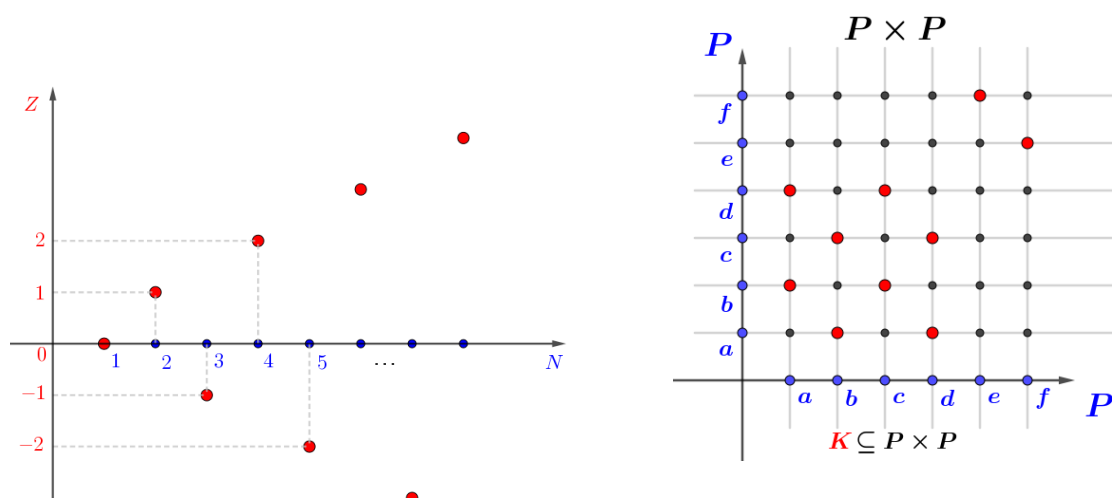
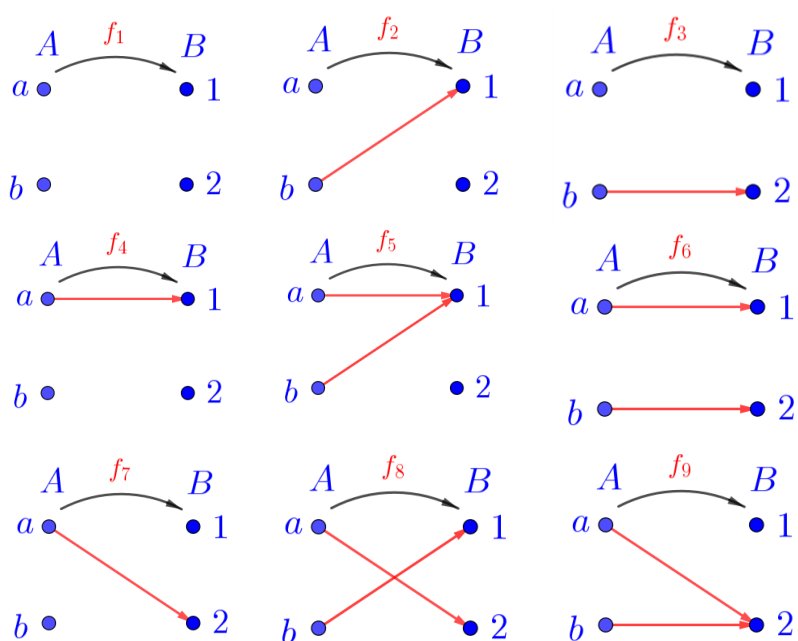


UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE
Fakulta prírodných vied a informatiky



ÚVOD DO TEÓRIE MNOŽÍN

PRE ROZŠIRUJÚCE ŠTÚDIUM MATEMATIKY



Dušan Vallo

Názov: Úvod do teórie množín pre rozširujúce štúdium matematiky

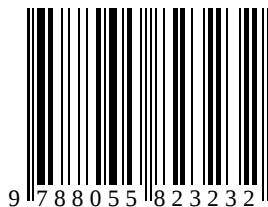
Edícia: Prírodovedec č. **910**

Autor: doc. RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Recenzenti: Dr.h.c. prof. PhDr. PaedDr. Tomáš Lengyelfalussy, PhD.
 doc. PaedDr. Peter Vankúš, PhD.

© Dušan Vallo

ISBN: 978-80-558-2323-2



Obsah

Pár slov na úvod.....	5
1 Výroková logika.....	6
1.1 Výroky	6
1.2 Negácie výrokov.....	8
1.3 Výroková forma	8
1.4 Kvantifikátory.....	9
1.5 Cvičenia.....	10
1.6 Odporúčaná literatúra	10
2 Množiny	11
2.1 Intuitívny pohľad na množiny.....	11
2.2 Axiomatický prístup k teórii množín.....	11
2.3 Množiny	12
2.4 Grafické znázornenie množín.....	14
2.5 Množinová algebra	15
2.6 Grafické znázorňovanie množinových operácií.....	21
2.7 Rozklad neprázdnej množiny	22
2.8 Cvičenia.....	24
2.9 Odporúčaná literatúra	25
3 Karteziánsky súčin množín	26
3.1 Cvičenia.....	29
3.2 Odporúčaná literatúra	29
4 Relácie.....	30
4.1 Relácia na množine	34
4.2 Relácia ekvivalencie	39
4.3 Cvičenie.....	41
4.4 Odporúčaná literatúra	42
5 Usporiadané množiny a relácie usporiadania	43
5.1 Čiastočne usporiadaná množina	43
5.2 Lineárne usporiadaná množina.....	45
5.3 Poznámka k terminológii ČUM a LUM	46
5.4 Dobré usporiadaná množina.....	46
5.5 Husto usporiadaná množina	52
5.6 Ohraničená množina.....	53

5.7	Spojito usporiadaná množina.....	55
5.8	Cvičenie.....	55
5.9	Odporúčaná literatúra	56
6	Zobrazenie	57
6.1	Skladanie zobrazení	62
6.2	Vlastnosti zobrazení.....	64
6.3	Cvičenia.....	67
6.4	Odporúčaná literatúra	67
7	Ekvivalentné množiny	68
7.1	Konečné množiny a nekonečné množiny.....	69
7.2	Kardinálne čísla	70
7.3	Spočítateľné množiny	75
7.4	Nespočítateľné množiny	78
7.5	Poznámka k algebrickým a transcendentným číslam.....	80
7.6	Cvičenie.....	81
7.7	Odporúčaná literatúra	81
8	Poznámka k axióme výberu	83
	Zoznam použitej literatúry.....	85

Pár slov na úvod...

Teória množín je matematická disciplína, ktorá sa venuje štúdiu množín, vzťahov medzi prvkami množín a aplikáciám v rôznych matematických odboroch. Svojím rozsahom má široké použitie, pretože každá súčasná matematická disciplína má svoje základy v teórii množín.

Z toho dôvodu je dôležité, aby každý budúci učiteľ matematiky mal aspoň základné vedomosti z teórie množín. Vedomosti a poznatky, ktoré presahujú bežné obsahové a výkonové štandardy iŠVP z matematiky (najmä tematického okruhu Logika, dôvodenie, dôkazy) pre stredné školy.

Predložená učebnica je obsahovo a koncepcne orientovaná pre potreby frekventantov rozširujúceho štúdia matematiky na FPVal UKF v Nitre, ktorí si rozširujú svoju pedagogickú spôsobilosť v kurzoch ďalšieho vzdelávania.

Je pochopiteľné, že v jednom semestrálnom kurze nemožno predložiť úplný výklad teórie, ktorý by bol plnohodnotne doplnený všetkými dôkazmi viet a ich dôsledkov, ako aj ilustračnými príkladmi a inými hodnotnými detailmi.

Koncepcia však umožňuje pokračovať samostatným štúdiom literatúry, je doplnená o názorné obrázky, mnohé riešené príklady a cvičenia.

Treba zdôrazniť, že dôležitými predpokladmi úspešného štúdia sú tri faktory:

- a) dobre ovládať stredoškolské základy matematiky,
- b) učiť sa vždy názorne a vytvárať si konkrétne predstavy spojené s učivom,
- c) byť v štúdiu vytrvalý a mať zodpovedný prístup.

Verím, že publikácia bude dobrým pomocníkom pri štúdiu základov teórie množín.

V Nitre, 26. októbra 2025.

Autor

1 Výroková logika

1.1 Výroky

Výrokom sa rozumie vyslovené alebo napísané tvrdenie, zväčša oznamovacia veta, o pravdivosti ktorej má zmysel uvažovať. Výrok je pravdivý práve vtedy, keď tvrdí fakty v zhode so skutočnosťou. Ak tomu tak nie je, hovoríme o výroku, že je nepravdivý.

V okamihu formulovania výroku nie sme viazaní povinnosťou vedieť, či je výrok pravdivé alebo nepravdivé tvrdenie. Zhodneme sa však v tom, že môže nastať **len jedna** z možností – výrok platí (*je pravdivý*) alebo výrok neplatí (*je nepravdivý*). Ak nevieme rozhodnúť o pravdivosti výroku, nazývame ho **hypotézou**.

Príklady výrokov:

„Prirodzené číslo 5 je menšie ako prirodzené číslo 20.“

– výrok je pravdivý

„Každé prirodzené číslo je párne.“

– výrok je nepravdivý, pretože napr. číslo 5 nie je párne. Vo výroku sa požaduje sa, aby **každé** prirodzené číslo bolo párne. Postačuje teda jeden prípad, ktorý „naruší“ všeobecnú formuláciu.

„Prvočísel v tvare $p, p + 2$ je nekonečne mnoho.“

- výrok je hypotézou. Existujú prvočíselné dvojice, napr. „3,5“ alebo „11,13“, resp. „17,19“, „29,31“. Aktuálne však nevieme, či ich je nekonečne mnoho alebo len konečný počet.

Každá slovná formulácia nie je výrokom, napr. otázky alebo rozkazy: „Prší?“ , „Prines noviny!“. Ide o také formulácie, ktoré samy o sebe (samonosne) nie sú ani pravdivé, a ani nepravdivé (napr. kde je miesto, na ktorom má pršať; prší dážď alebo lístie zo stromov na jeseň; ... a pod.).

Výroky, ktoré sme uviedli ako príklady, mali matematickú podstatu. V celom texte sa venujeme len takýmto výrokom a označujeme ich malými tlačenými písmenami, napr.

- výrok q : „Prirodzené číslo 5 je menšie ako prirodzené číslo 20.“
- výrok r : „Každé prirodzené číslo je párne.“

Ak o výroku vieme, že je pravdivý, priradíme mu pravdivostnú hodnotu 1, inak mu priradíme hodnotu 0. Zapisujeme jednoducho: $h(q) = 1$, resp. $h(r) = 0$.

Všeobecne, označenia ako $q, r, s, \dots$ môžu označovať nielen výroky, ale aj **výrokové premenné** (premenné, ktoré zastupujú výroky).

Z oznamovacích viet vieme vytvoriť súvetia pomocou rôznych spojok. Z jednoduchých výrokov (výrokových premenných) pomocou vybraných, tzv. **logických spojok** „... a...“ ; „... alebo ...“; „ak ..., potom...“; „... vtedy a len vtedy, keď...“ vytvárame tzv. **zložené výroky**. Ich názvy, označenie a príklady sú uvedené v tabuľke.

Tab. 1

Názov	Spojka	Značka	Ukážka zápisu	Konkrétny príklad - slovný
konjunkcia	a	$\wedge$	$q \wedge r$ čítame : „q a r“	„Prirodzené číslo 5 je menšie ako prirodzené číslo 20 a každé prirodzené číslo je párne.“
alternatíva	alebo	$\vee$	$q \vee r$ čítame : „q alebo r“	„Prirodzené číslo 5 je menšie ako prirodzené číslo 20 alebo každé prirodzené číslo je párne.“
implikácia	ak ..., potom ...	$\Rightarrow$	$q \Rightarrow r$ čítame : „ak q, potom r“	„ Ak prirodzené číslo 5 je menšie ako prirodzené číslo 20, potom každé prirodzené číslo je párne.“
ekvivalencia	... vtedy a len vtedy, keď...	$\Leftrightarrow$	$q \Leftrightarrow r$ čítame : „q vtedy a len vtedy, keď r“	„Prirodzené číslo 5 je menšie ako prirodzené číslo 20 vtedy a len vtedy, keď každé prirodzené číslo je párne.“

Výraz, ktorý vznikol z konečného počtu jednoduchých výrokov, výrokových premenných (prípadne už zo zložených výrokov), logických spojok a zátvoriek, nazývame **výrokovou formulou**.

Zložený výrok, resp. výroková formula je tiež výrok a my môžeme uvažovať o jeho pravdivostnej hodnote. Výsledná pravdivostná hodnota závisí len od pravdivostných hodnôt jeho zložiek. Hovoríme, že ide o **extenzionálny spôsob** tvorby zložených výrokov, resp. výrokových formúl.

Napr. konjunkcia $q \wedge r$ z Tab. 1 je nepravdivý výrok; alternatíva $q \vee r$ je pravdivý výrok; zložené výroky $q \Rightarrow r$, $q \Leftrightarrow r$ sú oba nepravdivé.

Rozhodnúť o pravdivosti zloženého výroku nám pomáha tabuľka pravdivostných hodnôt Tab. 2 Prvé dva stĺpce uvádzajú všetky 4 možnosti pravdivostných hodnôt zložiek.

Tab. 2

q	r	$q \wedge r$	$q \vee r$	$q \Rightarrow r$	$q \Leftrightarrow r$	q'
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Prípadne, ak označíme $h(q) = a$, kde $a \in \{0,1\}$, $h(r) = b$, kde $b \in \{0,1\}$, potom platí:

Tab. 3

q	r	$q \wedge r$	$q \vee r$	$q \Rightarrow r$	$q \Leftrightarrow r$	q'
a	b	$a \cdot b$	$a + b - ab$	$1 - a + ab$	$1 - a - b + 2ab$	$1 - a$

Všimnime si, že v prípade zložených výrokov:

- konjunkcia je pravdivá len v prípade, že obe zložky sú pravdivé,
- alternatíva je pravdivá, ak aspoň jedna zo zložiek je pravdivá. Na rozdiel od slovenského jazyka, alternatíva sa v matematike nepoužíva vo vylučovacom zmysle.
- Implikácia je nepravdivá len v prípade, že „1 $\Rightarrow$ 0“,
- ekvivalencia je pravdivá, ak obe zložky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Výroková formula obsahujúca ako premenné znaky výrokov, ktorá sa stane **pravdivým výrokom**, ak za premenné dosadíme ľubovoľne pravdivé alebo nepravdivé výroky, sa nazýva **tautológiou**. K najznámejším tautológiám patria:

- $q \vee q' \Leftrightarrow 1$
- $q \wedge q' \Leftrightarrow 0$
- $(q \wedge r) \Leftrightarrow (r \wedge q)$
- $(q \vee r) \Leftrightarrow (r \vee q)$
- $(q \wedge r) \vee s \Leftrightarrow ((q \vee s) \wedge (r \vee s))$
- $((q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow s)$
- $(q \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q))$

1.2 Negácie výrokov

V Tab. 2 a Tab. 3 posledný stĺpec určuje pravdivostnú hodnotu negovaného výroku q . **Negáciou výroku** rozumieme priradenie opačnej pravdivostnej hodnoty pôvodnému výroku. V prípade konkrétneho výroku ide o takú slovnú formuláciu, ktorá zmení obsahový význam na opačný, napr.

- výrok q' : „**Nie je pravda**, že *prirodzené číslo 5 je menšie ako prirodzené číslo 20*.“
- výrok q' : „*Prirodzené číslo 5* **nie je menšie ako prirodzené číslo 20**.“
- výrok q' : „*Prirodzené číslo 5* **väčšie alebo rovné ako prirodzené číslo 20**.“

Z uvedeného vyplýva, že negáciou výroku netvoríme zložený výrok. Pre negácie zložených výrokov platia tieto základné pravidlá (tautológie):

- $(q \wedge r)' \Leftrightarrow (q' \vee r')$
- $(q \vee r)' \Leftrightarrow (q' \wedge r')$
- $(q \Rightarrow r)' \Leftrightarrow (q \wedge r')$
- $(q \Leftrightarrow r)' \Leftrightarrow ((q \wedge r') \vee (q' \wedge r))$

Napr. negácia implikácie: „*Ak je 5 je prvočíslo, potom $5^2 + 1$ je deliteľné číslom 13*.“ by znela: „Číslo 5 je prvočíslo **a súčasne $5^2 + 1$ nie je deliteľné číslom 13**.“

1.3 Výroková forma

Výrokovou formou¹ nazývame taký jazykový výraz, ktorý obsahuje jednu alebo viac premenných.

Napr.: veta „*On je študent*.“ je oznamovacou vetou, ale nie je jasné, koho myslíme pod pojmom „*on*“. Nejde teda o výrok, pretože nemá zmysel hovoriť o pravdivosti, či nepravdivosti tvrdenia, kým za premennú „*on*“ dosadíme konkrétnu osobu. Ak uvažujeme o skupine osôb $\{\text{Ján, Matej, Alica}\}$ a vieme, že len Matej študuje, potom veta „*Matej je študent*.“ je pravdivým výrokom, ktorý vznikol z uvedenej výrokovej formy.

V matematike sa premenné označujú malými písmenami, preto sú bežné výrokové formy ako napr. :

- výroková forma s jednou premennou x : $x \in R: -1 \leq x \leq 1$,
- výroková forma s tromi premennými x, y, z : $x, y, z \in R: x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Výrokovú formu s jednou premennou x zvyčajne označujeme ako $V(x)$; výrokové formy premenných $x, y, z, u, v, \dots$ zase ako $V(x, y, z, u, v, \dots)$.

¹ V školskej matematike sa niekedy označujú aj pojmom **výrokové funkcie**.

Ak dve výrokové formy majú rovnaký obor premenných, môžeme pomocou známych logických spojok vytvárať **zložené výrokové formy**, napr.:

ak $V_1(x)$ je výroková forma ($x \in R: -1 \leq x \leq 1$) a $V_2(x)$ je výroková forma $x \in R: x^2 = \frac{1}{4}$, potom ich konjunkcia $V_1(x) \wedge V_2(x)$ je v tvare ($x \in R: -1 \leq x \leq 1$) $\wedge$ ($x \in R: x^2 = \frac{1}{4}$)

Dosadením konštánt za premenné vzniknú z výrokových foriem výroky, napr.:

pre $x = -\frac{1}{2}$ dostaneme pravdivý výrok

$$\left(-\frac{1}{2} \in R: -1 \leq -\frac{1}{2} \leq 1\right) \wedge \left(-\frac{1}{2} \in R: \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right)$$

a pre $x = 0$ by sme mali výrok nepravdivý (konjunkcia ako zložený výrok je nepravdivá, pretože $0^2 \neq \frac{1}{4}$).

1.4 Kvantifikátory

Ako sme uviedli, dosadzovaním prípustných konštánt za premenné, sa z výrokových foriem vytvárajú výroky.

Ďalším spôsobom, ako z výrokových foriem vytvárať výroky je tzv. **kvantifikácia** pomocou tzv. **kvantifikátorov**.

