉHO VZDELÁVANIA. (2013c). *ŠVP pre odborné vzdelávanie a prípravu pre skupinu učebných a študijných odborov 36 Stavebníctvo, geodézia a kartografia*. Online. 3. vyd. Bratislava: © Štátny inštitút odborného vzdelávania. 226 s. Dostupné z: https://siov.sk/wp-content/uploads/2020/04/SVP_36-Stavebnictvo_geodezia_a_kartografia.pdf

[content/uploads/2019/02/SVP_36_Stavebnictvo_geodezia_a_kartografia.pdf](#)

[citované 2023-07-19].

ŠTÁTNY INŠTITÚT ODBORNÉHO VZDELÁVANIA. (2013d). *ŠVP pre odborné vzdelávanie a prípravu pre skupinu učebných a študijných odborov 39 Špeciálne technické odbory*. Online. 3.vyd. Bratislava: © Štátny inštitút odborného vzdelávania. 131 s. Dostupné z: https://siov.sk/wp-content/uploads/2019/02/SVP_39_Specialne_tecnicke_odbory.pdf [citované 2023-08-19].

ŠTÁTNY INŠTITÚT ODBORNÉHO VZDELÁVANIA. (2014). *Metodika na stanovenie hodnotiacich štandardov*. Online. Bratislava: Štátny inštitút odborného vzdelávania. 83 s. Dostupné z: https://www.kvalifikacie.sk/sites/nsk/files/images/Dokumenty/metodika_tvorby_hs.pdf [citované 2023-10-20].

ŠTÁTNY INŠTITÚT ODBORNÉHO VZDELÁVANIA. (2021a). *Odborné vzdelávanie a príprava*. Online. © 2021 ŠIOV – štátny inštitút odborného vzdelávania. Dostupné z: <https://siov.sk/vzdelavanie/odborne-vzdelavanie-a-priprava/> [citované 2023-08-28].

ŠTÁTNY INŠTITÚT ODBORNÉHO VZDELÁVANIA. (2021b). *O ŠIOV-e*. Online. © 2021 ŠIOV – štátny inštitút odborného vzdelávania. Dostupné z: <https://siov.sk/o-nas/o-siov-e/> [citované 2023-07-28].

ŠTÁTNY INŠTITÚT ODBORNÉHO VZDELÁVANIA. (2023a). *Všeobecné vzdelávanie – vzdelávacie štandardy a normatívy MTaPZ VVP*. Online. © 2023 ŠIOV – štátny inštitút odborného vzdelávania. Dostupné z: <https://siov.sk/statne-vzdelavacie-programy/> [citované 2023-02-12].

ŠKOLSKÝ VZDELÁVACÍ PROGRAM. (2013a). *Strojárstvo*. Online. Zvolen: Technická akadémia.

ŠKOLSKÝ VZDELÁVACÍ PROGRAM. (2013b). *Technické lýceum*. Zlaté Moravce: Stredná odborná škola polytechnická, 66 s.

ŠKOLSKÝ VZDELÁVACÍ PROGRAM. (2015). *Strojár 2015*. Nitra: Stredná priemyselná škola strojnícka a elektrotechnická. 149 s.

ŠKOLSKÝ VZDELÁVACÍ PROGRAM. (2020). *Staviteľstvo – pozemné staviteľstvo*. Online. Rožňava: Stredná odborná škola technická. 402 s.

TOMKOVÁ, V., LUKÁČOVÁ, D., BÁNESZ, G. a RUMANOVÁ, L. (2014). *Priestorová predstavivosť v školskej praxi*. Nitra: PF UKF v Nitre. 156 s. ISBN 978-80-558-0711-9.

URBAN, A. (1965). *Deskriptivní geometrie I*. Praha: SNTL. 365 s.

VALLO, D. (2016). Using Geometry software Geogebra in solution of stereometric problem. *Proceedings of 15th Conference on Applied Mathematics, Aplimat*, STU v Bratislave, Bratislava.

VALLO, D., ĎURIŠ, V. a RUMANOVÁ, L. (2014). Geometry of bee cell rediscovered. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, Vol. 8, No. 3, ISSN: 1933-2823.

VALLO, D. a ZÁHORSKÁ, J. (2009). Modelovanie vybraných viet a poznatkov školskej matematiky v prostredí IKT. *Potenciál prostredia IKT v školskej matematike*. Bratislava: UK, s. 72-81.

VALLO, D. a ZÁHORSKÁ, J. (2010). Možnosti využitia Cabri 3D vo vyučovaní stereometrie na SŠ. *Zborník príspevkov zo 7. žilinskej didaktickej konferencie DIDZA 2010*, ŽU v Žiline, Žilina.

VANDENBERG, S. G. and KUSE, A. R. (1978). Mental Rotations, a Group Test of Three-Dimensional Spatial Visualization. Online. *Perceptual and Motor Skills*, vol. 47, no.2, pp. 599-604. Available from: <https://doi.org/10.2466/pms.1978.47.2.599> [viewed 2021-10-19].

VANÍČEK, J. (2009). *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha, Česká republika: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

VALLO, D. (2016). Dynamické geometrické programy a metodika výučby geometrie. *10. didaktická konferencia: zborník príspevkov z didaktickej konferencie s medzinárodnou účasťou*, konanej v Dubnici nad Váhom 13. apríla 2016. Dubnica nad Váhom: DTI, 2016. ISBN 978-80-89732-67-8, s. 46-59.

VALLO, D. (2016). Using Geometry software Geogebra in solution of stereometric problem. *Proceedings of 15th Conference on Applied Mathematics, Aplimat 2016*, STU v Bratislave, Bratislava.

ŽARNAY, M., ČILLÍK, L., BRONČEK, J., BORSOVÁ, G., PITOŇÁK, J., DRDOL, K., KAMAS, P. a SOKOL, M. (2012). *Konštruovanie I*. Žilina: Katedra konštruovania a častí strojov, Strojnícka fakulta, Žilinská univerzita v Žiline. ISBN 978-80-554-0610-7. Dostupné z: <http://www.konstruovanie1.uniza.sk/> [2024-11-07].

ŽIDEK, O. (2013). *Geometrické modelovanie a priestorová predstavivosť*. Trnava: Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity.

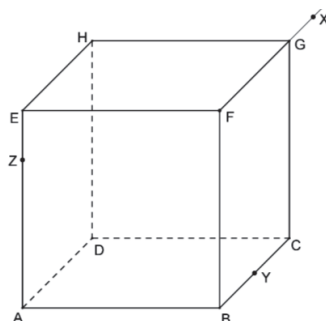
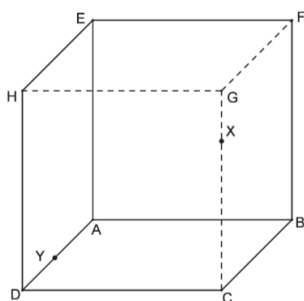
ŽILKOVÁ, K. (2009). *Školská matematika v prostredí IKT*. Bratislava, Slovensko: PedF UK Bratislava.

Prílohy

Príloha A – Stereometrický test

Úloha 1

- a) Zostrojte rez kocky rovinou BXY . Vyznačte viditeľnosť jednotlivých strán vzniknutého rezu.
- b) Zostrojte rez kocky rovinou XYZ . Vyznačte viditeľnosť jednotlivých strán vzniknutého rezu.



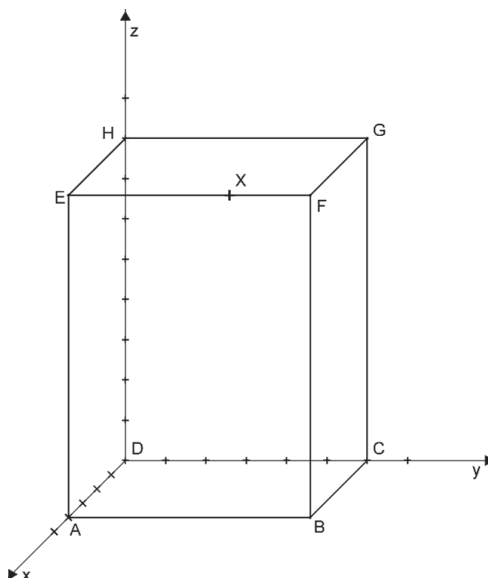
Úloha 2

Určte súradnice bodov X a F , ak sú dané súradnice vrcholov $C[0,6,0]$, $H[0,0,8]$, $A[4,0,0]$ a bod $X \in EF$, pričom $|EX| = \frac{2}{3}|EF|$.

Riešenie:

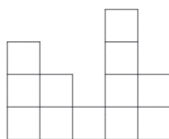
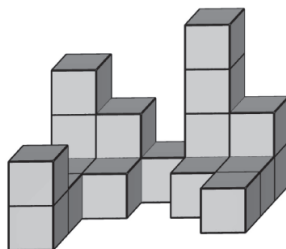
$X [\quad]$

$F [\quad]$

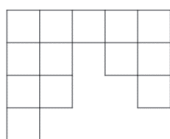


Úloha 3

Vyberte a pomenujte z uvedených možností a) – f) pohľad spredu, pohľad zhora a pohľad sprava daného telesa na obrázku.



a)



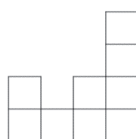
b)



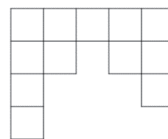
c)



d)



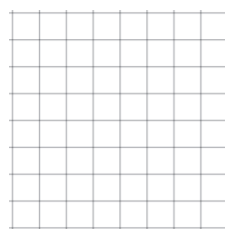
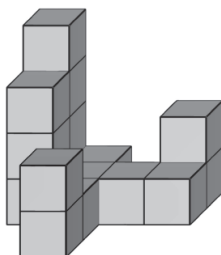
e)



f)