Tab. 4

Kvantifikátor	Význam kvantifikátora	Ukážka
každý	ľubovoľný	každé reálne číslo
aspoň n	n a viac	aspoň 5, t.j. 5,6,7, ...
najviac n	n a menej	najviac 3, t.j. 0,1,2,3
práve n	presne n , nie viac a nie menej	práve 2, t.j. 2

V matematických vetách a tvrdeniach sa bežne používajú tzv. tri **základné kvantifikátory**:

Tab. 5

Kvantifikátor	Označenie	Kvantifikovaný výrok	Negácia kvantifikovaného výroku
všeobecný	$\forall$	$\forall x \in M: V(x)$ čítame: „Pre každé (ľubovoľné) x z množiny M platí $V(x)$.“	$\exists x \in M: V'(x)$ čítame: „Existuje x z množiny M také, že neplatí $V(x)$.“
existenčný	$\exists$	$\exists x \in M: V(x)$ čítame: „Existuje x z množiny M také, že platí $V(x)$.“	$\forall x \in M: V'(x)$ čítame: „Pre ľubovoľné x z množiny M neplatí $V(x)$.“
jednoznačne existenčný	$\exists!$	$\exists! x \in M: V(x)$ čítame: „Existuje práve jedno x z množiny M také, že platí $V(x)$.“	čítame: „Pre žiadne x z množiny M platí $V(x)$ alebo pre aspoň dva prvky x z množiny M platí $V(x)$.“

V jednom výroku môže byť použitých viac kvalifikátorov, pričom ich poradie ovplyvňuje obsahový význam výroku, napr.:

- výrok o existencii neutrálneho prvku e v grupe $(G,*)$ znie:
Existuje prvok e v grupe $(G,*)$ taký, že pre ľubovoľný prvok a z grupy $(G,*)$ platí:

$$e * a = a * e = a.$$

Významovo je neutrálny prvok e „spoločný“ pre všetky prvky a grupy $(G,*)$.

Zapísali by sme: $\exists e \in G, \forall a \in G: e * a = a * e = a.$

- Zmenou poradia v zápise

$$\forall a \in G, \exists e \in G : e * a = a * e = a.$$

sa zmenil obsah tvrdenia,

t.j. ku každému prvku a môže existovať jeho „osobitný“ neutrálny prvok, pričom neutrálny prvky prislúchajúce rôznym prvkom množiny G nemusia byť navzájom identické.

1.5 Cvičenia

1. Rozhodnite o pravdivosti výrokov:
 - a) $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{n}{2}$ je párne číslo.
 - b) $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 + x + 41$ je prvočíslo.
 - c) $\forall x, y \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{Z} : x + n_0 = y$
 - d) $\forall x, y \in \mathbb{N} : (x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x - y \in \mathbb{N})$
2. Zistite, či zložený výrok je tautológia:
 - a) $(p \Rightarrow q)' \Leftrightarrow (p \wedge q')$
 - b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$
 - c) $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)).$
3. Vytvorte negácie výrokov z cvičenia 1.

1.6 Odporúčaná literatúra

Vidermanová, K., Záhorská, J., Barčíková, E., Klepancová, M. (2013). Výroková logika. In Vidermanová, K., Záhorská, J., Barčíková, E., Klepancová, M. **Základy matematiky 1** (pp. 9-30). FPV UKF v Nitre. ISBN: 978-80-558-0440-8

Polák, J. (1991). **Přehled středoškolské matematiky**, Prometheus Praha, 7. vyd., ISBN: 80-7196-196-5

Polák, J. (2006). **Středoškolská matematika v úlohách 1**, Prometheus Praha, ISBN: 80-7196-337-2

Odvárko, O. (1973). Výroky, pravdivostné hodnoty výrokov. In Odvárko, O. **Booleova algebra**. (pp. 15-25). Mladá fronta. Dostupné online [2025-09-02]: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403768>

Katětov, M. (1946). Spojování výroků. In Katětov, M. **Jaká je logická výstavba matematiky?** (pp. 6 – 34). JČSMAF Praha. Dostupné online [2025-09-02]: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403133>

2 Množiny

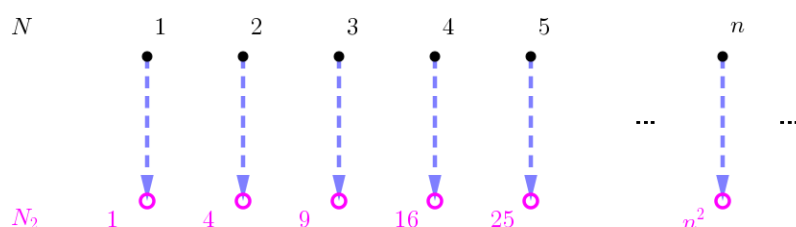
2.1 Intuitívny pohľad na množiny

V mnohých knihách sa **množina** chápe intuitívne ako **súhrn** istých, jednotlivých a dobre rozlíšiteľných objektov - prvkov, ktoré patria do nejakého, jasne vymedzeného celku, napr. množina zamestnancov patriacich do vybranej firmy; množina jabĺk v košíku; a pod.

Samotné slovo „súhrn“ nie je matematický, a ani logický pojem. Používa sa ako vysvetlenie, doplnenie predstavy o celku zloženého z jednotlivých častí. V bežnej praxi často pracujeme so súhrnmi, ktoré majú konečný počet prvkov a fixujeme sa na predstavy o konečnom počte vecí.

Matematické pojmy často pracujú s nekonečným počtom vecí a prichádza k zdanlivým zvláštnostiam, ako je napr. Galileova úvaha:

Označme N súhrn (množinu) všetkých prirodzených čísel $n \geq 1$ a označme N_2 súhrn (množinu) všetkých druhých mocnín prirodzených čísel v tvare n^2 .



Obr. 1

Evidentne, množina N obsahuje prvky, ktoré nie sú obsiahnuté v množine N_2 . Naviac:

- priradenie $n \rightarrow n^2$ je jednoznačné (rôzne prirodzené čísla majú rôzne druhé mocniny)
- a súčasne každý prvok množiny N_2 (druhá mocnina) má svoj tzv. „vzor“ z množiny N , ktorý sa číselne rovná $\sqrt{n^2}$.

Týmto spôsobom sme vzájomne „spárovali“ prvky oboch množín N, N_2 . Z toho plynie logický záver, že tieto množiny musia byť rovnako početné. Ak posudzujeme situáciu z pohľadu skúseností s konečným počtom vecí, ide o paradox.

Paradoxných príkladov v intuitívnej teórii množín je viac, napr.:

Uvažujme množinu (súhrn) všetkých mužov určitého mesta, v ktorom žije jeden holič. Tento holič strihá všetkých mužov, ktorí sa nestrihajú sami. Otázka - kto ostrihá tohto holiča?

Ak sa ostrihá sám, stratí reputáciu - už nebude holičom, čo strihá „nesamostatných“.
Ak sa neostrihá, tak opäť stráca „pôdu pod nohami“, pretože (z povahy jeho pracovnej činnosti) mal by strihať práve on.

V reálnom živote sa dilema vyrieši jednoducho – holičovi sa udelí výnimka. V teórii množín ide o spor, ktorý poukazuje na nevhodnosť intuitívneho prístupu k teórii a zvolí sa axiomatický prístup.

2.2 Axiomatický prístup k teórii množín

Axiomatický prístup k (akejkolvek matematickej) teórii spočíva vo vymedzení tzv. **individuí** - teda predmetov, ktoré samé o sebe nie sú množinami, ale predstavujú veci, predmety, či prvky, ktoré sú dobre rozlíšiteľné a tvoria sa z nich množiny.

Pojem „**množina**“ je v zväčša vždy **základným, nedefinovaným pojmom**, pričom sa vymedzuje aj vzťah „**byť prvkom**“ množiny.

Axiomatický systém vždy definuje tzv. **základné pojmy** a **základné vzťahy**. Súčasne sa používajú rôzne symboly, napr. symbol *incidencie* $\in$, symboly *rovnosti* $=$, logické symboly ($\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$) a ďalšie symboly podľa potreby, napr. zátvorky $\{ \}, ()$...

Samotné tvrdenia o množinách, ktoré nedokazujeme a považujeme ich za „zjavne“ pravdivé výroky, nazývame **axiómy**. Axiómy sa zatriedujú do rôznych skupín (napr. axiómy rovnosti množín, axiómy extenzionality, axióma nekonečnosti, ...) a spoločne vytvárajú tzv. **axiomatický systém**.

Od axiomatického systému sa vyžaduje, aby jeho sústava axióm bola:

- **nezávislá** – žiadna axióma nevyplýva z ostatných axióm,
- **úplná** – každé tvrdenie v príslušnej teórii bolo možné pomocou axióm (prípadne z nich odvodených viet) dokázať alebo vyhlásiť za nepravdivé,
- **bezsporná** – pomocou axióm nie je možné dospieť k tvrdeniu, ktoré je súčasne pravdivé i nepravdivé. Vylučuje sa tým existencia protirečivých tvrdení.

Existujú rôzne axiomatické systémy pre teóriu množín. Podľa toho, ako sa na začiatku zvolia základné pojmy a základné vzťahy, odvíja sa logická výstavba celej teórie, napríklad, môžeme postupovať pomocou zavedených indivíduí a za základné pojmy sa zvolia pojmy „**množina**“ a byť „**prvkom množiny**“. Rozlíšia sa tzv. množiny prvého, druhého a tretieho stupňa a axiómami sa zavedú ich vlastnosti, resp. existencia. Napr. jednou z axióm by bolo tvrdenie:

„Existuje nekonečná množina.“

K najpoužívanejším axiomatickým systémom teórie množín však patrí tzv. *Zermelo-Fraenkelov axiomatický systém*. Má tiež dva základné pojmy „**množina**“ a „**byť prvkom množiny**“, pričom ako axiómy používa (okrem iného, aj tieto) tvrdenia:

„Dve množiny sa rovnajú práve vtedy, keď majú tie isté prvky.“

„Existuje aspoň jedna množina.“

„Nech A, B sú množiny. Potom existuje množina M , ktorej prvkami sú práve množiny A, B .“

Vybudovanie teórie množín od pomocou axiomatického systému je matematicky korektné, avšak časovo a priestorovo náročné, preto ho vynechávame. Čitateľa, ktorý sa problematiku hlbšie zaujíma, odkazujeme na literatúru uvedenú na konci kapitoly.

2.3 Množiny

Býva zvykom, že množiny označujeme veľkými tlačenými písmenami a ich prvky malými tlačenými písmenami. Napr. skutočnosť, že „**prvok x patrí do množiny M** “ zapíšeme $x \in M$.

V prípade, že „**prvok x nepatrí do množiny M** “, zapisujeme $x \notin M$. Niekedy tiež hovoríme, že „prvok x nie je prvkom množiny M .“

Množinu môžeme označiť ľubovoľným veľkým tlačeným písmenom, ale vybrané množiny majú svoje štandardne používané označenie, napr.:

- množina prirodzených čísel² sa označuje N ,
- množina celých čísel ako Z ; racionálnych čísel ako Q ; iracionálnych čísel ako I a konečnú množinu reálnych čísel označujeme písmenom R .

Ak množina obsahuje aspoň jeden prvok, hovoríme, že je **neprázdna**. Napr. zápis

$$M = \{a, b, c, 1\}$$

znamená, že prvky a, b, c a 1 patria do množiny M . Môžeme povedať, že množina M je štvorprvková. Súčasne platí dohoda, že na poradí zapísania prvkov v množinových zátvorkách (teda v $\{ \}$) **nezáleží**.

Množina, ktorá nemá prvky, sa nazýva **prázdnu množinou**, napr. ukážkami prázdnych množín sú:

- množina A reálnych čísel x , pre ktoré platí: $x^2 < 0$, t.j. zapísané

$$A = \{x \in R; x^2 < 0\}$$
- množina B prirodzených čísel $n > 1$, pre ktoré platí: $n + 1 \leq n$, t.j.

$$B = \{n \in N; n + 1 \leq n\}$$

Prázdnu množinu zvykneme značiť vyhradeným symbolom $\emptyset$. Mohli by sme teda zapísať $A = \emptyset$ alebo $B = \emptyset$.

Zvláštnosťou množín je skutočnosť, že prvkom množiny môže byť iná množina, napr. zápis

$$P = \{\{1\}, \{1,2\}, \emptyset\}.$$

znamená, že trojprvková množina P má prvky: jednoprvkovú množinu $\{1\}$, dvojprvkovú množinu $\{1,2\}$ a prázdnu množinu $\emptyset$. Z tohto dôvodu zápis

$$K = \{\emptyset\}$$

uvádza, že ide o jednoprvkovú množinu K , ktorej prvkom je prázdna množina $\emptyset$.

Kvôli prehľadnosti (v prípadoch, kedy prvkami nejakej množiny sú opäť iné množiny) používame radšej pojem **systém množín**. Povieme teda, že $P = \{\{1\}, \{1,2\}, \emptyset\}$ je systém množín. Z dôvodov axiomatického prístupu k množinám, pojem systém množín **nemožno** vždy považovať za množinu, najmä pre prípady, ak by išlo:

- o množinu všetkých množín,
- jednoprvkovú množinu, ktorá by obsahovala len samu seba.

Ako sme už naznačili, množiny možno určiť:

- **vymenovaním prvkov**, čo zapisujeme pomocou množinových zátvoriek, napr. $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Občas sa používa tento typ zápisu použije symbolicky pre množiny, ktoré nemajú konečný počet prvkov, napr. pre množinu obsahujúcu 0 a všetky prirodzené čísla

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$
si treba uvedomiť, že nejde o určenie množiny vymenovaním (všetkých) jej prvkov.
- **Charakteristickou vlastnosťou $V(x)$** (výrokovou formou), ktoré majú všetky prvky z vopred určenej (stanovenej) množiny.

² Podľa súčasných štandardov, medzi prirodzené čísla sa zaraďuje aj číslo 0 . Pre účely tohto učebného textu nepovažujeme číslo 0 za prirodzené číslo.

Napr. ak množina E je množinou všetkých prirodzených čísel, ktoré sú väčšie ako 5 a súčasne menšie alebo rovné ako 11, vopred určenou množinou je množina prirodzených čísel N a charakteristickou vlastnosťou je $5 < n \leq 11$. Zapísali by sme:

$$E = \{\forall n \in N; 5 < n \leq 11\}.$$

Ak by sme chceli množinu E určiť vymenovaním prvkov, zapísali by sme

$$E = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

2.4 Grafické znázornenie množín

Množiny sa graficky znázorňujú pomocou **množinových diagramov** (nazývané aj **Vennove diagramy**), ktoré sú v rovine zakreslené pomocou kruhov, či iných oválnych obrazcov umiestnených do vopred ohraničenej oblasti, reprezentujúcej tzv. **základnú množinu** (ak je vopred určená).

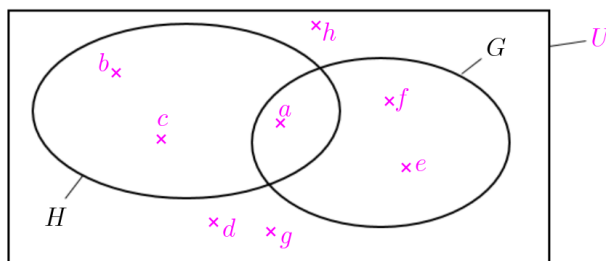
Vymedzenie základnej množiny má význam, pretože rovnaká charakteristická vlastnosť $V(x)$ môže určiť v rôznych základných množinách rôzne výsledky, napr. ak $V(x) \equiv x^2 + 5x - 6 = 0$, potom

- $M_N = \{x \in N; x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{1\},$
- $M_R = \{x \in R; x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{1, -6\}.$

V prípadoch, kedy je množina určená vymenovaním prvkov, značíme do oválom ohraničenej oblasti tieto prvky grafickými značkami (napr. *, ■, ...) s príslušným popisom. Napr.:



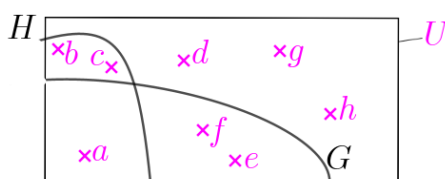
V istých prípadoch býva vopred určená tzv. **základná množina**, ktorú znázorňujeme ohraničenou oblasťou formou obdĺžnika a v nej vyznačujeme jednotlivé množiny. Napr. pre množiny $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $H = \{a, b, c\}$ a $G = \{a, e, f\}$ by sme nakreslili diagram:



Z grafického vyjadrenia vieme, že $a \in H$ a súčasne $a \in G$, $e \notin H$, prípadne $d \notin H$ a súčasne $d \notin G$

Ak by sme obdĺžnik nekreslili, potom sa predpokladá, že základná množina je celá nákresňa.

V literatúre možno nájsť aj **inú formu** množinových diagramov. Predchádzajúci príklad by sme znázornili:



2.5 Množinová algebra

Jedným zo základných pojmov v teórii množín je vzťah „**byť podmnožinou** danej množiny“.

Definícia (inklúzia množín)

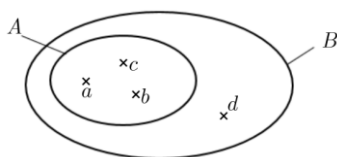
Množina A sa nazýva **podmnožinou** množiny B práve vtedy, keď každý (ľubovoľný) prvok množiny A je aj prvkom množiny B .

Zapisujeme:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Množina A sa nazýva **podmnožinou**³ množiny B ; množina B sa nazýva aj **nadmnožinou** množiny A .

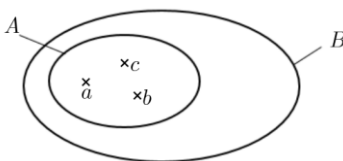
Z definície vyplýva, že môže nastať prípad, kde A je podmnožinou množiny B a súčasne *existujú* prvky z množiny B , ktoré nepatria do A . V takom prípade presnejšie hovoríme, že množina je **vlastnou**⁴ podmnožinou (časťou) množiny B a zapisujeme $A \subset B$.



K známym príkladom patrí množina prirodzených čísel N , ktorá je vlastnou podmnožinou celých čísel Z .

$$\{1, 2, 3, \dots\} = N \subset Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Ak A je podmnožinou množiny B , ale nie vlastnou podmnožinou, potom ponechávame pôvodné označenie $A \subseteq B$.



Z definície inklúzie množín taktiež vyplýva:

- Pre každú množinu A platí: $A \subseteq A$.
Dôvod: výrok v tvare implikácie $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A)$ je tautológia.
Túto vlastnosť nazývame **reflexívnosťou** inklúzie množín.

Z definície inklúzie množín platí, že $\emptyset \subseteq A$. Prázdna množina nemá prvky a podľa definície

$$\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

máme implikáciu, ktorá je tautológiou (pre ľubovoľné x máme buď „ $0 \Rightarrow 1$ “ alebo „ $0 \Rightarrow 0$ “, čo sú ako implikácie pravdivé výroky).

- Súčasne z reflexívnosti inklúzie vyplýva aj skutočnosť, že $\emptyset \subseteq \emptyset$.
- Pre každé tri množiny A, B, C platí:

$$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C).$$

Hovoríme, že inklúzia množín je **tranzitívna**.

Príklad

Množina $M = \{a, b, c\}$. Určte všetky jej podmnožiny.

Riešenie. Prázdna množina $\emptyset$ je podmnožinou každej množiny.

³ V niektorej literatúre aj **časťou** množiny B .

⁴ V niektorej literatúre sa používa pojem aj **pravá časť** množiny B .

Jednoprvkové podmnožiny sú $\{a\}, \{b\}, \{c\}$.

Dvojprvkové sú podmnožiny $\{a, b\}, \{a, c\}$ a $\{b, c\}$.

Na koniec je potrebné uvažovať aj o množine $M = \{a, b, c\}$, lebo každá množina je podmnožinou samej seba.