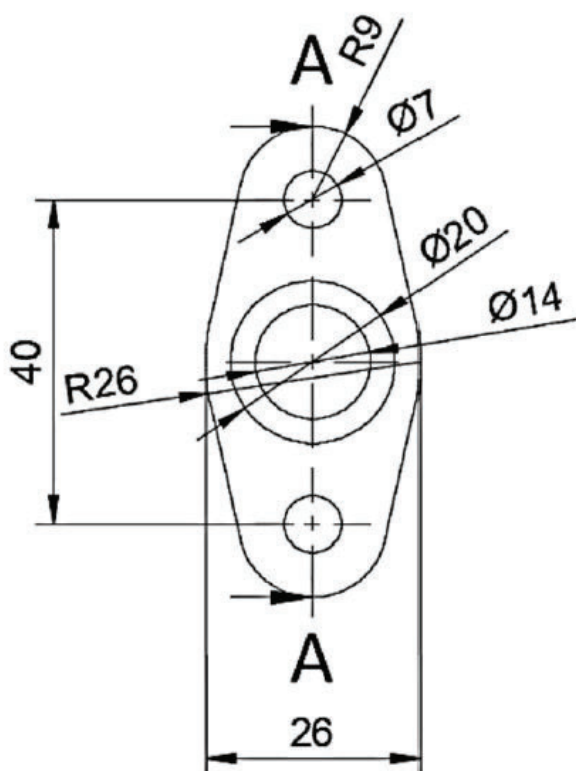
Úloha 4

Zakreslite pohľad spredu, pohľad zhora a pohľad sprava daného telesa.



Úloha 5 V1

Narysujte rez súčiastky myslenou rovinou rezu ak viete, že hĺbka otvoru s väčším priemerom je 2,5 a hrúbka súčiastky $t = 10$.



Úloha 5 V2

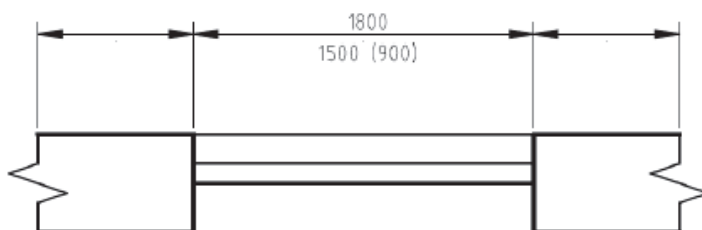
Narysujte zvislý rez oknom v mierke 1:50, ak viete, že:

svetlá výška miestnosti by bola 2800 mm a konštrukčná výška 3100 mm,

nadpražie rovné,

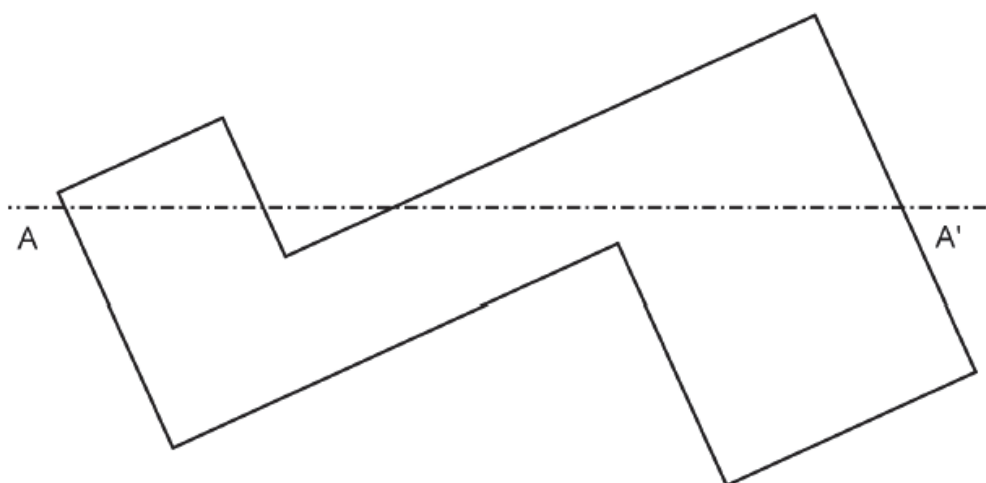
okno zdvojené,

kótovanie + výškové kóty.



Úloha 5 V3

Riešte strechu nad daným pôdorysom a zostrojte rez rovinou $A - A'$.



Príloha B – Titulný list k metodike „Zobrazujeme 3D do 2D“

Tematický celok/Téma	
Geometria a meranie Voľné rovnobežné premietanie	
Ciele	
Žiakom osvojované vedomosti a zručnosti	Žiakom rozvíjané spôsobilosti
• Pojem rovnobežné premietanie • Pojem priemetňa, smer premietania, priemet útvaru • Pochopiť základné vlastnosti rovnobežného premietania • Na základe vlastností rovnobežného premietania vedieť zobraziť rôzne geometrické útvary do roviny	• Predpovedať výsledky modelu • Zaznamenať výsledky • Zdieľať a prezentovať výsledky pred spolužiakmi • Formulovať závery
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	
• Rozlišovať, pomenovať rovinné a priestorové útvary • Mať osvojené základné pravidlá rysovania a vedieť používať pomôcky na rysovanie • Ovládať základy práce s geometrickým softvérom	
Riešený didaktický problém	
Často sa pri vyučovaní stereometrie stretávame s tým, že žiaci majú nedostatočnú priestorovú predstavivosť, ktorú ale treba ďalej rozvíjať. Nemajú vedomosti o základných spôsoboch zobrazovania rovinných a priestorových geometrických útvarov do roviny. Často automaticky začínajú v rámci vyučovacieho procesu pracovať s priemetom kocky ako s telesom. Okrem budovania základných princípov geometrie priestoru, jeho zobrazovania do roviny, je dôležité u žiakov podporiť používanie náčrtov, obrázkov pri riešení konkrétnych geometrických úloh.	
Dominantné vyučovacie metódy a formy	Príprava učiteľa a pomôcky
• Projektová metóda • Skupinová forma (skupinu tvoria 4 – 5 žiaci) • Práca s DT	• Počítač, dataprojektor, program GeoGebra (prípadne Cabri 3D) • Pracovné listy
Diagnostika splnenia vzdelávacích cieľov	
Diskusia a formulovanie získaných výsledkov budú slovne hodnotené pri zverejnení a obhajobe riešenia daných problémových úloh jednotlivými skupinami žiakov v závere vyučovacej hodiny. Hodnotenie bude formatívne.	

Príloha B – Titulný list k metodike „Hľadáme prieniky lineárnych útvarov v priestore“

Tematický celok/Téma	
Geometria a meranie Znáozorňovanie trojrozmerného priestoru	
Ciele	
Žiakom osvojované vedomosti a zručnosti	Žiakom rozvíjané spôsobilosti
• Priamka a rovina v priestore • Pojmy súvisiace so vzájomnými polohami ľubovoľných dvoch lineárnych útvarov • Rozhodnúť a zdôvodniť vzájomnú polohu dvoch lineárnych útvarov v priestore • Geometricky opísať a načrtnúť jednotlivé vzájomné polohy lineárnych útvarov pomocou ich obrazu vo voľnom rovnobežnom premietaní	• Zaznamenávať výsledky • Vysvetľovať alebo upravovať modelovacie postupy • Formulovať závery • Aplikovať modelovacie postupy na nové problémy
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	
• Rozlišovať a pomenovať lineárne útvary (bod, priamka, rovina) • Popísať vzájomnú polohu uvedených lineárnych útvarov v priestore • Vedieť načrtnúť obrazy hranatých telies vo voľnom rovnobežnom premietaní • Ovládať základy práce s geometrickým programom (GeoGebra, Cabri 3D, ...)	
Riešený didaktický problém	
Na úrovni strednej školy nie sú žiaci často schopní riešiť stereometrické úlohy vzhľadom na ich nedostatočnú priestorovú predstavivosť. Nedisponujú vedomosťami o základných spôsoboch zobrazovania priestorových geometrických útvarov do roviny, s čím súvisia aj nedostatky pri zisťovaní polohových vlastností týchto útvarov v priestore. Okrem toho je dôležité u žiakov neustále podporovať používanie náčrtov, obrázkov, konštrukcií alebo rôznych demonštrácií, súvisiacich s riešením rôznych geometrických úloh.	
Dominantné vyučovacie metódy a formy	Príprava učiteľa a pomôcky
• Riadené bádanie • Skupinová forma (3 – 5 žiakov tvorí jednu skupinu)	• Počítač, dataprojektor, program GeoGebra (prípadne Cabri 3D) • Pracovný list • Dynamické konštrukcie vytvorené v programe GeoGebra
Diagnostika splnenia vzdelávacích cieľov	
Diskusia, ako aj interpretácia získaných výsledkov, budú slovne hodnotené bezprostredne po vyriešení každej problémovej úlohy jednotlivými skupinami žiakov v priebehu vyučovacej hodiny. Hodnotenie bude formatívne.	