Ak označíme $\mathcal{P}(M)$ množinu všetkých podmnožín množiny M , potom podmnožín je 8 a platí:

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Vo všeobecnosti, ak uvažujeme n –prvkovú množinu M a máme určiť počet jej podmnožín, potom dostaneme:

- jednu prázdnu podmnožinu, čo zapíšeme kombinačným⁵ číslom $\binom{n}{0}$,
- n jednoprvkových podmnožín, ktorých počet vyjadríme kombinačným číslom $\binom{n}{1}$.
- Počet 2 –prvkových podmnožín určuje kombinačné číslo $\binom{n}{2}$,
- $\vdots$
- počet k –prvkových podmnožín určuje kombinačné číslo $\binom{n}{k}$,
- $\vdots$
- počet n –prvkových podmnožín zase kombinačné číslo $\binom{n}{n} = 1$

Súčtom kombinačných čísel

$$\begin{aligned} & \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} = \\ & = \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 1^1 + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots + \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot 1^n \end{aligned}$$

a pomocou binomickej vety⁶ odvodíme, že celkový počet podmnožín n – prvkovej (konečnej) množiny je vyjadrený vzťahom

$$(1 + 1)^n = 2^n$$

Množinu všetkých podmnožín danej konečnej n –prvkovej množiny M nazývame **potenčnou množinou** (množiny M) a zapisujeme ako $\mathcal{P}(M)$. Počet jej prvkov zapíšeme pomocou zátvoriek: $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Definícia (rovnosti množín)

Množina A sa **rovná** množine B práve vtedy, keď

$$A \subseteq B \text{ a súčasne } B \subseteq A.$$

Zapisujeme:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$$

Množiny považujeme za rovné, ak obsahujú tie isté prvky. Nie je však nutné, aby boli určené rovnakou základnou množinou, či charakteristickou vlastnosťou. Napr.:

$$A = \{x \in R; x^2 = 0\} = \{x \in Z; 3x = x\} = B = \{0\}.$$

Na ukážke sme sa o rovnosti množín presvedčili vymenovaním jej prvkov, t.j. prvku 0. Teda, ak sú prvky množín jasne vymedzené, resp. dobre rozlíšiteľné, dôležitá je inklúzia každého prvku jednej množiny

⁵ Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ určuje počet kombinácií k –tej triedy z n prvkov, kde $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Platí: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Tiež sa definuje, že $0! = 1! = 1$.

⁶ Binomická veta: $\binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n = (a + b)^n$

v druhej množine (a samozrejme naopak). Nie je podstatná forma jeho zápisu, ak ho vieme interpretovať, napr.:

$$A = \{2, 9, 1 + 5\} = \{2, \sqrt{81}, 6\} = B.$$

Ak sa množiny A, B odlišujú v aspoň jednom prvku, hovoríme, že sú **rôzne**. Z toho vyplýva, že množina obsahujúca nejaké prvky je rôzna od prázdnej množiny.

Rovnosť dvoch množín je reflexívna a tranzitívna vlastnosť. Navyše, pre ľubovoľné dve množiny platí:

$$\forall A, B: ((A = B) \Rightarrow (B = A)).$$

(Ak sa množina A rovná množine B , potom sa aj množina B rovná množine A). Hovoríme, že rovnosť množín je **symetrická** vlastnosť.

Definícia (zjednotenie množín)

Zjednotením dvoch množín A a B nazývame **množinu všetkých** prvkov, ktoré sú prvkami aspoň jednej z množín A a B .

Zjednotenie množín A, B zapisujeme $A \cup B$ a platí:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

Poznamenávame, že v definícii zjednotenia dvoch množín A, B sa uvádza „všetkých“ prvkov, t.j. v zjednotení nie je možné vynechať niektoré prvky jednej množiny:

- Ak $A = \{a, b, c\}, B = \{e, f, g\}$, potom $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.
- Ak $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, g\}$, potom $A \cup B = \{a, b, c, g\}$. Ani v tomto prípade sme prvky a, b z množiny B v zjednotení nevynechali. Rešpektovali sme zásadu, že pri určení množiny (vymenovaním prvkov) sa prvky uvádzajú (zapisujú) v zátvorkách len raz.

Navyše platí:

- Ak $A = \emptyset$ a B je ľubovoľná množina, potom $\emptyset \cup B = B$.
- Pre ľubovoľné množiny A, B platí:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Hovoríme, že pre zjednotenie množín platí **komutatívny zákon**,⁷ ktorý vyplýva z tautológie $(q \vee r) \Leftrightarrow (r \vee q)$.

- Ak $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$ sú množiny, potom ich zjednotenie je množina A všetkých prvkov, ktoré sú prvkami aspoň jednej z množín $A_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Zapisujeme:

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

- Pomocou pravidiel negovania výrokov vieme, čo znamená, ak $x \notin A \cup B$. Platí:

⁷ V relevantnej literatúre sa často uvádza, že zjednotenie je symetrická binárna **operácia**. Nie je to úplne korektné, pretože je problém s formálnou definíciou **binárnej operácie na množine**.

Binárnou operáciou na množine M sa rozumie zobrazenie, ktoré dvom prvkom množiny M priradí opäť prvok množiny M . V prípade zjednotenia (dvoch množín A, B ako operácie) je otázka, aká je množina M , z ktorej vyberáme prvky A, B ?

Bolo by potrebné v definícii namiesto pojmu **množiny M** uvádzať „**systém množín M** “. Inak by sme vo všeobecnosti predpokladali, že M je „množina všetkých množín“. Tá však neexistuje (paradoxy intuitívneho chápania množín). Analogická situácia je aj s prienikom, rozdielom, symetrickým rozdielom a karteziánskym súčinom množín.

Napriek uvedenému, v súlade s bežne dostupnou literatúrou, budeme občas používať pojem „**operácia**“ na množinách.

$$(x \notin A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \cup B)' \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)' \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$$

Definícia (priemik množín)

Priemikom dvoch množín A a B nazývame množinu všetkých prvkov, ktoré sú prvkami množiny A a súčasne aj množiny B .

Zjednotenie množín A, B zapisujeme $A \cap B$ a platí:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

Naviac platí:

- Ak priemik dvoch množín A, B je prázdna množina, hovoríme, že množiny A, B sú **disjunktné**. Ak $A = \emptyset$ a B je ľubovoľná množina, potom $\emptyset \cap B = \emptyset$. Prázdna množina a ľubovoľná množina B sú vždy disjunktné.
- Pre ľubovoľné množiny A, B platí:

$$A \cap B = B \cap A.$$

Pre priemik množín platí **komutatívny zákon**, ktorý vyplýva z tautológie $(q \wedge r) \Leftrightarrow (r \wedge q)$.

- Ak $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$ sú množiny, potom ich priemik je množina A všetkých prvkov, ktoré sú prvkami každej z množín A_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Zapisujeme:

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

- Pomocou pravidiel negovania výrokov odvodíme výsledok pre $x \notin A \cup B$. Platí:

$$(x \notin A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \cap B)' \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)' \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$$

Okrem komutatívneho zákona platí aj asociatívny a distributívny zákon.

Veta (asociatívny zákon). Pre ľubovoľné tri množiny A, B, C platí:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Dôkazy asociatívneho zákona pre prípady a), b) vyplývajú z príslušných tautológií.

Príklad

Overte platnosť asociatívneho zákona na množinách

$$A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e, f\} \text{ a } C = \{b, e, g\}.$$

Riešenie. Postupujeme tak, že najprv určíme čiastkový výsledok v zátvorke $A \cup B$ a následne prevedieme zjednotenie s množinou C .

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}, (A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

V druhom kroku zmeníme postup. Najprv vykonáme zjednotenie $B \cup C$ (zapísané v zátvorke) a následne čiastkový výsledok zjednotíme s množinou A .

$$B \cup C = \{b, c, d, e, f, g\}, A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

Porovnaním zistíme, že množiny sa **rovnajú**.

Pre priemiky množín je postup analogický

- $A \cap B = \{c\}, (A \cap B) \cap C = \emptyset$
- $B \cap C = \{e\}, A \cap (B \cap C) = \emptyset$

Veta (distributívny zákon). Pre ľubovoľné tri množiny A, B, C platí:

- a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dôkaz a) Začneme podľa definície prieniku a použijeme tautológie.

Pre ľubovoľný prvok $x \in A \cap (B \cup C)$ platí:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in (B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Dôkaz tvrdenia b) sa vykoná analogicky. ■

Príklad

Overte platnosť distributívneho zákona $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ na množinách $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ a $C = \{1, 2, 4, 5\}$.

Riešenie. Pre ľavú stranu rovnosti platí:

$$B \cap C = \{1, 4\}, \quad A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Pravá strana rovnosti:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Porovnaním oboch strán rovnosti zistíme, že množiny sa rovnajú.

Definícia (rozdiel množín)

Rozdielom dvoch množín A a B nazývame množinu všetkých prvkov, ktoré sú prvkami množiny A a súčasne nepatria do množiny B .

Rozdiel množín A, B zapisujeme $A - B$ a platí:

$$x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

Naviac platí:

- Ak A je ľubovoľná a neprázdna množina a $B = \emptyset$, potom $A - \emptyset = A$.
- Pre rozdiel množín vo všeobecnosti neplatí komutatívny zákon, t.j.:

$$A - B \neq B - A.$$
- Pomocou pravidiel negovania výrokov vieme, čo znamená, ak $x \notin A - B$. Platí:

$$(x \notin A - B) \Leftrightarrow (x \in A - B)' \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)' \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B)$$

Definícia (doplnok množiny)

Nech U je vopred určená základná množina. Ak množina $A \subseteq U$, potom doplnkom množiny A v množine U nazývame množinu $U - A$.

Doplnok množiny A v základnej množine U zapisujeme $\bar{A}$

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A)$$

Z definície vyplýva, že:

- pre každý prvok platí: $x \notin \bar{A} \Leftrightarrow x \in A$.
- Prázdna množina je podmnožinou každej množiny, a preto $\bar{\emptyset} = U$.
- Doplnok základnej množiny U je prázdna množina $\emptyset = \bar{U}$.
- Pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq U$ platí: $A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Príklad

Určte doplnok množiny A v množinách U, E, H ak

$$A = \{a, b, c\}, U = \{a, b, c, d, e, f, g\}, E = \{a, b, c\}, H = \{1, 2, 3\}.$$

Riešenie. Doplnok množiny A v množine U :

$$\overline{A_U} = U - A = \{d, e, f, g\}$$

Doplnok množiny A v množine E :

$$\overline{A_E} = E - A = \emptyset.$$

Nemá zmysel určovať doplnok množiny A v množine H , pretože množina A nie je podmnožinou H . Definícia vyžaduje, aby sme určovali doplnok množiny, ktorá je podmnožinou základnej množiny.

Doplnok množiny A sa určuje vzhľadom na základnú množinu U .

Definícia (symetrický rozdiel množín)

Symetrickým rozdielom dvoch množín A a B nazývame množinu prvkov zjednotenia

$$(A - B) \cup (B - A).$$

Symetrický rozdiel množín A, B zapisujeme $A \div B$ a platí:

$$x \in A \div B \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A))$$

Prvok x patrí do symetrického rozdielu dvoch množín vtedy a len vtedy, keď patrí práve do jednej z daných množín.

Naviac platí:

- Pre rozdiel množín vo všeobecnosti platí komutatívny zákon, t.j.:

$$A \div B = B \div A.$$

- Pomocou pravidiel negovania výrokov vieme, čo znamená, ak $x \notin A \div B$. Platí:

$$\begin{aligned} (x \notin A \div B) &\Leftrightarrow (x \in A \div B)' \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A))' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B)' \wedge (x \in B \wedge x \notin A)') \Leftrightarrow ((x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in A))' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B)) \vee ((x \notin A \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in A)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in \emptyset)) \vee ((x \in \emptyset) \vee (x \in B \wedge x \in A)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \in A) \Leftrightarrow ((x \notin A \cap B) \vee (x \in A \cap B)) \end{aligned}$$

Pre zjednotenie, prienik, rozdiel, symetrický rozdiel množín platia vety, napr.:

Veta. Pre ľubovoľné tri množiny A, B, C platí:

- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
- $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
- $(A \div B) \cap C = (A \cap C) \div (B \cap C)$
- $(A \div B) \cap C = (A \cap C) \div (B \cap C)$

Dôkaz e) Použijeme tzv. **incidenčnú tabuľku**. Ide o analógiu tabuliek pravdivostných hodnôt pri dokazovaní tautológií, ale s výnimkou: ak prvok x patrí do množiny A , zapíšeme do príslušného riadku znak „ $\in$ “; v opačnom prípade znak „ $\notin$ “.

Ďalej postupujeme podľa definícií, napr. v 2. riadku a v stĺpci $A \div B$ je znak $\notin$. Dôvod: Ak prvok $x \in A$, $x \in B$, nemôže byť splnená definícia symetrického rozdielu, t.j. $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$.

V stĺpci pre $(A \div B) \cap C$ je v 2. riadku tiež znak $\notin$, lebo prvok x nie je v $A \div B$ a nie je ani v C .

Obdobne uvažujeme pre ostatné riadky.

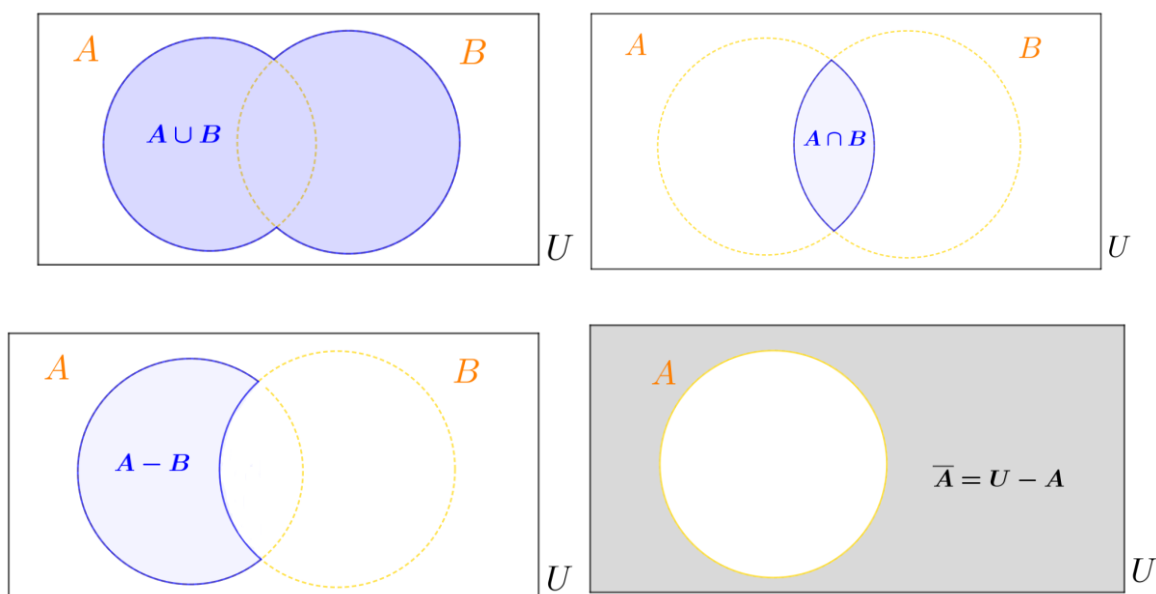
č.	Množiny			Ľavá strana rovnosti		Pravá strana rovnosti		
	A	B	C	$A \div B$	$(A \div B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \div (B \cap C)$
1.	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
2.	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
3.	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
4.	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
5.	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
6.	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
7.	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
8.	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

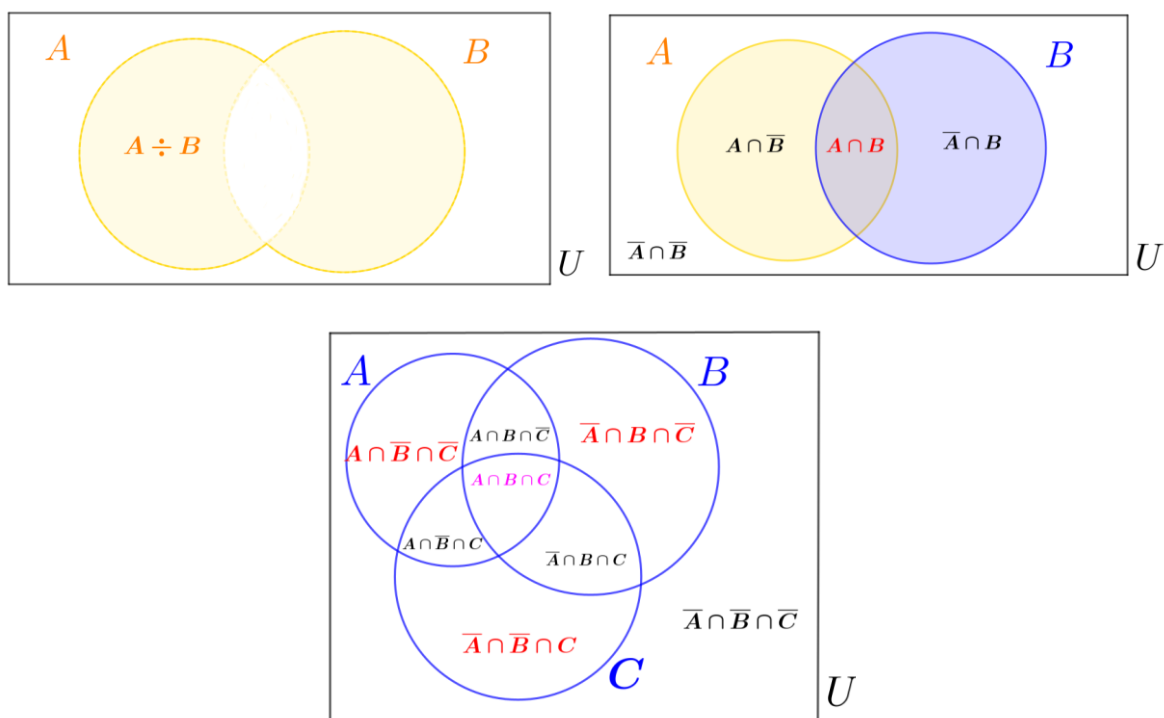
Vidíme, že v každom riadku pre stĺpce $(A \div B) \cap C$, $(A \cap C) \div (B \cap C)$ je zhoda v znakoch. Ide teda o rovnosť množín a veta je dokázaná. Analogicky sa dokazujú zvyšné vety. ■

2.6 Grafické znázorňovanie množinových operácií

Pomocou Vennových diagramov môžeme symbolicky znázorniť aj niektoré operácie na množinách, napr. ako vidno na obrázkoch.

Ak to nie je nutné, prvky jednotlivých množín nevyznačujeme. To však nevylučuje možnosť, že by niektorá z naznačených množín A, B mohla byť prázdna.





2.7 Rozklad neprázdnej množiny

Neprázdnu množinu prvkov možno rozložiť na tzv. triedy. Kľúčovými pojmami v definícii sú prienik a zjednotenie neprázdnych podmnožín.

Definícia (rozklad neprázdnej množiny)

Rozkladom neprázdnej množiny M nazývame neprázdny systém neprázdnych podmnožín množiny M , z ktorých

- každé dve sú navzájom disjunktné a súčasne
- zjednotenie všetkých podmnožín je množina M .

Neprázdne podmnožiny, z ktorých sa rozklad skladá, nazývame **triedami rozkladu**.

Z definície vyplýva, že každý prvok množiny M je:

- zaradený do nejakej triedy,
- nemôže sa súčasne nachádzať v dvoch rôznych triedach.

Príklady rozkladu neprázdnej množiny:

- v bežnom živote uvažujeme o základnej škole a jej žiakoch. Samotní žiaci školy predstavujú neprázdnu množinu M a neprázdny systém neprázdnych podmnožín je reprezentovaný klasickými školskými triedami. V tomto prípade sú školské triedy aj **triedami rozkladu** množiny M .

Overíme to jednoducho:

- Podmnožiny sú podľa definície neprázdne, lebo nemá zmysel evidovať školskú triedu bez nejakých žiakov.
- Navyše, každý žiak je zaradený len do jednej školskej triedy,
- zjednotením všetkých školských tried dostaneme množinu všetkých žiakov.

Poznamenávame, že jedna neprázdna množina M môže mať viacero (**rôznych**) rozkladov, napr.:

b) Množina M ako množina prirodzených čísel $N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, \dots\}$ môže byť rozložená na dve triedy (párne a nepárne čísla):

- $N_p = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$
- $N_n = \{1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots\}$

Evidentne platí: $N_p \neq \emptyset \neq N_n$, $N_p \cap N_n = \emptyset$ a súčasne $N_p \cup N_n = N$. Rozklad množiny N by sme zapísali ako systém tried $\mathcal{S} = \{N_p, N_n\}$.

c) Množina prirodzených čísel $N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, \dots\}$ môže byť rozložená na triedy:

- $N_1 = \{n \in N; n \text{ nie je prvočíslo}\}$
- $N_2 = \{n \in N; n \text{ je prvočíslo}\}$

Platí: $N_1 \neq \emptyset \neq N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ a súčasne $N_1 \cup N_2 = N$. Tento rozklad množiny N by sme zapísali ako systém tried $\mathcal{S}_p = \{N_1, N_2\}$.

Príklad

Uvažujme množinu $T = \{a, b, c, d\}$ a jej podmnožiny. Zistite, či ide o rozklady množiny T , ak:

- $T_1 = \{a, c\}, T_2 = \{b\}, T_3 = \{d\}$,
- $H_1 = \{a\}, H_2 = \{b\}, H_3 = \{c\}, H_4 = \{d\}$,
- $G_1 = \{a, b, c\}, G_2 = \{b\}, G_3 = \{d\}$.

Riešenie.

a) Ide o rozklad množiny T , pretože:

- $T \neq \emptyset$,
- $T_1 \neq \emptyset, T_2 \neq \emptyset, T_3 \neq \emptyset$
- $T_1 \cap T_2 = \emptyset, T_1 \cap T_3 = \emptyset, T_2 \cap T_3 = \emptyset$
Tým sme overili, že podmnožiny sú po dvoch (ľubovoľné dve) disjunktné.
- a súčasne $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T$

Zapíšeme rozklad ako $\mathcal{S}_1 = \{T_1, T_2, T_3\}$.

b) Platí:

- $T \neq \emptyset$,
- $H_1 \neq \emptyset, H_2 \neq \emptyset, H_3 \neq \emptyset, H_4 \neq \emptyset$
- $H_1 \cap H_2 = \emptyset, H_1 \cap H_3 = \emptyset, H_1 \cap H_4 = \emptyset, H_2 \cap H_3 = \emptyset, H_2 \cap H_4 = \emptyset, H_3 \cap H_4 = \emptyset$ (sú po dvojiciach navzájom disjunktné)
- a súčasne $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = T$ (ich zjednotenie je množina T).

Zapíšeme rozklad ako $\mathcal{S}_2 = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.

c) V tomto prípade nejde o rozklad množiny T , pretože $G_1 \cap G_2 = \{b\} \neq \emptyset$. Je porušená jedna z podmienok definície. Nejde o rozklad v zmysle definície.

Rozklad množiny možno zaviesť aj opačne, t.j. máme určené množiny, ktoré spĺňajú podmienky definície, napr.:

- množina Z_0 je množinou celých čísel, ktoré po delení číslom 3 majú zvyšok 0
 $Z_0 = \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$
- množina Z_1 je množinou celých čísel, ktoré po delení číslom 3 majú zvyšok 1
 $Z_1 = \{\dots, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$
- množina Z_2 je množinou celých čísel, ktoré po delení číslom 3 majú zvyšok 2
 $Z_2 = \{\dots, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$

Množiny Z_0, Z_1, Z_2 sú triedami rozkladu, pretože sú:

- neprázdné,
- po dvoch navzájom disjunktné,
- a zjednotením $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$ je celá množina Z .

Systém množín

$$\mathcal{S}_3 = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$$

je rozkladom množiny celých čísel Z (tiež neprázdnej).

2.8 Cvičenia

1. Daná je množina $A = \{a, b, c, d\}$. Vytvorte všetky podmnožiny s tromi prvkami.
2. Sú dané množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 4, 3\}$ a $D = \{1, 2\}$. Ktoré z uvedených vzťahov sú pravdivé, a ktoré nemajú zmysel?
 - a) B je podmnožina A ,
 - b) $B = C$
 - c) $C \subset B$
 - d) $D \in C$
3. Nakreslite Vennov diagram pre štyri množiny, kde A je množina majiteľov áut, množinu B je množina majiteľov chát, C je množina chovateľov psov a D je množina turistov.
V diagrame vyznačte:
 - a) prvok p – človeka, ktorý vlastní chatu a psa, ale nemá auto a nie je turistom,
 - b) prvok q – človeka, ktorý je turistom a má chatu, ale nevlastní auto, a ani psa,
 - c) prvok r – človeka, ktorý má auto, aj chatu a psa, ale nie je turista.
4. Máme závažia hmotností $1g, 2g, 5g$ a $10g$. Určte, koľko rôznych hmotností s nimi môžete odvážiť, ak požívame rovnoramenné váhy.
5. Dané sú množiny $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Utvorte postupne: $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A \div C$, a $(A \div B) \cup (B \div C)$.
6. Základná množina je $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Utvorte doplnok množiny v množine E , ak:
 - a) $A = \{2, 4, 8\}$,
 - b) $B = \{10, 12, 20, 8\}$,
 - c) $A - B$, kde A, B sú množiny zo zadania a), b)
 - d) $A \cup B$, kde A, B sú množiny zo zadania a), b)
 - e) $\emptyset$ prázdnej množiny.
7. V spoločnosti, kde každý ovláda aspoň jeden cudzí jazyk, 15 ľudí hovorí anglicky, 12 po nemecky a 7 obidvoma jazykmi. Koľko osôb je v spoločnosti, ak v spoločnosti nikto iný jazyk neovláda?
8. Množina $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12\}$. Zistite, či ide o rozklad množiny P , t.j. či platí $A \cup B \cup C = P$ a $A \cap B \cap C = \emptyset$, ak
 - a) podmnožina A je množina všetkých párnych čísel,
 - b) podmnožina B je množina všetkých nepárnych čísel,
 - c) podmnožina C je množina všetkých čísel deliteľných 6.

2.9 Odporúčaná literatúra

- Haupt, D. (1984). Algebra množín. In. **Množinový počet zrozumiteľne**. (pp. 38-71). Alfa Bratislava
- Zelinka, B. (1979). Teorie množin a matematická logika. In. **Matematika hrou i vážně**. (pp. 9-29). ÚV matematické olympiády, Škola mladých matematiků. Mladá fronta, Praha. Dostupné online (25. 9.2025): <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403944>
- Vrábel, P. (2018). Základy teórie množín. In. **Teória množín a teoretická aritmetika**. (pp. 17-30). FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 679, Nitra. ISBN: 978-80-558-1332-5
- Šedivý, J. (1969). Dlouhá cesta k pojmu množina. In. **O modernizaci školské matematiky**. (pp. 18-21). SPN Praha
- Bukovský, L. (1985). Nekonečno v matematice. In. **Množiny a všeličo okolo nich**. (pp. 13-16). Alfa Bratislava

3 Karteziánsky súčin množín

Karteziánsky súčin množín je jedným z kľúčových pojmov v teórii množín.

Definícia (usporiadaná dvojica prvkov)

Nech a, b sú dva prvky. **Systém** množín $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ (obsahujúci dve množiny – jednoprvkovú množinu $\{a\}$ a dvojprvkovú množinu $\{a, b\}$) nazývame **usporiadanou dvojicou prvkov a, b** .

Usporiadanú množinu zapisujeme zjednodušene $[a, b]$, pričom prvok a nazývame **prvou zložkou** usporiadanej dvojice; prvok b **druhou zložkou** usporiadanej dvojice⁸.

Treba si uvedomiť, že platí:

- na poradí zložiek záleží. Zápisy $[a, b]$ a $[b, a]$ v zmysle definície neurčujú rovnakú usporiadanú dvojicu, pretože:

$$[a, b] \equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$[b, a] \equiv \{\{b\}, \{a, b\}\}$$

Vidíme, že dva systémy množín $[a, b], [b, a]$ sa nerovnajú, pretože sa líšia v jednoprvkových množinách. Napr. pragmaticky, bod v euklidovskej rovine so súradnicami $[1, 3]$ je rôzny od bodu $[3, 1]$.

- Usporiadaná dvojica bola definovaná ako **systém** množín. Má to dôvod. V definícii usporiadanej dvojice prvkov nie je predpoklad, že $a \neq b$. Napr. v euklidovskej rovine existujú body ako $[1, 1]$, $[0, 0]$, $[-5, -5]$, ...
Ako to zapíšeme? Keďže systém množín (sám o sebe) nemusí byť množina, môžeme v prípade rovnosti zložiek $a = b$ formálne zapísať $[a, a] \equiv \{\{a\}, \{a, a\}\}$, resp. $\{\{a\}, \{a\}\}$.
- Z praktických dôvodov používame pre usporiadané dvojice prvkov len zápis v hranatých zátvorkách a platí:

$$[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$$

(usporiadané dvojice prvkov sa rovnajú vtedy a len vtedy, keď sa rovnajú ich odpovedajúce si zložky).

Definícia (karteziánsky súčin)

Nech A, B sú dve neprázdne množiny. Množinu usporiadaných dvojíc $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$ nazývame **karteziánskym súčinom množín A, B** .

Zapisujeme:

$$A \times B = \{[x, y]; x \in A, y \in B\}.$$

Poznamenávame, že:

- Ak A je konečná množina a má n prvkov, množina B je tiež konečná s počtom prvkov m , potom karteziánsky súčin má $n \cdot m$ prvkov, ktoré sú určené ako usporiadané dvojice.
- Pre karteziánsky súčin vo všeobecnosti **neplatí** komutatívny zákon, t.j. : $A \times B \neq B \times A$. Predpoklad neprázdnych množín A, B (uvedený v definícii) je nutný. Ak by sme akceptovali, že $A = \emptyset \wedge B \neq \emptyset$, potom $A \times B = \emptyset$ a tiež $B \times A = \emptyset$ (neexistujú usporiadané dvojice, ak je jedna z množín karteziánskeho súčinu prázdna).

⁸ V (analytickej) geometrii hovoríme o **súradniciach** bodu a pod.

- definícia umožňuje, aby sme uvažovali $A = B$. Vtedy hovoríme o **karteziánskom súčine na množine A** .

Ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad

Uvažujme množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. Určte karteziánsky súčin:

- $A \times B$,
- $B \times A$,
- $A \times A$
- $B \times B$

Riešenie. Vypíšeme všetky možnosti. Prvá zložka budú postupne prvky množiny A , kým druhá zložka „prebieha“ postupne prvky množiny B :

- $A \times B = \{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2], [c, 1], [c, 2]\}$,
- $B \times A = \{[1, a], [1, b], [1, c], [2, a], [2, b], [2, c]\}$,
- $A \times A = \{[a, a], [a, b], [a, c], [b, a], [b, b], [b, c], [c, a], [c, b], [c, c]\}$,
- $B \times B = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2]\}$.

Kvôli prehľadu (pri väčšom počte prvkov) je vhodné určiť usporiadané dvojice **tabuľkou**.

A/B	1	2
a	$[a, 1]$	$[a, 2]$
b	$[b, 1]$	$[b, 2]$
c	$[c, 1]$	$[c, 2]$

B/A	a	b	c
1	$[1, a]$	$[1, b]$	$[1, c]$
2	$[2, a]$	$[2, b]$	$[2, c]$

A/A	a	b	c
a	$[a, a]$	$[a, b]$	$[a, c]$
b	$[b, a]$	$[b, b]$	$[b, c]$
c	$[c, a]$	$[c, b]$	$[c, c]$

B/B	1	2
1	$[1, 1]$	$[1, 2]$
2	$[2, 1]$	$[2, 2]$

Niekedy je výhodné znázorniť karteziánsky súčin graficky.

Príklad

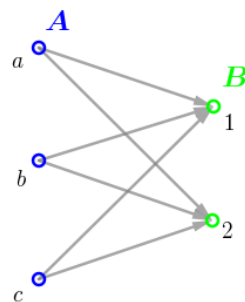
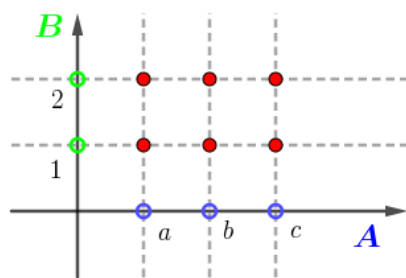
Znázornite graficky karteziánsky súčin $A \times B$, ak $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$.

Riešenie. Vymenovaním všetkých dvojíc dostaneme

$$A \times B = \{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2], [c, 1], [c, 2]\}.$$

- Karteziánsky súčin najjednoduchšie znázorníme tak, že usporiadané dvojice vyznačíme ako uzlové body **štvorcovej mriežky**.

Na horizontálu vynášame prvky množiny pre prvú zložku, na vertikálu zase prvky pre druhú zložku usporiadanej dvojice.



b) Druhý spôsob je pomocou **orientovaných šípok**, ktoré začínajú v prvku z množiny A a končia v prvku množiny B .

Veta. Zjednotenie, prienik, rozdiel a symetrický rozdiel množín je distributívny vzhľadom ku karteziánskemu súčinu množín, t.j. pre ľubovoľné tri množiny A, B, C platí:

- a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
- d) $(A \div B) \times C = (A \times C) \div (B \times C)$

Dôkaz pre tvrdenie **a)**. Postupujeme formálne. Na ľavej strane rovnosti je množina $(A \cup B) \times C$, ktorá je množinou usporiadaných dvojíc $[x, y]$ a platí: $x \in A \cup B, y \in C$. Rozpíšeme teda:

$$\begin{aligned}
 [x, y] \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B \wedge y \in C) \Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow ((x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow ([x, y] \in A \times C \vee [x, y] \in B \times C) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow [x, y] \in (A \times C) \cup (B \times C)
 \end{aligned}$$

Keďže ide o tautológie, rovnosť množín je dokázaná. Zvyšné tvrdenia sa dokazujú analogicky. ■

Príklad

Overte, či platí rovnosť množín $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$ pre množiny $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}, C = \{c\}$

Riešenie. Určíme množinu z ľavej strany rovnosti:

$$(A \times B) \cup C = \{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2]\} \cup \{c\} = \{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2], c\}$$

Výsledná množina pozostáva z usporiadaných dvojíc $[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2]$ a prvku c .

Teraz určíme množinu na pravej strane rovnosti. Platí:

$$\begin{aligned}
 A \cup C &= \{a, b, c\} \\
 B \cup C &= \{1, 2, c\}
 \end{aligned}$$

Zostavíme tabuľku a zapíšeme ako množinu

$A \cup C / B \cup C$	1	2	c
a	$[a, 1]$	$[a, 2]$	$[a, c]$
b	$[b, 1]$	$[b, 2]$	$[b, c]$
c	$[c, 1]$	$[c, 2]$	$[c, c]$

$$(A \cup C) \times (B \cup C) = \{[a, 1], [a, 2], [a, c], [b, 1], [b, 2], [b, c], [c, 1], [c, 2], [c, c]\}$$

Vidíme, že rovnosť **neplatí** – na pravej strane rovnosti je množina, ktorej prvky sú len usporiadané dvojice, kým množina na ľavej strane obsahuje aj samostatný prvok $c \in C$.

Na základe konkrétneho príkladu môžeme tvrdiť, že vyššie uvedenú vetu nemožno obrátiť. Teda, karteziánsky súčin nie je distributívny vzhľadom na zjednotenie. Analogicky to platí pre zvyšné tvrdenia.

3.1 Cvičenia

1. Utvorte karteziánsky súčin $A \times B$, ak $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$.
2. Sú dané množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{x, y\}$. Ukážte, že $A \times B \neq B \times A$.
3. Utvorte karteziánsky súčin $A \times B \times C$, ak $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 4, 5\}$, $C = \{\triangle, \blacksquare\}$.
4. Hádzeme 2 hracími kockami, modrou a červenou. Aké sú všetky možnosti, ktoré môžu padnúť?
5. Graficky znázorníte karteziánsky súčin $M \times M$, ak $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3.2 Odporúčaná literatúra

Haupt, D. (1984). Karteziánsky súčin. In. **Množinový počet zrozumiteľne**. (pp. 69-72). Alfa Bratislava

Jelínek, M. (1977). Relácia a karteziánsky súčin dvoch množín. In. **Relácie a funkcie**. (pp. 35-39), ed. Nové smery v školskej matematike, SPN Bratislava

4 Relácie

Relácia je nový a dôležitý pojem v teórii množín. Definuje sa pomocou karteziánskeho súčinu a to nasledovne:

Definícia (relácia)

Každú podmnožinu D karteziánskeho súčinu množín $A \times B$ nazývame **reláciou** medzi prvkami množín A, B .

Zapisujeme štandardne ako podmnožinu:

$$D \subseteq A \times B = \{[x, y]; x \in A, y \in B\}.$$

Z definície vyplýva, že:

- relácia je množinou, ktorej prvky sú usporiadané dvojice,
- relácia ako podmnožina môže alebo nemusí byť vlastnou podmnožinou.
- Pre ľubovoľný karteziánsky súčin platí

$$\emptyset \subset A \times B \text{ a } A \times B \subseteq A \times B.$$

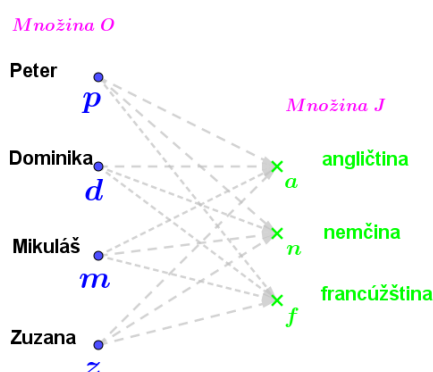
To znamená, že (podľa definície) prázdna množina a karteziánsky súčin sú relácie medzi prvkami množín A, B . Hovoríme im **triviálne** relácie.

Určenie podmnožiny (daného karteziánskeho súčinu) je závislé na tom, aké kritéria si zvolíme, resp. sú vopred definované. Napr. na konferencii je skupina osôb, ktorá hovorí rôznymi svetovými jazykmi - podľa tabuľky

osoba / jazyk	angličtina	nemčina	francúzština
Peter	*	*	
Dominika	*		
Mikuláš		*	
Zuzana	*		*

Ak pomocou prvých písmen označíme množinu osôb $O = \{p, d, m, z\}$, množinu jazykov $J = \{a, n, f\}$, potom karteziánsky súčin $O \times J$ sú dvojice:

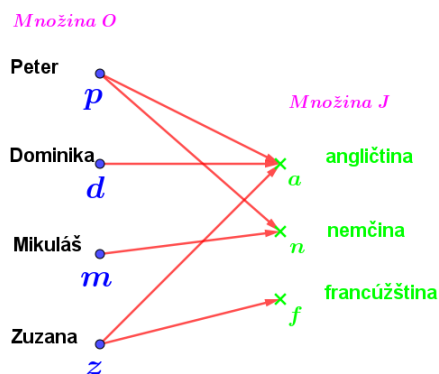
O/J	a	n	f
p	$[p, a]$	$[p, n]$	$[p, f]$
d	$[d, a]$	$[d, n]$	$[d, f]$
m	$[m, a]$	$[m, n]$	$[m, f]$
z	$[z, a]$	$[z, n]$	$[z, f]$



Ak z karteziánskeho súčinu $O \times J$ vyberieme podmnožinu

$$D = \{[p, a], [d, a], [z, a], [p, n], [m, n], [z, f]\},$$

potom máme **reláciu**, ktorú by sme mohli nazvať „osoba ovláda cudzí jazyk“. Graficky znázornené:



Príklad

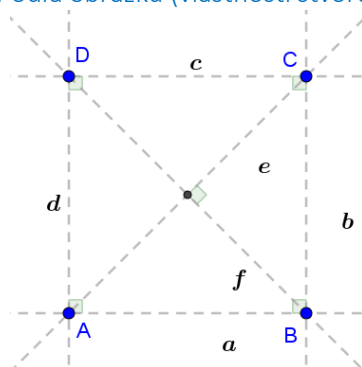
Vrcholmi štvorca $ABCD$ sú určené priamky $a \equiv AB, b \equiv BC, c \equiv CD, d \equiv DA, e \equiv AC, f \equiv BD$. Určte karteziánsky súčin $P \times P$ na množine $P = \{a, b, c, d, e, f\}$. Vymenovaním prvkov a graficky určte reláciu:

- K danú geometrickým vzťahom „byť kolmý“,
- F danú geometrickým vzťahom „byť rovnobežný“.