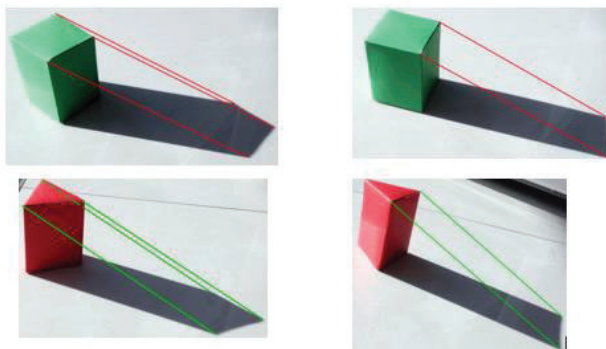
Príloha B – Titulný list k metodike „Rôzne pohľady na rezy hranatých telies rovinou“

Tematický celok/Téma	
Geometria a meranie Znázorňovanie trojrozmerného priestoru	
Ciele	
Žiakom osvojované vedomosti a zručnosti	Žiakom rozvíjané spôsobilosti
• Na základe vlastností rovnobežného premietania vedieť zobraziť rôzne hranaté telesá do roviny • Klasifikovať vzájomnú polohu troch rovín v priestore • Zostrojiť a vysvetliť rovinný rez hranatých telies rovinou	• Navrhnuť postup modelovania • Vysvetľovať alebo upravovať modelovacie postupy • Formulovať závery • Aplikovať modelovacie postupy na nové problémy
Požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti	
• Rozlišovať a vedieť pomenovať rovinné a priestorové útvary • Vedieť načrtnúť obrazy hranatých telies vo voľnom rovnobežnom premietaní, hlavne kocku, kváder, kockové teleso, iné hranoly a ihlany • Vedieť zostrojiť prieniky dvoch lineárnych útvarov v priestore • Ovládať základy práce s dynamickým programom (GeoGebra, Cabri 3D, ...)	
Riešený didaktický problém	
Na stredných školách pretrváva u žiakov nízka úroveň priestorovej predstavivosti, čo potvrdzujú aj rôzne domáce a medzinárodné testovania. K rozvoju priestorovej predstavivosti žiakov vieme dopomôcť, najmä zaraďovaním rôznych zaujímavých metód a spôsobov do vyučovacieho procesu matematiky, ale aj využívaním prostriedkov IKT, hlavne na vizualizovanie konkrétneho stereometrického problému. K takýmto problémom patrí aj zostrojovanie rezu daného telesa rovinou. Žiaci používajú často len algoritmickejší prístup k riešeniu uvedených úloh. Pomocou dynamických programov je možné názornejšie prezentovať daný rez telesa rovinou, niektoré pomocné konštrukcie, ako aj vybrané časti tohto rezu. Výsledný obrázok ponúka nový pohľad na riešenie v súlade so zásadami, ktoré platia pri zostrojovaní rovinných rezov hranatých telies.	
Dominantné vyučovacie metódy a formy	Príprava učiteľa a pomôcky
• Riadené bádanie • Individuálna forma • Práca s DT	• Počítač, dataprojektor, program GeoGebra (prípadne Cabri 3D) • Rysovacie pomôcky • Pracovný list • Dynamické konštrukcie vytvorené v programe GeoGebra
Diagnostika splnenia vzdelávacích cieľov	
Formulované žiacke výsledky všetkých problémových úloh (vrátane úloh v pracovnom liste) budú v priebehu vyučovacej hodiny slovné hodnotené učiteľom. Hodnotenie práce žiakov učiteľom bude teda formatívne.	

Príloha C – Pracovný list: Zobrazujeme 3D do 2D – motivácia

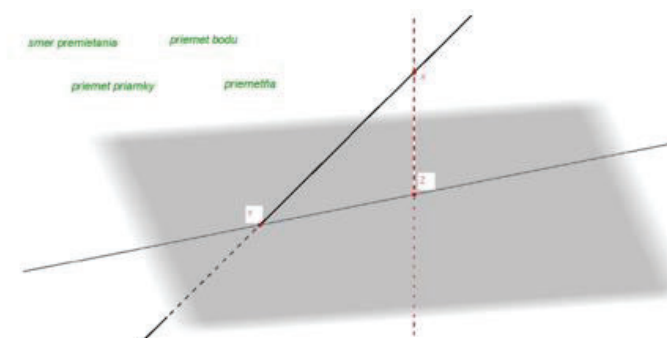
Úloha 1

Pozrite sa na dané obrázky a popíšte, čo na nich vidíte.



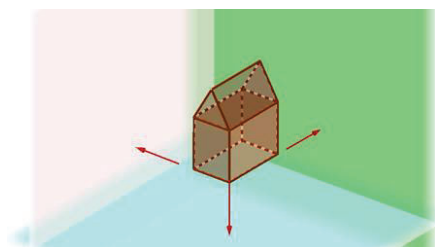
Úloha 2

Priradte k jednotlivým útvarom správne pomenovanie. Diskutujte o nich a pracujte s interaktívnou konštrukciou pojmy_premietanie.ggb.



Úloha 3

Daný je domček a tri rôzne roviny. Načrtnite do daných rovín priemet domčeka, pričom smer premietania bude kolmý na tieto roviny (priemetne). Využite pri riešení interaktívnu konštrukciu priemet_domček_roviny.ggb.