Riešenie. Množinu $P \times P$ určíme tabuľkou

P/p	a	b	c	d	e	f
a	$[a, a]$	$[a, b]$	$[a, c]$	$[a, d]$	$[a, e]$	$[a, f]$
b	$[b, a]$	$[b, b]$	$[b, c]$	$[b, d]$	$[b, e]$	$[b, f]$
c	$[c, a]$	$[c, b]$	$[c, c]$	$[c, d]$	$[c, e]$	$[c, f]$
d	$[d, a]$	$[d, b]$	$[d, c]$	$[d, d]$	$[d, e]$	$[d, f]$
e	$[e, a]$	$[e, b]$	$[e, c]$	$[e, d]$	$[e, e]$	$[e, f]$
f	$[f, a]$	$[f, b]$	$[f, c]$	$[f, d]$	$[f, e]$	$[f, f]$

Podľa obrázku (vlastnosti štvorca) určíme vzťahy medzi priamkami.



Relácia K je podmnožina takých dvojíc priamok, ktoré sú na seba kolmé:

$$K = \{[a, b], [b, c], [c, d], [d, a], [e, f], [b, a], [c, b], [d, c], [a, d], [f, e]\}$$

Dvojice sme vyberali podľa vzťahu „byť kolmý“.

Napr. $[a, b] \in K$ pretože $a \perp b$, a tiež sme vybrali dvojicu $[b, a]$, lebo aj $b \perp a$ a podobne ostatné.

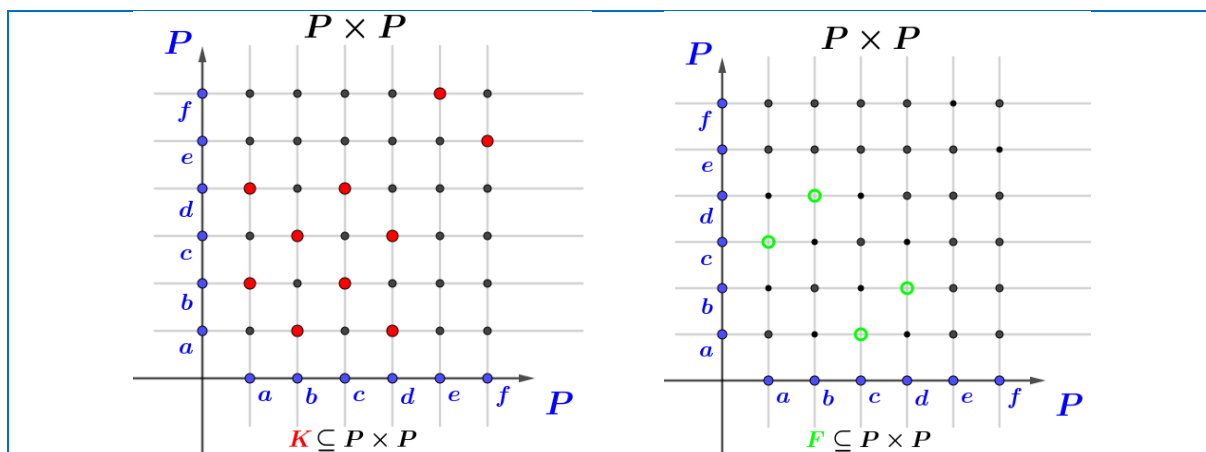
Dvojica $[a, c] \notin K$, lebo priamky a, c sú rovnobežné. ... a tiež sme nevybrali dvojicu $[b, b]$, lebo priamka nemôže byť kolmá sama na seba, atď.

Relácia F určená vzťahom „byť rovnobežný“ je :

$$F = \{[a, c], [c, a], [b, d], [d, b]\}$$

Dvojica $[a, a]$ do relácie F nepatrí. Priamky a a a nie sú rovnobežné (samy so sebou), sú totožné.

Graficky (červenou a zelenou farbou) sme zvýraznili uzlové body ako dvojice, ktorá patria do relácie:



Reláciu vieme určiť aj pomocou definície, napr. definujeme reláciu na množine:

Definícia (relácia „delí“)

Nech je daný karteziánsky súčin $M \times M$ na neprázdnej množine M .

Hovoríme, že relácia $D \subseteq M \times M$ s názvom „delí“ je definovaná na množine M , ak pre ľubovoľné prvky x, y z množiny M platí:

prvok x „delí“ prvok y z množiny M , ak existuje taký prvok k z množiny M , že: $y = k \cdot x$

Reláciu „delí“ zapisujeme pomocou znaku „ $|$ “ nasledovne:

$$\forall x, y \in M, \exists k \in M: x|y \Leftrightarrow k \cdot x = y$$

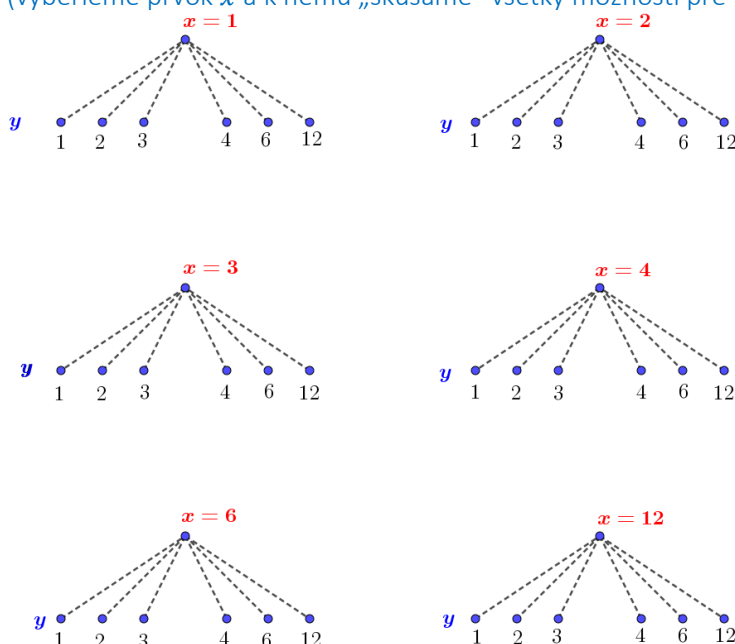
Príklad

Nech je daná množina $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Určte reláciu D „delí“ na karteziánskom súčine $M \times M$.

- vymenovaním prvkov,
- graficky.

Riešenie. a) Najprv si ujasníme, ktoré prvky sú v relácii „delí“.

V definícii relácie „delí“ sa uvádza, že musíme preveriť ľubovoľné prvky x, y z množiny M . Prehľadne to ukazuje schéma (vyberieme prvok x a k nemu „skúšame“ všetky možnosti pre výber prvku y):



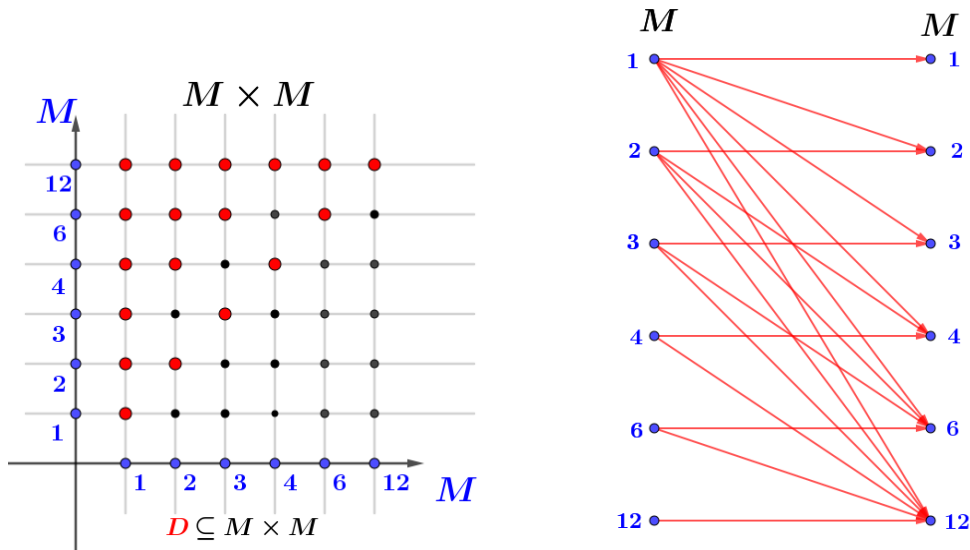
Napr.

- Ak položíme $x = 1$, $y = 1$, pýtame sa, či existuje také číslo k z množiny M , aby platilo
$$y = k \cdot x \Leftrightarrow 1 = k \cdot 1$$
Riešením rovnice je číslo $k = 1$, čo je prvok z množiny M . Povieme, že „1 delí 1“ a zapíšeme $1|1$.
- Ak položíme $x = 1$, $y = 2$, pýtame sa, či existuje také číslo k z množiny M , aby platilo
$$y = k \cdot x \Leftrightarrow 2 = k \cdot 1$$
Riešením je $k = 2$, čo je opäť prvok z množiny M . Povieme, že „1 delí 2“ a zapíšeme $1|2$.
...
Takto postupujeme pre ďalšie prvky $y = 3, 4, 6, 12$ a zistíme, že platí: $1|3, 1|4, 1|6, 1|12$.
Čiastkový záver: Číslo 1 delí každý prvok množiny M a v relácii budú dvojice: $[1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 6], [1, 12]$.
- Ak položíme $x = 2$, $y = 1$, pýtame sa, či existuje také číslo k z množiny M , aby platilo
$$y = k \cdot x \Leftrightarrow 1 = k \cdot 2$$
Riešením rovnice je číslo $k = 1/2$, čo **nie je** prvok z množiny M . Povieme, že „2 **nedelí** 1“.
- Ak položíme $x = 2$, $y = 2$, pýtame sa, či existuje také číslo k z množiny M , aby platilo
$$y = k \cdot x \Leftrightarrow 2 = k \cdot 2$$
Riešením je $k = 1$, čo je opäť prvok z množiny M . Povieme, že „2 delí 2“ a zapíšeme $2|2$.
...
Takto postupujeme pre ďalšie prvky $y = 3, 4, 6, 12$ a zistíme, že platí: $2|4, 2|6, 2|12$.
Čiastkový záver: Číslo 2 delí prvky 2, 4, 6, 12 z množiny M a v relácii budú dvojice: $[2, 2], [2, 4], [2, 6], [2, 12]$.
- Ak položíme $x = 3$, $y = 1$, pýtame sa, či existuje také číslo k z množiny M , aby platilo
$$y = k \cdot x \Leftrightarrow 1 = k \cdot 3$$
Riešením rovnice je číslo $k = 1/3$, čo **nie je** prvok z množiny M . Povieme, že „3 **nedelí** 1“.
- Ak položíme $x = 3$, $y = 2$, pýtame sa, či existuje také číslo k z množiny M , aby platilo
$$y = k \cdot x \Leftrightarrow 2 = k \cdot 3$$
Riešením je $k = 2/3$, čo **nie je** prvok z množiny M . Povieme, že „3 **nedelí** 2“.
...
Takto postupujeme pre ďalšie prvky $y = 3, 4, 6, 12$ a zistíme, že platí: $3|6, 3|12$.
Čiastkový záver: Číslo 3 delí prvky 3, 6, 12 z množiny M a v relácii budú dvojice: $[3, 3], [3, 6], [3, 12]$.
- Ak položíme $x = 4$, a postupne preveríme všetky $y \in M$. Zistíme, že $4|4, 4|12$.
Čiastkový záver: Číslo 4 delí prvky 4, 12 z množiny M a v relácii budú dvojice: $[4, 4], [4, 12]$.
- Ak položíme $x = 6$, a postupne preveríme všetky $y \in M$. Zistíme, že $6|6, 6|12$.
Čiastkový záver: Číslo 6 delí prvky 6, 12 z množiny M a v relácii budú dvojice: $[6, 6], [6, 12]$.
- Nakoniec, položíme $x = 12$, a postupne preveríme všetky $y \in M$. Zistíme, že $12|12$.
Čiastkový záver: Číslo 12 delí iba 12 z množiny M a v relácii bude dvojica: $[12, 12]$.

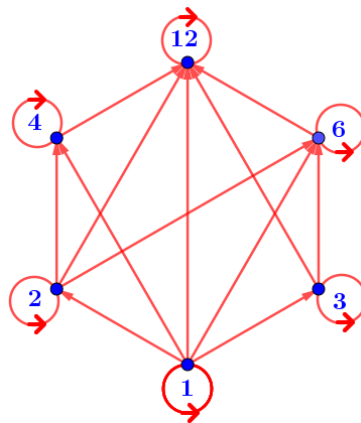
Relácia „delí“ na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ako podmnožina karteziánskeho súčinu $M \times M$ je:

$$D = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 6], [1, 12], [2, 2], [2, 4], [2, 6], [2, 12], [3, 3], [3, 6], [3, 12], [4, 4], [4, 12], [6, 6], [6, 12], [12, 12]\}$$

b) Graficky reláciu znázorníme vyznačením príslušných uzlových bodov alebo pomocou orientovaného grafu a šípok (vyznačujeme len tie šípky, ktoré dvojice sú v relácii):



V prípadoch, že ide o reláciu na (jednej) množine, **býva zvykom** prvky na ľavej a pravej strane stotožniť. Následne (kvôli názornosti) vhodne rozmiestnime prvky množiny M do roviny. Príslušné šípky ponecháme, ale prispôbíme ich tvar, napr. dvojicu $1 \rightarrow 1$ zakreslíme ako slučku a pod.:



4.1 Relácia na množine

Vyššie uvedený príklad je ukážka **relácie na množine**.

Pripomíname, že relácia na množine M je podmnožinou kartezianskeho súčinu $M \times M$, t.j. súčinu, v ktorom nie sú zastúpené dve rôzne množiny (napr. $A \times B$). To znamená, že „uvažujeme“ o vzťahu (relácii) dvoch prvkov z jednej množiny M a taká relácia môže mať rôzne vlastnosti.

Definujeme ich nasledovne:

Definícia (vlastnosti relácie na množine)

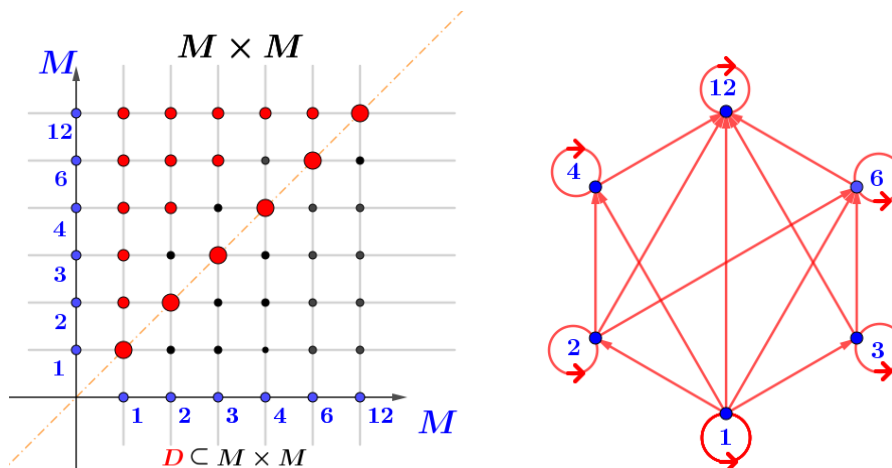
Nech je daný kartezianský súčin $M \times M$ na neprázdnej množine M .

a) Hovoríme, že relácia $D \subseteq M \times M$ na množine M , je **reflexívna**,

ak pre ľubovoľný prvok x z množiny M platí: $[x, x] \in D$.

Uvedieme ilustračné príklady a kontrapríklady.

- Reflexívna je napr. relácia „delí“, pretože pre každý prvok z množiny $M = \{1,2,3,4,6,12\}$ platí, že dvojice $v[1,1], [2,2], [3,3], [4,4], [6,6], [12,12]$ patria do podmnožiny D . Na grafickom znázornení hneď vidno, kedy je relácia na množine **reflexívna** – sú vyznačené **prvky na uhlopriečke** (ľavý dolný roh – pravý horný roh) alebo každý prvok z množiny má **slučku**.



- Relácia K „byť kolmý“ na množine priamok $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ **nie je reflexívna**. Množina K neobsahuje prvky v tvare $[x, x]$ pre ľubovoľné $x \in P$ (Naviac, z geometrického pohľadu - priamka nemôže byť kolmá sama na seba.).

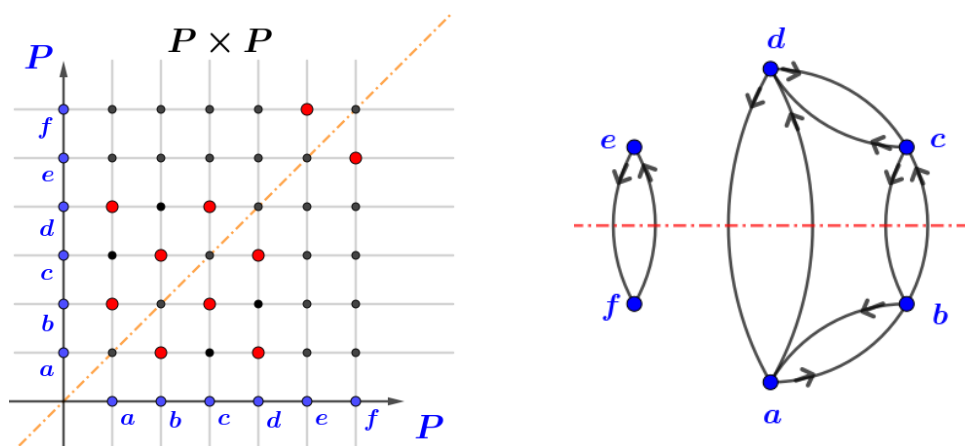
b) Hovoríme, že relácia $D \subseteq M \times M$ na množine M , je **symetrická**,

ak pre ľubovoľné prvky x, y z množiny M platí implikácia: $[x, y] \in D \Rightarrow [y, x] \in D$.

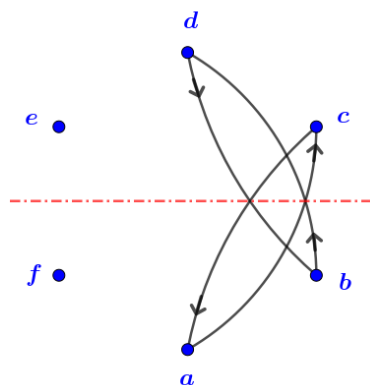
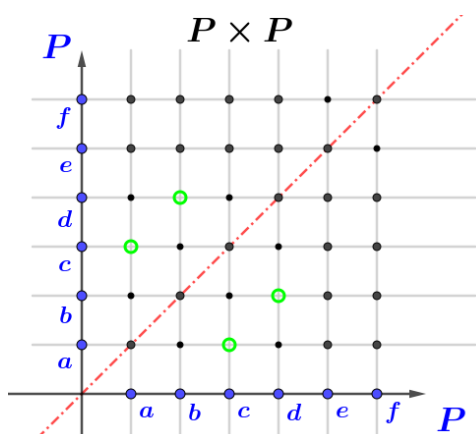
- Symetrická je napr. relácia „byť kolmý“ na množine priamok $P = \{a, b, c, d, e, f\}$, pretože s každou usporiadanou dvojicou $[x, y]$, ktorá sa nachádza v podmnožine K , nájdeme v tejto podmnožine K aj usporiadanú dvojicu $[y, x]$.

Na uzlovom grafickom znázornení vidíme, že v relácii vyznačené **prvky sú symetricky rozložené okolo uhlopriečky** (prvky uhlopriečky môžu, ale nemusia byť v relácii).

Ak by sme zostrojili alternatívny orientovaný graf relácie K pomocou šípok (na obrázku vpravo), smerovali by šípky medzi prvkami dvojcestne (tam – späť). Naviac, „celý orientovaný graf“ má „os súmernosti“.



- Symetrická je aj relácia F „byť rovnobežný“ na množine priamok $P = \{a, b, c, d, e, f\}$.



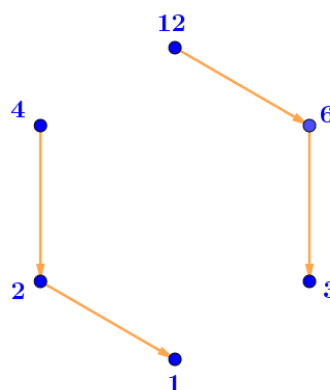
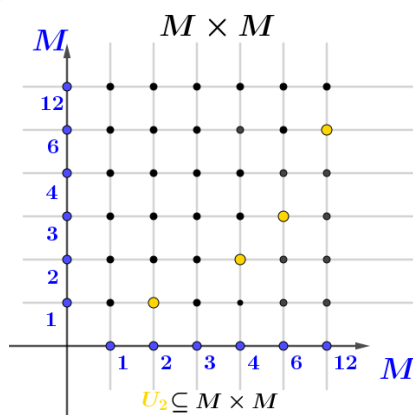
- Relácia D „delí“ na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ **nie je symetrická**. Ak vezmeme (na ukážku) dvojicu $[2, 4]$, ktorá je v podmnožine D , potom dvojicu $[4, 2]$ v podmnožine D nenájdeme. Jeden „exemplárny prípad“ stačí k tomu, aby sme povedali, že relácia nie je symetrická (netreba preverovať všetky možnosti).

c) Hovoríme, že relácia $D \subseteq M \times M$ na množine M , je **asymetrická**,

ak pre ľubovoľné prvky x, y z množiny M platí implikácia: $[x, y] \in D \Rightarrow [y, x] \notin D$.

- Relácia D „delí“ na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ **nie je asymetrická**. Ak vezmeme (na ukážku) dvojicu $x = 2$, a $y = 2$, t.j. usporiadanú dvojicu $[x, y] = [2, 2]$, ktorá je v podmnožine D , potom dvojicu $[y, x] = [2, 2]$ sa taktiež nachádza v podmnožine D . Definícia požaduje vybrať ľubovoľné prvky x, y z množiny M , „nezakazuje“ možnosť vybrať jeden prvok z množiny „opakované“. Opäť, jeden „exemplárny prípad“ stačí k tomu, aby sme povedali, že relácia nie je asymetrická (a netreba preverovať všetky možnosti).
- Príklad relácie „delí“ na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ zároveň ukážkou, že existujú relácie na množine, ktoré nie sú symetrické a nie sú ani asymetrické.
- Uvažujme množinu $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ a definujme reláciu U_2 na množine M s názvom „dvojnásobok“ tak, že „prvok x je dvojnásobok y “. Relácia U_2 má prvky $U_2 = \{[2, 1], [4, 2], [6, 3], [12, 6]\}$.

Graficky



Relácia „dvojnásobok“ je **asymetrická** - dôvod: ak vyberieme ľubovoľnú usporiadanú dvojicu z množiny U_2 , v množine U_2 nenájdeme takú usporiadanú dvojicu, ktorá by oproti pôvodnej mala „vymenené poradie zložiek“, napr. zvolíme si $[2,1] \in U_2$, ale usporiadaná dvojica $[1,2]$ sa v množine U_2 nenachádza. Obdobne je to s ostatnými dvojicami z množiny U_2 .

d) Hovoríme, že relácia $D \subseteq M \times M$ na množine M , je **antisymetrická**,

ak pre ľubovoľné prvky x, y z množiny M platí implikácia:

$$([x, y] \in D \wedge [y, x] \in D) \Rightarrow (x = y)$$

- Relácia D „delí“ na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ je **antisymetrická**.
- Na uzlových grafoch vidíme, kedy je relácia symetrická alebo antisymetrická. Ak ignorujeme slučky na vrchoch grafu a zameriame sa len na šípky. Ak sú medzi vrcholmi dve šípky, ide zrejme o symetrickú reláciu. Ak je medzi vrcholmi len jedna šípka, zrejme je relácia antisymetrická.

Zaujímavý je vzťah medzi asymetrickou a antisymetrickou reláciou. Sformulujeme ako vetu.

Veta. Každá asymetrická relácia je aj antisymetrická.

Dôkaz. Vyplýva to zo skutočnosti:

Ak je relácia asymetrická, nemôže byť splnený predpoklad z definície antisymetrickej relácie, t.j. $[x, y] \in D \wedge [y, x] \in D$. Predpoklad má pravdivostnú hodnotu 0.

Implikácia $([x, y] \in D \wedge [y, x] \in D) \Rightarrow (x = y)$

ako (výrok) je implikáciou v tvare „ $0 \Rightarrow 1$ “ alebo „ $0 \Rightarrow 0$ “ a teda pravdivým zloženým výrokom. ■

Poznamenávame, že obrátené tvrdenie (každá antisymetrická relácia je aj asymetrická), neplatí. Príkladom je práve relácia „delí“ na množine M .

e) Hovoríme, že relácia $D \subseteq M \times M$ na množine M , je **tranzitívna**,

ak pre ľubovoľné prvky x, y, z z množiny M platí implikácia:

$$([x, y] \in D \wedge [y, z] \in D) \Rightarrow ([x, z] \in D)$$

- Relácia D „delí“ na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ je **tranzitívna**.
- Relácia K s názvom „byť kolmý“ na množine priamok (štvorca) $P = \{a, b, c, d, e, f\}$, ktorá má ako prvky usporiadané dvojice

$$K = \{[a, b], [b, c], [c, d], [d, a], [e, f], [b, a], [c, b], [d, c], [a, d], [f, e]\},$$

nie je tranzitívna. Všimnime si napr. prvky a, b, c .

V relácii je dvojica $[a, b]$, aj dvojica $[b, c]$, ale dvojica $[a, c]$ sa v množine K nenachádza (ani nemôže; priamky a, c sú rovnobežky). Opäť jeden exemplárny prípad postačí k tomu, že daná relácia nie je tranzitívna.

f) Hovoríme, že relácia $D \subseteq M \times M$ na množine M , je **trichotomická**,

ak pre ľubovoľné prvky x, y z množiny M platí implikácia:

$$(x \neq y) \Rightarrow ([x, y] \in D \vee [y, x] \in D)$$

- Trichotomická relácia je taká, že na jej grafe je medzi ľubovoľnými dvoma navzájom rôznymi prvkami množiny M aspoň jedna šípka. Vidíme, napr. že relácia „byť kolmý“ na množine priamok štvorca **nie je trichotomická**, pretože priamky a, e nie sú v relácii (nie sú na seba kolmé).

Príklad

Uvažujme množinu $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ všetkých prirodzených čísel. Definujeme na nej reláciu V s názvom „**byť ostro menší**“ takto:

Hovoríme, že prvok „ x je ostro menší ako prvok y “, ak existuje také prirodzené číslo n_0 , že platí:

$$y = x + n_0$$

Zistite vlastnosti relácie (reflexívna, symetrická, asymetrická, antisymetrická, tranzitívna, trichotomická).

Riešenie. Ak uvažujeme karteziánsky súčin $N \times N$, potom máme všetky usporiadané dvojice, kde prvá a aj druhá zložka je prirodzené číslo:

$$\begin{aligned} N \times N = \{ & [1,1], [1,2], [1,3], \dots, [1,n], \dots, \\ & [2,1], [2,2], [2,3], \dots, [2,n], \dots, \\ & [3,1], [3,2], [3,3], \dots, [3,n], \dots, \\ & \vdots \\ & [n,1], [n,2], [n,3], \dots, [n,n], [n,n+1], \dots, \\ & \vdots \end{aligned}$$

Podmnožinou V , t.j. relácia $V \subset N \times N$ je množina usporiadaných dvojíc, kde prvá zložka je menšia ako druhá zložka:

$$\begin{aligned} V = \{ & [1,2], [1,3], \dots, [1,n], \dots, \\ & [2,3], \dots, [2,n], \dots, \\ & [3,4], [3,5], \dots, [3,n], \\ & \vdots \\ & [n,n+1], \dots, \\ & \vdots \end{aligned}$$

Dôvod: množina V obsahuje napr. dvojicu $[1,2]$, pretože existuje číslo $n_0 = 1 \in N$ také, že platí:

$$1 + 1 = 2$$

Obdobne, napr. dvojica $[3,5] \in V$, pretože existuje $n_0 = 2 \in N$: $3 + 2 = 5$, ... atď.

Relácia V má vlastnosti:

a) **nie je reflexívna.**

Dôvod: neobsahuje usporiadané dvojice $[n,n], n \in N$. Napr.: usporiadaná dvojica $[1,1]$ nepatrí do relácie V , pretože $1 + 0 = 1$ a číslo $0 \notin N$. Analogicky ostatné usporiadané dvojice.

b) Relácia **nie je symetrická**. Napr. dvojica $[1,2] \in V$, ale $[2,1] \notin V$ („exemplárny prípad“).

c) Relácia **je asymetrická**. Platí implikácia: $\forall n, m \in N: [n,m] \in V \Rightarrow [m,n] \notin V$

d) Relácia **je antisymetrická**. Dôvod: každá asymetrická relácia je aj antisymetrická.

e) Relácia **je tranzitívna.**

Uvažujme tri ľubovoľné prirodzené čísla p, q, r také, že $p < q < r$. To znamená, že v relácii sú usporiadané dvojice $[p,q], [p,r], [q,r]$.

Z toho, že $[p,q] \in V$ vyplýva: $\exists n_1 \in N: p + n_1 = q$.

Analogicky, ak $[q,r] \in V$ vyplýva: $\exists n_2 \in N: q + n_2 = r$.

Počítame:

$$r = q + n_2 = p + n_1 + n_2 \Rightarrow r = p + n_3,$$

lebo súčtom dvoch prirodzených čísel n_1 a n_2 je opäť prirodzené číslo, ktoré sme označili ako n_3 . Rovnica

$$r = p + n_3$$

znamená, že (podľa definície) $[p,r] \in V$ a pre ľubovoľné $p, q, r \in N$ platí implikácia:

$$([p, q] \in V \wedge [q, r] \in V) \Rightarrow [p, r] \in V$$

f) Relácia je **trichotomická**.

Ak vezmeme dve rôzne prirodzené čísla, jedno z nich je väčšie než to druhé a príslušné usporiadaná dvojica bude v množine V .

V literatúre možno nájsť ešte ďalšie vlastnosti relácie na množine, napr. ireflexívna relácia alebo atranzitívna relácia. V definíciách týchto relácií nejde o negáciu pôvodnej definície.

- Relácia D na množine M je **ireflexívna**, ak pre žiadne $x \in M$ neplatí $[x, x] \in D$.
- Relácia D na množine M je **atranzitívna**, ak pre každé $x, y, z \in M$ platí implikácia

$$([x, y] \in D \wedge [x, y] \in D) \Rightarrow ([x, z] \notin D)$$

4.2 Relácia ekvivalencie

Zavedieme nový pojem – relácie ekvivalencie.

Definícia (relácia ekvivalencie)

Relácia $D \subseteq M \times M$ na množine M , ktorá je súčasne reflexívna, symetrická a tranzitívna

sa nazýva **reláciou ekvivalencie**.

Uvedme niekoľko príkladov relácie ekvivalencie.

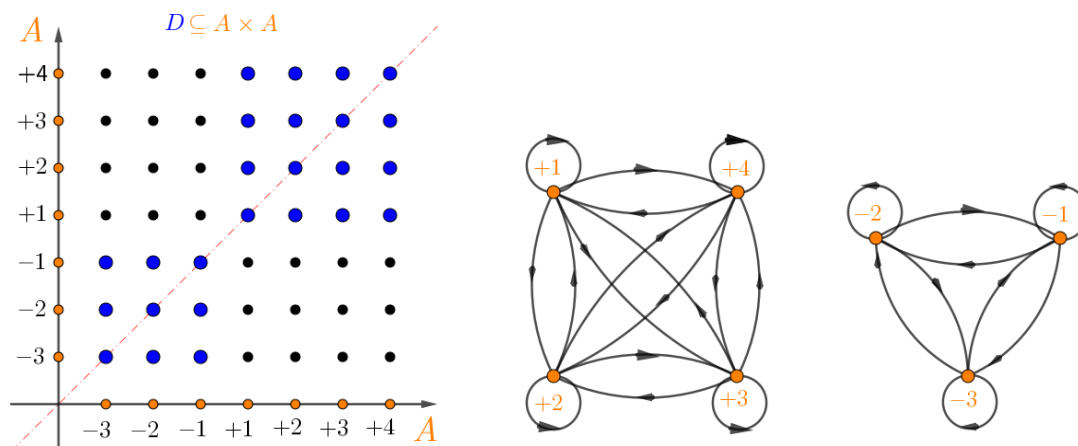
- Nech množina A predstavuje vrečko, v ktorom sú jednofarebné farebné guľôčky a to biele alebo čierne. Relácia D „byť rovnakej farby“ je reláciou **ekvivalencie na množine A** , pretože D je:
 - a) **reflexívna** – napr. biela guľôčka je biela; čierna guľôčka je zase len čierna,
 - b) **symetrická** – napr. ak guľôčka x má rovnakú farbu ako guľôčka y , potom aj guľôčka y má rovnakú farbu ako x ,
 - c) **tranzitívna** – ak guľôčky x, y majú rovnakú farbu a guľôčka y má rovnakú farbu ako guľôčka z , potom aj x, z sú rovnakej farby.
- Uvažujme množinu $A = \{-3, -2, -1, +1, +2, +3, +4\}$. Hovoríme, že dva prvky $a, b \in A$ sú v relácii D „*má rovnaké znamienko*“, ak sú oba prvky súčasne kladné alebo súčasne záporné, t.j.

$$(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0).$$

Karteziánsky súčin $A \times A$ určíme tabuľkou a v nej vyznačíme **modrou farbou** prvky v relácii D (nebudeme ich opätovne vypisovať).

A/A	-3	-2	-1	+1	+2	+3	+4
-3	$[-3, -3]$	$[-3, -2]$	$[-3, -1]$	$[-3, +1]$	$[-3, +2]$	$[-3, +3]$	$[-3, +4]$
-2	$[-2, -3]$	$[-2, -2]$	$[-2, -1]$	$[-2, +1]$	$[-2, +2]$	$[-2, +3]$	$[-2, +4]$
-1	$[-1, -3]$	$[-1, -2]$	$[-1, -1]$	$[-1, +1]$	$[-1, +2]$	$[-1, +3]$	$[-1, +4]$
+1	$[+1, -3]$	$[+1, -2]$	$[+1, -1]$	$[+1, +1]$	$[+1, +2]$	$[+1, +3]$	$[+1, +4]$
+2	$[+2, -3]$	$[+2, -2]$	$[+2, -1]$	$[+2, +1]$	$[+2, +2]$	$[+2, +3]$	$[+2, +4]$
+3	$[+3, -3]$	$[+3, -2]$	$[+3, -1]$	$[+3, +1]$	$[+3, +2]$	$[+3, +3]$	$[+3, +4]$
+4	$[+4, -3]$	$[+4, -2]$	$[+4, -1]$	$[+4, +1]$	$[+4, +2]$	$[+4, +3]$	$[+4, +4]$

Relácia D „má rovnaké znamienko“ (ako podmnožina $A \times A$) je názornejšia. Z uzlového grafu vidíme, že relácia je **reflexívna** a **symetrická**, z grafu orientovaných šípok zase, že je **tranzitívna**.



Relácia D „má rovnaké znamienko“ je **reláciou ekvivalencie**.

- Nech A je množina všetkých kladných zlomkov $\frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$.
Na karteziánskom súčine $A \times A$ definujeme reláciu D „rovnosť zlomkov“ takto:
Hovoríme, že dva zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ sa rovnajú, ak platí: $a \cdot d = b \cdot c$.

Zapisujeme:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}: \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Pre názornosť, prvky množiny A sú v tvare

$$A = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

Relácia „rovnosť kladných zlomkov“ je:

- a) **reflexívna**, pretože pre každý zlomok platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a \cdot b = b \cdot a$$

- b) **symetrická**.

Ak sa rovnajú zlomky $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, potom $a \cdot d = b \cdot c$.

Ak sa rovnajú zlomky $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, potom zase $c \cdot b = d \cdot a$.

Keďže $a \cdot d = d \cdot a$ a súčasne $b \cdot c = c \cdot b$, relácia rovnosť zlomkov je symetrická (jednoducho povedané, „ak sa rovná prvý zlomok druhému, rovná sa aj druhý prvému“.),

- c) **tranzitívna**. Opäť uvažujeme formálne:

Ak $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a súčasne $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, potom podľa definície platí:

$$a \cdot d = b \cdot c \wedge c \cdot f = d \cdot e \Rightarrow a = \frac{b \cdot c}{d} \wedge f = \frac{d \cdot e}{c}$$

Odtiaľ odvodíme:

$$a \cdot f = \frac{b \cdot c}{d} \cdot \frac{d \cdot e}{c} = b \cdot e \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

Relácia „rovnosť zlomkov“ na množine A je **reláciou ekvivalencie**.

Všimne si **zaujímavú vlastnosť relácie ekvivalencie na množine**. Na konkrétnych ukážkach uvedených vyššie je zrejmé, že:

- v prípade relácie „*má rovnakú farbu*“ sa nám guľôčky rozdelili na dve skupiny – biele a čierne;
- relácia „*má rovnaké znamienko*“ rozdelila prvky množiny $A = \{-3, -2, -1, +1, +2, +3, +4\}$ na dve disjunktné podmnožiny $A_1 = \{-3, -2, -1\}$ a $A_2 = \{+1, +2, +3, +4\}$;
- relácia „*rovnosť kladných zlomkov*“ rozdelila množinu A na podmnožiny

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \dots \right\} \\ A_{12} &= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots \right\} \\ A_{13} &= \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \dots \right\} \\ &\vdots \\ A_{1k} &= \left\{ \frac{1}{k}, \frac{2}{2k}, \frac{3}{3k}, \dots \right\} \\ &\vdots \\ A_{21} &= \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \dots \right\} \\ A_{22} &= \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots \right\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vo všetkých prípadoch ide o **rozklad množiny A na triedy rozkladu** (podmnožiny sú po dvojiciach navzájom disjunktné a zjednotením všetkých podmnožín je množina A).

Voľne povedané, klasifikovali (roztriedili) sme **prvky pôvodnej množiny A podľa relácie ekvivalencie** (podľa určitého, vopred definovaného vzťahu medzi dvomi prvkami z množiny A). Prvky v jednej triede rozkladu sú (podľa danej relácie ekvivalencie - rovnocenné).

Taktiež možno dokázať:

Ak máme daný rozklad množiny A na triedy, potom tento rozklad „indukuje“ reláciu ekvivalencie. Vtedy je relácia ekvivalencie množina usporiadaných dvojíc $[x, y] \in A \times A$, kde x, y sú z rovnakej triedy rozkladu.

Na grafickom znázornení vidíme, že sa triedy rozkladu zobrazujú ako **komponenty** (oddelené časti pôvodného grafu karteziánskeho súčinu $A \times A$). V prípade nekonečných množín býva nakreslenie vhodného grafu značne komplikované.

4.3 Cvičenie

- Nech množina $A = \{\text{Slovensko, Česko, Rakúsko, Poľsko, Nemecko, Maďarsko}\}$, množina $B = \{\text{Praha, Viedeň, Berlín, Bratislava, Hamburg, Rím, Varšava, Budapešť, Atény}\}$. Graficky znázornite reláciu $D \subseteq B \times A$ definovanú ako „*je hlavné mesto*“.
- Nech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$. Znázornite reláciu $D \subseteq A \times B$, ak $D = \{[1, 2], [2, 2], [3, 2]\}$.
- Na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ znázornite graficky reláciu D , ktorá je definovaná:

$$\forall x, y \in M: [x, y] \in D \Leftrightarrow y = x + 1.$$

- Na množine $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je definovaná relácia D nasledovne:

$$\forall x, y \in A: [x, y] \in D \Leftrightarrow \exists z \in A: x = y + z.$$

Určte doplnok $\bar{D}$ množiny D na základnej množine $A \times A$.