Príloha D – Pracovný list: Problémové úlohy pre projekt žiakov

Úloha 1

Opíšte úsečku, ktorej priemetom v rovnobežnom premietaní je jeden bod. Existuje viacej možností?

Úloha 2

Zistite, aký geometrický útvar môže byť priemetom dvoch rovnobežných priamok v rovnobežnom premietaní. Tieto priamky sú rôznobežné s priemetňou a premietame ich kolmo do priemetne (t. j. smer premietania vzhľadom na priemetňu je kolmý).

Úloha 3

Aký geometrický útvar môže byť priemetom trojuholníka v rovnobežnom premietaní, ak smer premietania je rôznobežný s priemetňou?

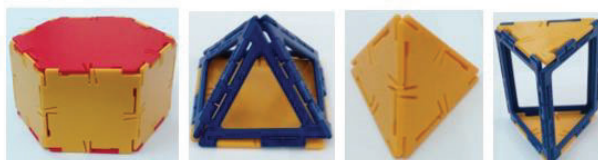
Tabuľka pre žiacke bádanie

geometrický útvar	smer premietania	priemetom daného geometrického útvaru je/sú
úsečka		
úsečka		
dve rovnobežné priamky	kolmý na priemetňu	
trojuholník	rôznobežný s priemetňou	

Príloha E – Pracovný list: Hranaté telesá

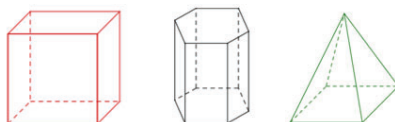
Úloha 1

Pomenujte hranaté telesá na obrázkoch a vysvetlite tieto ich pomenovania.



Úloha 2

Vyplňte tabuľku s vlastnosťami daných telies, zobrazených vo voľnom rovnobežnom premietaní.



názov telesa	počet vrcholov	počet hrán	počet stien

Úloha 3

Doplňte nasledujúce tvrdenia o vzájomných polohách daných lineárnych útvarov:

- dve priamky v priestore môžu byť navzájom,
- dve roviny majú nasledujúce vzájomné polohy,
- priesečnica je.

Úloha 4

Pracujte s interaktívnou konštrukciou hranol_vzájomné polohy.ggb, vyznačte v danom telese priamky a roviny podľa pokynov.

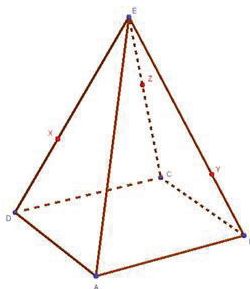
Vyznačte v hranole $ABCDEFGH$:

- priamku rovnobežnú s priamkou AC (obidve priamky vyznačte červenou farbou),
- priamku rôznobežnú s rovinou BDX (priamku vyznačte zelenou farbou),
- mimobežnú priamku s priamkou AH (obidve priamky vyznačte modrou farbou),
- rovinu rôznobežnú s rovinou CDG (roviny vyznačte čiernou farbou).

Príloha F – Pracovný list: Zadania úloh k hľadaniu prienikov lineárnych útvarov

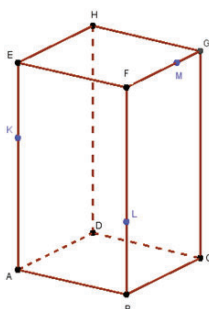
Úloha 1

Daný je štvorboký ihlan $ABCDE$ a rovina XYZ . Aký n -uholník môže byť rezom štvorbokého ihlana rovinou? Od čoho to závisí?



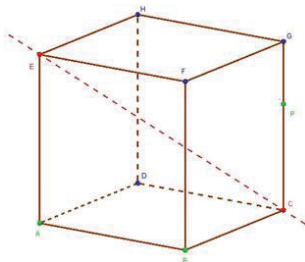
Úloha 2

Zostrojte rovinný rez kvádra $ABCDEFGH$ rovinou KLM , kde body K , L , M sú postupne vnútornými bodmi hrán AE , BF , FG . Vypíšte všetky úsečky, ktoré tento rez ohraničujú a vyznačte tri rôzne priamky, ktoré ležia v rovine KLM .



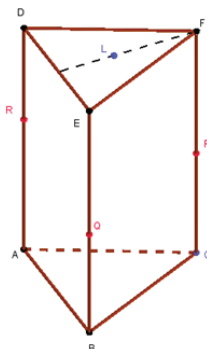
Úloha 3

Zostrojte priesečník priamky EC a roviny ABP v kocke $ABCDEFGH$, kde bod P je vnútorným bodom hrany CG . Zapište postup konštrukcie s využitím interaktívnej konštrukcie prienik_priamky_roviny.ggb.



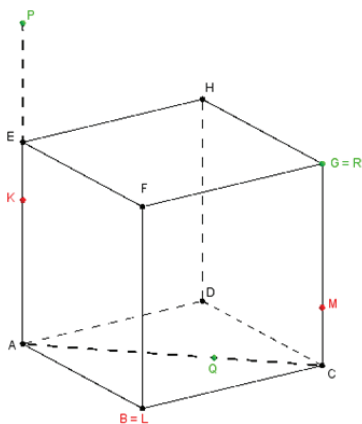
Úloha 4 – domáca úloha

Zostrojte priesečník priamky CL a roviny PQR v trojbokom hranole $ABCDEF$, kde body P, Q, R sú postupne vnútornými bodmi hrán CF, BE, AD a bod L je vnútorným bodom steny DEF .



Úloha 5 – problémová úloha

Zostrojte prienik rovnobežníka $KLMN$ a trojuholníka PQR .

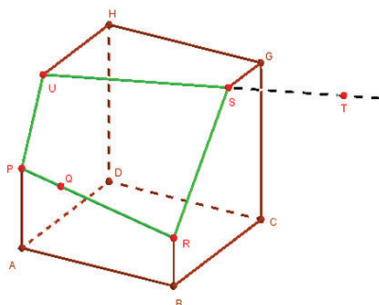


Príloha G – Pracovný list: Rôzne pohľady na rezy hranatých telies rovinou

Úloha 1

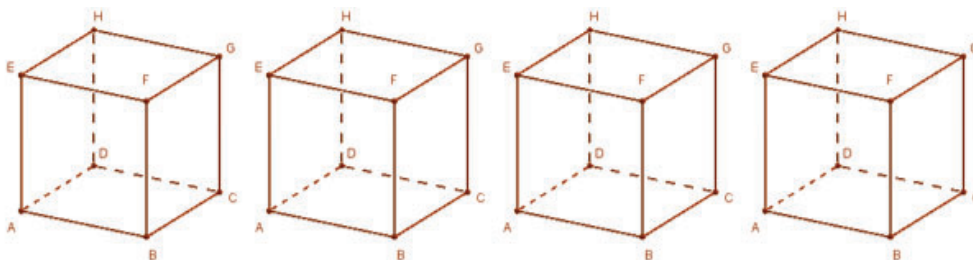
Pozorujte kocku na obrázku a odpovedajte na tieto otázky:

- Popíšte, čo vidíte na tomto obrázku?
- Akou farbou je vyznačená rovina, ktorá bude danú kocku rezať?
- Koľko bodov je potrebných na jednoznačné určenie rezovej roviny kocky? Zapište štyri rôzne možnosti určenia tejto rezovej roviny bodmi z obrázka.
- Musia všetky body rezovej roviny ležať len v danom telese?
- Môžu body určujúce rezovú rovinu ležať na jednej priamke? Svoje tvrdenie zdôvodnite.
- Ako sme daný rez kocky rovinou dostali?
- Prienik roviny rezu:
 - s prednou stenou kocky je úsečka,
 - s hornou stenou kocky je úsečka,
 - s ľavou bočnou stenou kocky je úsečka,
 - s rovinou hornej steny kocky je.



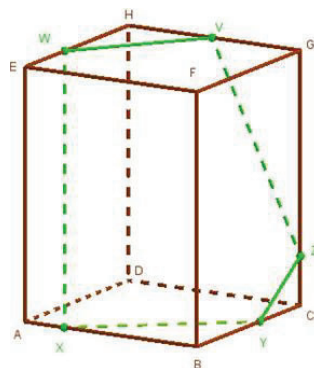
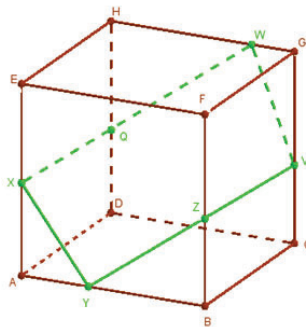
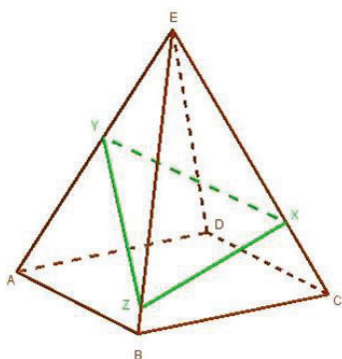
Úloha 2

Vyznačte do danej kocky $ABCDEFGH$ rez rovinou tak, aby týmto rezom bol: bod, úsečka, trojuholník, štvoruholník, päťuholník, šesťuholník a sedemuholník.