5. Na množine $P = \{2,3,5,7\}$ určte graficky a vymenovaním prvkov reláciu D , ktorá je definovaná:

$$\forall x, y \in M: [x, y] \in D \Leftrightarrow \exists z \in M: y = x + z$$

6. Na množine $M = \{1,2,3,4,6,12,24\}$ je definovaná relácia „delí“ zapisovaná znakom „|“ [t.j.

$$\forall a, b \in M: a | b \Leftrightarrow \exists c \in M: a \cdot c = b$$

- a) graficky znázornite reláciu,
b) určte typ relácie (reflexívna, symetrická, asymetrická, antisymetrická, tranzitívna, trichotomická, relácia ekvivalencie).
7. Nech M je množina všetkých obyvateľov mesta a relácia D je definovaná na množine $M \times M$ tak, že „obyvateľ x je v relácii D s obyvateľom y vtedy a len vtedy, keď majú rovnaký rok narodenia.“ Je relácia D reláciou ekvivalencie?

4.4 Odporúčaná literatúra

Vyšín, J., Kučerová, J. (1973). Relace. In. **Druhý výlet do moderní matematiky**. (pp. 7-19). ÚV matematické olympiády a ÚV SSM, Škola mladých matematiků. Mladá fronta, Praha. Dostupné online (25. 9.2025): <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403779>

Jelínek, M. (1974). Relace mezi dvěma množinami. In. **Relace a funkce 2**. (pp. 7-21). SPN Praha

Vrábel, P. (2018). Karteziánsky súčin množín, relácie a zobrazenie. In. **Teória množín a teoretická aritmetika**. (pp. 30-36). FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 679, Nitra. ISBN: 978-80-558-1332-5

Šedivý, J. (1969). Rovnosti (ekvivalence) na množine. In. **O modernizaci školské matematiky**. (pp. 158-162). SPN Praha

Kästner, H., Gothner, P., Horák, K. (1986). Relace. In. **Algebra, každý začátek je lehký**. (pp. 53-88). Mladá fronta, Praha. Dostupné online (25. 9.2025): <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/404146>

5 Usporiadané množiny a relácie usporiadania

V tejto kapitole zavedieme pojem usporiadanej množiny. Prvky usporiadanej množiny budú usporiadané podľa špeciálnych relácií

5.1 Čiastočne usporiadaná množina

Definícia (čiastočné usporiadanie)

Relácia $D \subseteq M \times M$ na množine M , ktorá je súčasne **antisymetrická** a súčasne **tranzitívna**

sa nazýva **čiastočným usporiadaním** množiny M .

Ak dva prvky x, y množiny M sú v relácii D , potom zapisujeme $[x, y] \in D$. V prípade čiastočného usporiadania je bežnejší zápis

$$x \prec_M y,$$

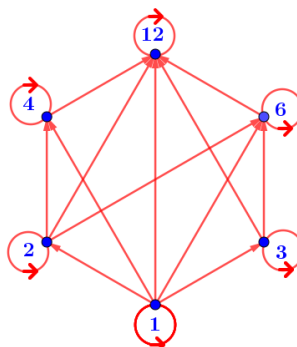
ktorý čítame: „ x **predchádza** y na množine M .“

Množinu M nazývame **čiastočne usporiadanou množinou** (v skratke **ČUM**) reláciou D a zapisujeme:

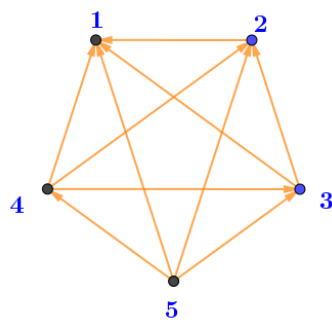
$$(M, \prec_M)$$

Uvedieme príklady.

- Ukázali sme, že relácia „delí“ na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ je reflexívna, **antisymetrická** a **tranzitívna**. Relácia „delí“ na množine M je čiastočným usporiadaním a množina $(M, |_M)$ je príkladom ČUM.



- Na množine čísel $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je definovaná relácia „byť väčší“ podľa orientovaného grafu (šípka smeruje od prvku s väčšou hodnotou k prvku s menšou hodnotou). Reláciu označíme znakom $>_A$. Relácia :
 - nie je reflexívna (napr.: číslo 5 nie je menšie ako číslo 5; graf nemá slučky),
 - nie je symetrická (napr. : $5 >_A 3$, ale $3 \not>_A 5$, t.j. „opačne to neplatí“),
 - je asymetrická (na grafe sú šípky (od prvku k inému prvku) len jedným smerom)
 - je **antisymetrická** (každá asymetrická relácia je aj antisymetrická),
 - je **tranzitívna** (na grafe sa zo šípok vyskytujú „všetky orientované trojuholníky“, napr. $(5 \rightarrow 3 \wedge 3 \rightarrow 2) \Rightarrow (5 \rightarrow 2)$, ... a podobne pre ostatné trojice prvkov).

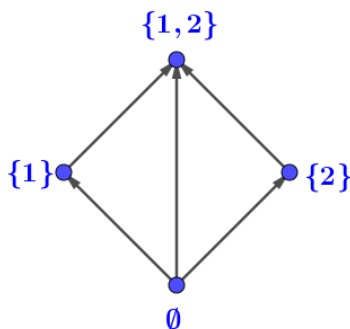


Relácia $>_A$ je **čiasťočníým usporiadaním** na množine A a množina $(A, >_A)$ je príkladom **ČUM**.

- Uvažujme množinu $M = \{1, 2\}$ a vytvorme množinu $\mathcal{P}(M)$ všetkých jej podmnožín:

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Ďalej na množine $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ definujeme reláciu „byť vlastnou podmnožinou,“ ktorú označíme znakom $\subset_{\mathcal{P}(M)}$ (nepoužijeme všeobecné označenie množiny). Nakreslíme orientovaný graf relácie.



Relácia „byť vlastnou podmnožinou“ je relácia **asymetrická** (a teda aj antisymetrická) a **tranzitívna** – je to **čiasťočné usporiadanie** množiny $\mathcal{P}(M)$ a množina $(\mathcal{P}(M), \subset_{\mathcal{P}(M)})$ je **ČUM**.

Príklad

Uvažujme množinu $M = \{a, b\}$. Zistite, či množina M , na ktorej je definovaná triviálna relácia $\emptyset$ (prázdna množina), je ČUM.

Riešenie. Ak uvažujeme karteziánsky súčin $M \times M$, potom

$$M \times M = \{[a, a], [a, b], [b, b], [b, a]\}$$

a jej (prázdna) podmnožina $\emptyset$ je relácia, ktorá neobsahuje usporiadané dvojice. Pri grafickom znázornení (pomocou orientovaných šípok) máme graf pozostávajúci z izolovaných prvkov množiny M .



Pri grafickom znázornení (pomocou orientovaných šípok) máme graf pozostávajúci z izolovaných prvkov množiny M . Napriek tomu je relácia $\emptyset$:

- a) **antisymetrická.**

Podľa definície antisymetrickej relácie musí byť platná implikácia

$$\forall x, y \in M: ([x, y] \in D \wedge [y, x] \in D) \Rightarrow (x = y)$$

Predpoklad implikácie $([x, y] \in \emptyset \vee [y, x] \in \emptyset)$ je nepravdivý výrok (má pravdivostnú hodnotu „0“), ale implikácia ako zložený výrok je pravdivá (podľa tabuľky pravdivostných hodnôt je implikácia nepravdivá len v prípade, že „1“ $\Rightarrow$ „0“).

b) Relácia $\emptyset$ je **tranzitívna**.

Dôvod je analogický ako pri dokazovaní, že relácia je antisymetrická.

Množina M usporiadaná prázdnom reláciou $\emptyset$ je **ČUM**.

Poznamenávame, že relácia $\emptyset$ **nie je trichotomická**.

Pre prvky $a, b \in M$ platí implikačný predpoklad v definícii trichotomickej relácie, kde $a \neq b$. Implikácia ako zložený výrok

$$(a \neq b) \Rightarrow ([a, b] \in \emptyset \vee [b, a] \in \emptyset)$$

je však nepravdivá. Výrok $([a, b] \in \emptyset \vee [b, a] \in \emptyset)$ je nepravdivý (prípád implikácie „1“ $\Rightarrow$ „0“).

5.2 Lineárne usporiadaná množina

Definícia (lineárne usporiadanie)

Relácia $D \subseteq M \times M$ na množine M , ktorá je súčasne **antisymetrická, tranzitívna a trichotomická** sa nazýva **lineárnym usporiadaním** množiny M .

Ak dva prvky x, y množiny M sú v relácii D , potom zapisujeme $[x, y] \in D$. V prípade lineárneho usporiadania je bežný zápis (analogicky ako pri čiastočnom usporiadaní):

$$x <_M y,$$

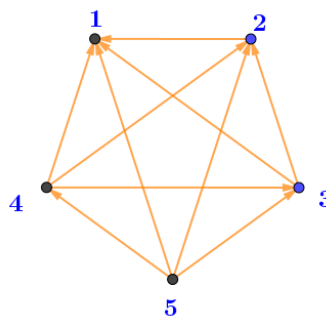
ktorý čítame: „ x **predchádza** y na množine M .“

Množinu M nazývame **lineárne usporiadanou množinou** (v skratke **LUM**) reláciou D a zapisujeme:

$$(M, <_M)$$

Uvedieme príklady a kontrapríklad.

- Uvažujme o množine prirodzených čísel $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, ktorej prvky usporiadame reláciou „byť ostro menší“ (definovaná v príklade, kap. Relácie). V podstate ide o štandardné usporiadanie prirodzených čísel podľa ich veľkosti. Ukázali sme, že relácia „byť ostro menší“ je asymetrická, tranzitívna a trichotomická a teda je **lineárnym usporiadaním**. Ak na označenie relácie použijeme znak $<_N$, potom $(N, <_N)$ je **LUM**.
- Na množine čísel $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sme definovali reláciu $>_A$ „byť väčší“ podľa orientovaného grafu



a ukázali sme, že množina $(A, >_A)$ je príkladom ČUM.

Relácia $>_A$ „byť väčší“ je aj trichotomická (ak uvažujeme ľubovoľné dva navzájom rôzne prvky, potom na grafe vždy existuje šípka medzi nimi (sú v relácii)).

Množina $(A, >_A)$ je príkladom ČUM, ktorá je aj LUM.

- Mali sme príklad dvojprvkovej množiny $M = \{1, 2\}$ a vytvorili sme množinu všetkých jej podmnožín $\mathcal{P}(M)$. Dokázali sme, že $(\mathcal{P}(M), \subset_{\mathcal{P}(M)})$, kde $\subset_{\mathcal{P}(M)}$ je relácia „byť vlastnou podmnožinou“ je ČUM.

Množina $(\mathcal{P}(M), \subset_{\mathcal{P}(M)})$ nie je LUM, pretože relácia nie je trichotomická (napr.: jednoprvkové množiny $\{1\}, \{2\}$ sú rôzne a nie sú podmnožinami jedna druhej, t.j. nie sú v relácii)

5.3 Poznámka k terminológii ČUM a LUM

Pojem usporiadanej množiny je v školskej matematike zaužívaný najmä v súvislosti s klasickými číselnými množinami (prirodzených čísel, celých čísel, racionálnych čísel, iracionálnych čísel a reálnych čísel). Usporiadanie sa vo výučbe nedefinuje ako relácia, akceptuje sa intuitívna predstava usporiadania podľa veľkosti čísel a využíva sa najmä pri riešení rovníc a nerovníc (prieniky a zjednotenia intervalov, ktoré určujú definičné obory, obor pravdivosti alebo aj samotné riešenie).

Ukázali sme, že prvky danej množiny môžeme usporiadať pomocou relácie čiastočného alebo lineárneho usporiadania, čo predstavuje všeobecnejší prístup k problematike. Množiny ČUM a LUM pomenujeme preto spoločne ako **usporiadané množiny**.

Upozorňujeme čitateľa, aby bol opatrný pri štúdiu doplňujúcich informačných zdrojov. Terminológia pre ČUM a LUM nie je jednotná.

Niekde autori definujú *čiastočné usporiadanie* ako reláciu, ktorá je *asymetrická a tranzitívna*.

Lineárne usporiadanie zavedú ako reláciu, ktorá je *čiastočným usporiadaním* a je súčasne *trichotomická*. Lineárne usporiadanie ďalej nazývajú len *usporiadaním*.

Zmena v definíciách môže spôsobiť, že niektoré ilustračné príklady nekorešpondujú so zaradením usporiadaných množín (medzi ČUM alebo LUM), ktoré sme uviedli v tomto učebnom texte.

5.4 Dobré usporiadaná množina

Zavedieme niektoré pomocné, ale dôležité pojmy.

Definícia (bezprostredný predchodca)

Ak $(M, <_M)$ je usporiadaná množina. Hovoríme, že prvok $a \in M$ je **bezprostredný predchodca** prvku $b \in M$, ak

$$\{x \in M : a <_M x <_M b\} = \emptyset.$$

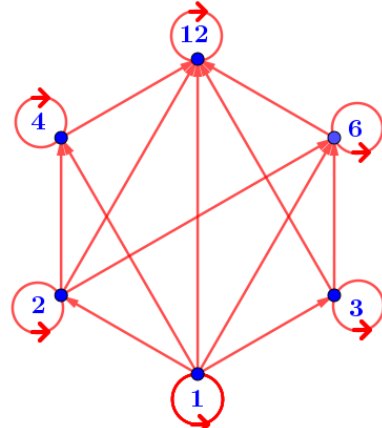
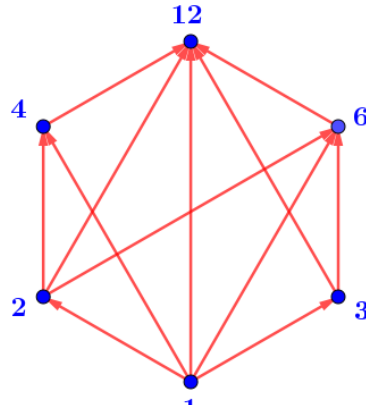
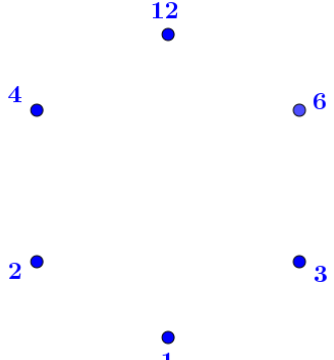
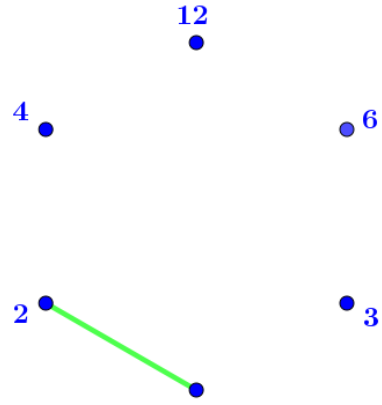
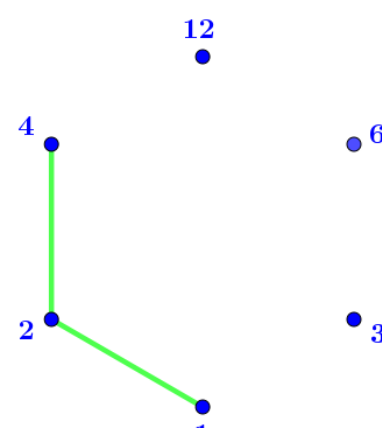
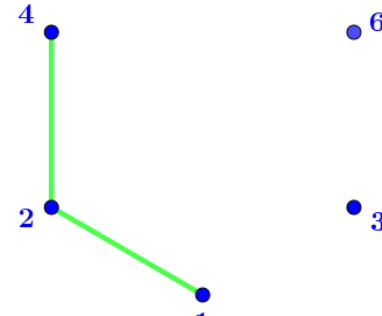
- Voľne povedané,
neexistuje prvok $x \in M$, ktorý by v relácii $<_M$ predchádzal prvku $a \in M$
a súčasne
prvok $x \in M$ by predchádzal v relácii $<_M$ prvku $b \in M$.

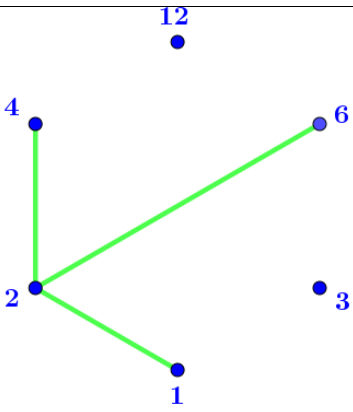
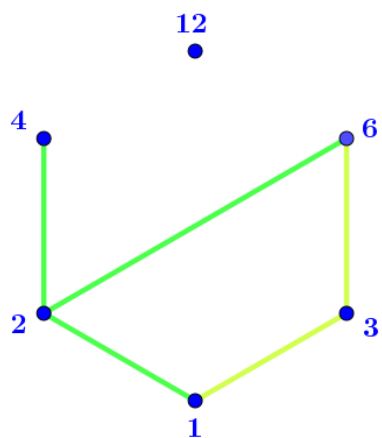
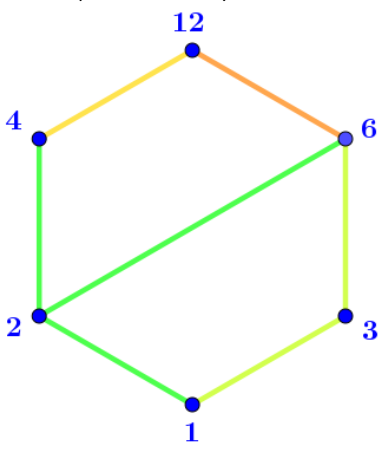
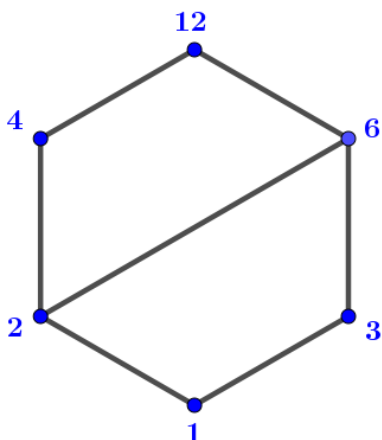
Prvok a (z definície) sa nazýva **bezprostredný predchodca** prvku b ; prvok b zase nazývame **bezprostredný nasledovník** prvku a .

Pojem bezprostredného predchodcu nám dovoľuje zjednodušiť orientované grafy ČUM a LUM a to podľa nasledujúcich pravidiel:

- vynecháme slučky (ak existujú - v prípade reflexívnej relácie),

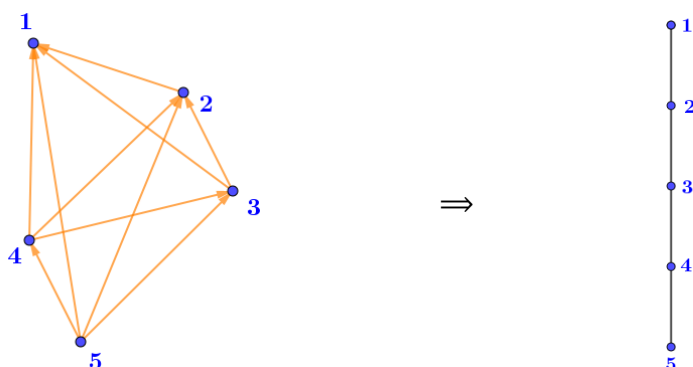
- b) orientujeme všetky šípky grafu jedným smerom (na papieri zvyčajne zdola nahor),
 c) namiesto orientovanej šípky zobrazíme len hranu (úsečku) medzi bezprostredným predchodcom a jeho bezprostredným nasledovníkom.
 Napr.: Ak na množine $M = \{1,2,3,4,6,12\}$ je definovaná relácia „delí“, potom je množina $(M, |_M)$ ČUM, ktorej kompletný graf je na obrázku vľavo (všetky šípky sú už orientované zdola nahor).

	a) odstránime slučky 
b) pracovne skryjeme všetky šípky, ponecháme len vrcholy a budeme vpisovať hrany (úsečky) 	c) naznačíme hranu (úsečku) 1 – 2, pretože 1 je bezprostredný predchodca 2. 
d) doplníme hranu 2 – 4, pretože 2 je bezprostredný predchodca 4. 	e) hranu 1 – 4 nekreslíme, pretože 1 nie je bezprostredný predchodca 4 (existuje prvok 2, pre ktorý platí: $1 _M 2 _M 4$). Doplníme však hranu 2 – 6, pretože 2 je aj bezprostredným predchodcom 6. 

	
f) hranu 2 – 12 opäť nedoplníme, lebo 2 nie je bezprostredný predchodca 12 (v usporiadaní $_M$ existuje „medzi nimi“ číslo 4. g) „Vrátíme“ sa k číslu 1 a doplníme hranu 1 – 3.	h) Číslo 3 je bezprostredný predchodca 6, doplníme ďalšiu hranu.  Ďalej už z čísla 3 nekreslíme hrany, lebo čísla 2 a 4 s ním neboli v relácii a pre číslo 12 nie bezprostredný predchodca.
i) Obdobne postupujeme aj pre čísla 4 a 6. Doplníme hrany 4 – 12 a 6 – 12. 	Výsledkom je graf, ktorý nazývame Hasseho diagram. 