Úloha 3

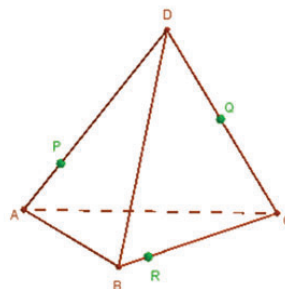
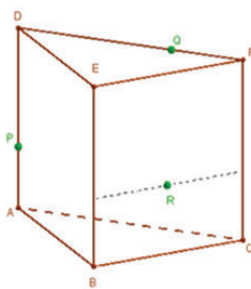
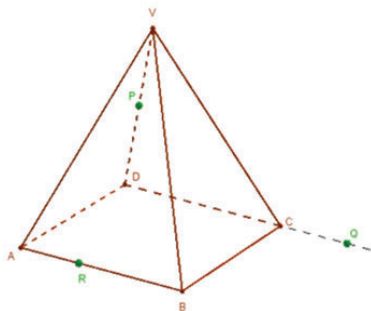
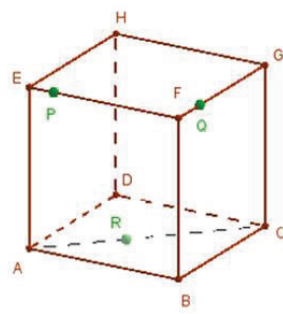
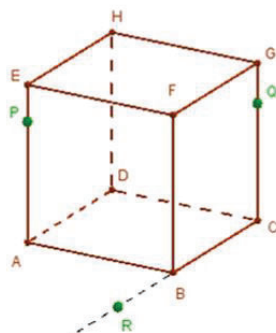
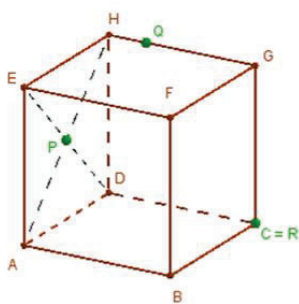
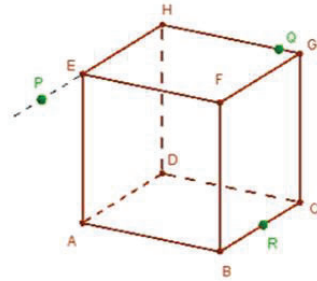
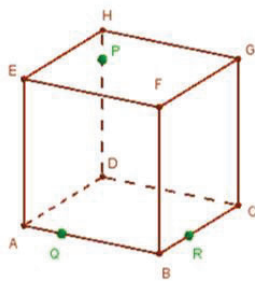
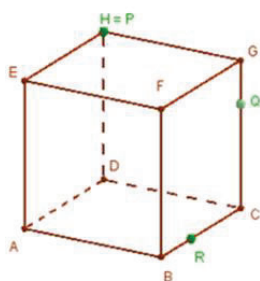
Sú zobrazené na nasledujúcich obrázkoch rezy telies rovinou? Svoje tvrdenie zdôvodnenie.



Príloha H – Úlohy na precvičenie rezov telies rovinou

Úloha 1

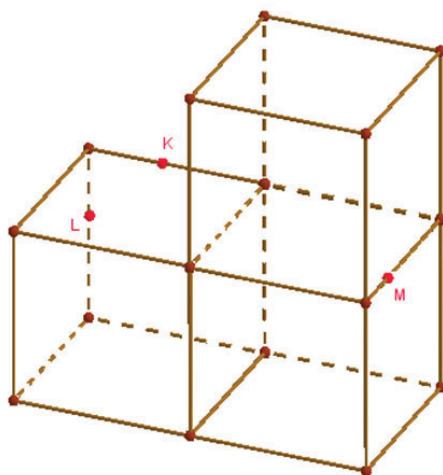
Zostrojte rez telesa rovinou PQR .



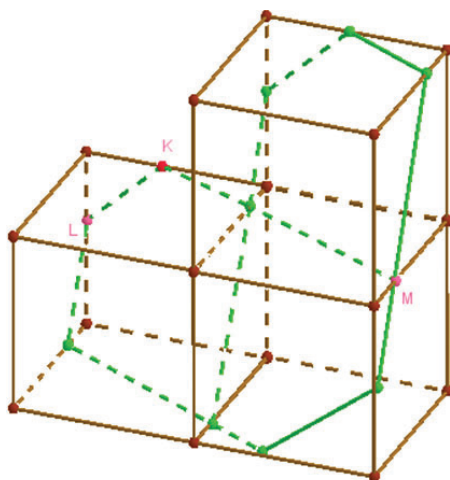
Príloha I – Zadané problémové úlohy

Úloha 1

Zostrojte rez kockového telesa rovinou KLM .



Riešenie problémovej úlohy



Názov: **Teória a prax zobrazovania priestoru na stredných školách
technického zamerania**

Autori: Lucia Rumanová, Dušan Vallo, Katarína Laššová

Vydavateľ: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Edícia: Prírodovedec č. 901

Rok vydania: 2025

Miesto vydania: Nitra

Počet strán: 110 + prílohy (7,6 AH)

Počet kusov: 70

ISBN 978-80-558-2292-1