Hasseho diagram je prehľadnejší, napr.: na obrázkoch sú orientovaný graf a Hasseho diagram pre LUM množinu $(A, >_A)$, kde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a reláciu $>_A$ „byť väčší“

(najprv sme orientovali všetky šípky tak, aby smerovali vždy zdola nahor. Následne sme nakreslili hrany medzi bezprostrednými predchodcami a ich nasledovníkmi).

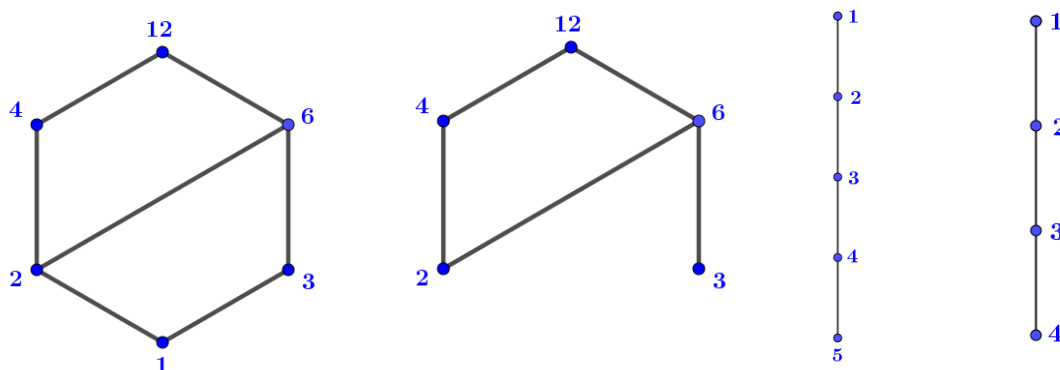


Definícia (minimálny prvok)

Ak $(M, <_M)$ je usporiadaná množina. Hovoríme, že prvok $a \in M$ je **minimálny prvok** usporiadanej množiny $(M, <_M)$, ak pre žiadne $x \in M$ neplatí $x <_M a$.

- Definícia uvádza, že žiaden prvok $x \in M$ nepredchádza prvok a , t.j. prvok a nemá bezprostredného predchodcu.
- V prípade množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ a usporiadanej množiny $(M, |_M)$ je minimálnym prvkom prvok „1“.

Ak uvažujeme podmnožinu $M_1 = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, potom usporiadaná množina $(M_1, |_{M_1})$ má minimálne prvky až dva – prvky „2“ a „3“ (dôvod: nemajú bezprostredných predchodcov).



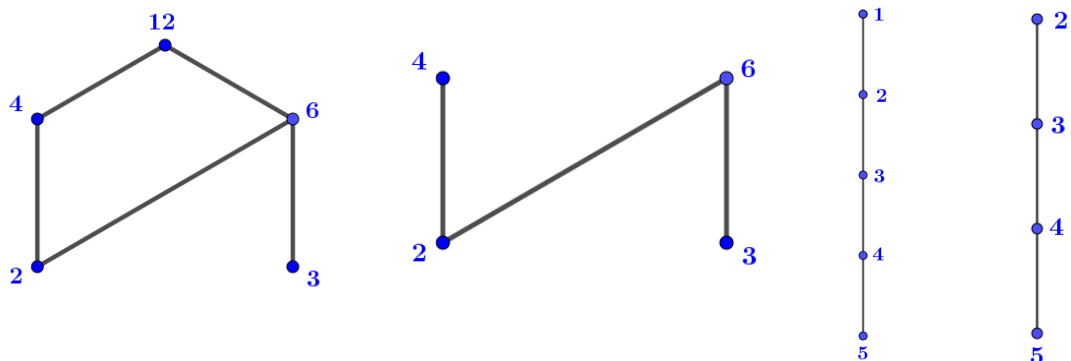
- V usporiadanej množine $(A, >_A)$, kde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $>_A$ je relácia „byť väčší“, je minimálny prvok „5“. Na podmnožine $A_5 = \{1, 2, 3, 4\}$ v tej istej relácii je minimálny prvok „4“.
- Usporiadaná množina celých čísel $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$, kde $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ a relácia $<_{\mathbb{Z}}$ je štandardné usporiadanie celých čísel podľa ich veľkosti, nemá minimálny prvok. Jej podmnožina $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ má minimálny prvok „0“.

Usporiadaná množina môže mať jeden alebo viac minimálnych prvkov alebo minimálny prvok nemusí existovať.

Obdobne sa dá definovať aj **maximálny prvok** – prvok usporiadanej množiny, ktorý nemá v danej množine bezprostredného nasledovníka.

- V prípade množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ a usporiadanej množiny $(M, |_M)$ je maximálnym prvkom prvok „12“.

Ak uvažujeme podmnožinu $M_1 = \{2,3,4,6,12\}$, potom usporiadaná množina $(M_1, |_{M_1})$ má tiež maximálny prvok „12“. Ak vezmeme podmnožinu $M_{12} = \{2,3,4,6\}$, maximálne prvky sú dva: „4“ a „6“.



- V usporiadanej množine $(A, >_A)$, kde $A = \{1,2,3,4,5\}$, $>_A$ je relácia „byť väčší“, je maximálny prvok „1“. Na podmnožine $A_1 = \{2,3,4,5\}$ v tej istej relácii je minimálny prvok „2“.
- Usporiadaná množina celých čísel $(Z, <_Z)$, kde $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ a relácia $<_Z$ je štandardné usporiadanie celých čísel podľa ich veľkosti, nemá maximálny prvok. Jej podmnožina $Z_- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ má minimálny prvok „-1“.

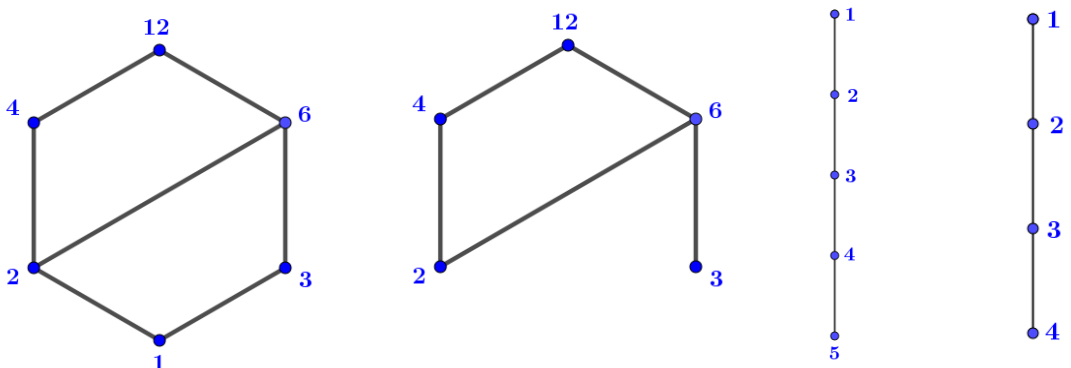
Analogicky, usporiadaná množina môže mať jeden alebo viac maximálnych prvkov alebo maximálny prvok nemusí existovať.

Definícia (prvý prvok)

Ak $(M, <_M)$ je usporiadaná množina. Hovoríme, že prvok $a \in M$ je **prvý prvok** usporiadanej množiny $(M, <_M)$, ak pre každý prvok $x \in M$ platí $a <_M x$.

- Definícia uvádza, že každý prvok $x \in M$, ktorý je s prvkom a v relácii $<_M$, ho na množine M predchádza. Prvok x nemusí byť nutne bezprostredný nasledovník prvku a . V Hasseho diagrame je prvý prvok umiestnený „najnižšie.“
- V prípade množiny $M = \{1,2,3,4,6,12\}$ a usporiadanej množiny $(M, |_M)$ je prvým prvkom prvok „1“.

Ak uvažujeme podmnožinu $M_1 = \{2,3,4,6,12\}$, potom usporiadaná množina $(M_1, |_{M_1})$ nemá prvý prvok.



- V usporiadanej množine $(A, >_A)$, kde $A = \{1,2,3,4,5\}$, $>_A$ je relácia „byť väčší“, je prvým prvkom „5“. Na podmnožine $A_5 = \{1,2,3,4\}$ v tej istej relácii je prvý prvok „4“.

- Usporiadaná množina celých čísel $(Z, <_Z)$, kde $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ a relácia $<_Z$ je štandardné usporiadanie celých čísel podľa ich veľkosti, nemá prvý prvok. Jej podmnožina $Z_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ má prvý prvok „0“.

Obdobne vieme definovať aj **posledný prvok** – prvok usporiadanej množiny, ktorý predchádzajú všetky prvky danej množiny.

- V prípade množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ a usporiadanej množiny $(M, |_M)$ je posledným prvkom „12“.
Ak uvažujeme podmnožinu $M_1 = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, potom usporiadaná množina $(M_1, |_{M_1})$ má tiež posledný prvok „12“. Ak vezmeme podmnožinu $M_{12} = \{2, 3, 4, 6\}$, posledný prvok neexistuje. Dôvod: Prvok „2“ predchádza prvky „4“ a „6“. Žiaden z nich nemôže byť posledný prvok, lebo prvok „3“ predchádza „6“, ale nepredchádza prvok „4“.
- V usporiadanej množine $(A, >_A)$, kde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $>_A$ je relácia „byť väčší“, je posledný prvok „1“. Na podmnožine $A_1 = \{2, 3, 4, 5\}$ v tej istej relácii je posledný prvok „2“.
- Usporiadaná množina celých čísel $(Z, <_Z)$, kde $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ a relácia $<_Z$ je štandardné usporiadanie celých čísel podľa ich veľkosti, nemá posledný prvok. Jej podmnožina $Z_- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ má posledný prvok „-1“.

Na základe uvedených príkladov môžeme sformulovať tvrdenia.

Veta. Ak $(M, <_M)$ je usporiadaná množina a prvok a je jej prvým prvkom, potom je tento prvok jediný.

Dôkaz (nepriamo). Predpokladajme, že a_1, a_2 sú dva navzájom rôzne, ale prvé, prvky v $(M, <_M)$. Ak a_1 je prvý prvok, potom podľa definície musí predchádzať každý prvok z množiny M , teda aj prvok a_2 a platí:

$$a_1 <_M a_2.$$

Súčasne, keďže a_2 je tiež prvý prvok na množine M , musí a_2 predchádzať každý prvok z M , teda aj a_1 a platí:

$$a_2 <_M a_1.$$

V relácii $<_M$ máme teda dvojicu $[a_1, a_2]$ a súčasne $[a_2, a_1]$, čo je spor s definíciou relácie (čiastočného alebo lineárneho) usporiadania, ktorá je asymetrická. ■

Veta. Ak $(M, <_M)$ je usporiadaná množina: Ak prvok a je prvým prvkom, potom je prvok a aj minimálnym prvkom.

Dôkaz je triviálny a ponechávame ho na čitateľa.

Len upozorníme, že opačné tvrdenie (k uvedenej vete) neplatí. Ak je prvok minimálny, nemusí byť prvým prvkom usporiadanej množiny. Ukážkou je príklad usporiadanej množiny $(M_1, |_{M_1})$.

Definícia (dobře usporiadaná množina)

Nech $(M, <_M)$ je usporiadaná množina. Hovoríme, že množina M je **dobře usporiadanou množinou**, ak každá jej neprázdna podmnožina má prvý prvok.

Dobře usporiadané množiny označujeme skratkou **DUM**.

- Príkladom dobre usporiadanej množiny je množina $(A, >_A)$, kde $A = \{1,2,3,4,5\}$ a $>_A$ je relácia „byť väčší“. Ukázali sme, že podmnožina $A_5 = \{1,2,3,4\}$ má prvý prvok „4“. Analogicky možno ukázať, že výberom ľubovoľnej neprázdnej podmnožiny z množiny A vždy získame množinu, ktorá bude mať prvý prvok, napr. $A_3 = \{1,2,4,5\}$ má prvý prvok „5.“
- Množina $(M, |_M)$, kde $M = \{1,2,3,4,6,12\}$ a relácia „delí“, nie je DUM, pretože neprázdna podmnožina $(M_1, |_{M_1})$, kde $M_1 = \{2,3,4,6,12\}$, potom nemá prvý prvok. Jeden exemplárny príklad postačuje na rozhodnutie.

O dobre usporiadaných množinách platia vety, ktoré uvádzame bez dôkazov.

Veta. Každá neprázdna podmnožina dobre usporiadanej množiny je dobre usporiadanou množinou (v tej istej relácii usporiadania).

Veta (Zermelova veta o dobre usporiadaných množinách)

Každú množinu možno dobre usporiadať.

Zermelova veta je **existenčná**. Tvrdí, že existuje usporiadanie na množine tak, aby bola typu DUM. Neuvádza však návod, ako to urobiť.

Ukázali sme, že usporiadaná množina celých čísel $(Z, <_Z)$, kde $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ nie je DUM. Z uvedeného vyplýva, že usporiadanie bude inou reláciou. Ako **možno** prvky množiny $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ „dobre“ pre-usporiadať? Ako naznačuje nasledujúci Hasseho diagram (z priestorových dôvodov otočený o 90° vpravo):



Množina celých čísel, ktorá rešpektuje poradie podľa diagramu, je DUM. Relácia lineárneho usporiadania je v tomto prípade určená grafom (predpis zatiaľ neuvádza). Konkrétne pravidlo (reláciu), ktorým sme usporiadali celé čísla (prvky množiny Z) na obrázku, vysvetlíme neskôr.

Vo všeobecnosti, určiť lineárne usporiadanie, ktoré usporiada ľubovoľnú množinu na množinu typu DUM, je **netriviálna záležitosť** a nie vždy sa taká relácia ľahko skonštruuje.

5.5 Husto usporiadaná množina

Definícia (husto usporiadaná množina)

Nech $(M, <_M)$ je usporiadaná množina. Hovoríme, že množina M je **husto usporiadanou množinou**, ak: má aspoň dva navzájom rôzne prvky, a súčasne platí

$$\forall x, y \in M \text{ také, že } x <_M y \Rightarrow \exists z \in M: x <_M z <_M y$$

Husto usporiadané množiny označujeme skratkou **HUM**.

- Príkladom husto usporiadanej množiny je množina $(Q, <_Q)$, kde relácia „byť menší“ $<_Q$ je (štandardné) usporiadanie racionálnych čísel podľa veľkosti. V prvom rade, množina Q má aspoň dve navzájom rôzne racionálne čísla, napr. $x = 0$ a $y = 1$, také, že $0 <_Q 1$. Súčasne existuje aj číslo z , napr. $z = \frac{1}{3}$ tak, že

$$0 <_Q \frac{1}{2} <_Q 1.$$

Všeobecne, ak $p, q \in Q$ také, že $p <_Q q$, potom existuje napr. $z = \frac{p+q}{2}$. Množina $(Q, <_Q)$ je HUM.

- Z uvedeného tiež vyplýva, že medzi racionálnymi číslami $p, \frac{p+q}{2}$ existuje ďalšie racionálne číslo napr. $\frac{p+\frac{p+q}{2}}{2} = \frac{3p+q}{4}$ také, že $p <_Q \frac{3p+q}{4} <_Q \frac{p+q}{2}$.

Analogicky (matematickou indukciou) možno teda ukázať, že množina $(Q, <_Q)$ je nekonečná.

- Množina $(N, <_N)$, kde $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ a relácia $<_N$ „byť menší“ je (štandardné) usporiadanie prirodzených čísel podľa veľkosti, nie je HUM. Ak vezmeme do úvahy napr. prvky $x = 1, y = 2$, potom neexistuje prvok z s vlastnosťou:

$$1 <_N z <_N 2$$

5.6 Ohraničená množina

Pri ohraničenosti množín rozlišujeme, v akej „pracujeme“ nadmnožine. Súčasne nás zaujíma, či ide o ohraničenie zdola alebo zhora, resp. či je množina ohraničená.

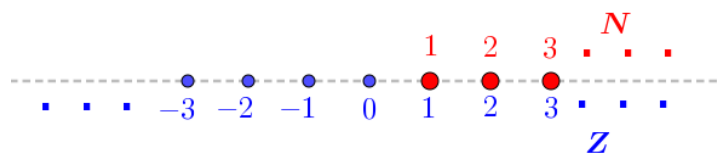
Definícia (zdola ohraničená množina)

Nech $(M, <_M)$ je usporiadaná množina a A jej neprázdna podmnožina. Množinu A nazveme **zdola ohraničenou množinou** v množine M , ak existuje také $a \in M$, že pre každý prvok $x \in A$ platí:

$$a <_M x$$

Prvok a nazývame **dolným ohraničením** (množiny A v množine M).

- Ak je množina A zdola ohraničená v množine M , prvok $a \in M$ ako jej dolné ohraničenie nemusí byť jediný.
Např.: usporiadaná množina prirodzených čísel $(N, <_N)$ je neprázdnu podmnožinou usporiadanej množiny celých čísel $(Z, <_Z)$. Ako dolné ohraničenie môžeme akceptovať ľubovoľné celé číslo a , ktoré je menšie alebo rovné 1.



- Dolné ohraničenie a je prvok nadmnožiny M . Môže (alebo aj nemusí) byť prvkom množiny A .
- Ak má množina M prvý prvok, potom každá jej neprázdna podmnožina je zdola ohraničená (dolným ohraničením môže byť práve prvý prvok množiny M).
- Množina $Z_- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ nie je zdola ohraničená v množine $(Z, <_Z)$.
- Ak neexistuje dolné ohraničenie množiny A v množine M , potom hovoríme, že množina jej dolných ohraničení je prázdna.

Definícia (zhora ohraničená množina)

Nech $(M, <_M)$ je usporiadaná množina a A jej neprázdna podmnožina. Množinu A nazveme **zhora ohraničenou množinou** v množine M , ak existuje také $b \in M$, že pre každý prvok $x \in A$ platí:

$$x <_M b$$

Prvok a nazývame **horným ohraničením** (množiny A v množine M).

- O hornom ohraničení množiny A v množine M platia analogické tvrdenia, ktoré sme uviedli pod definíciou.
Len doplníme, že usporiadaná množina prirodzených čísel $(N, <_N)$ je neprázdnu podmnožinou usporiadanej množiny celých čísel $(Z, <_Z)$ a nie je v nej zhora ohraničená.

Definícia (ohraničená množina)

Nech $(M, <_M)$ je usporiadaná množina a A jej neprázdna podmnožina. Množinu A nazveme **ohraničenou množinou** v množine M , ak je v množine M ohraničená **zdola a súčasne** ohraničená **zhora**.

- Pojem ohraničenej množiny je „viazaný“ na dva pojmy – ohraničenosť zdola a ohraničenosť zhora.⁹

Ukázali sme, že dolných ohraničení neprázdnej podmnožiny A množiny M môže byť viac. Vzhľadom k tomu, že množina $(M, <_M)$ je usporiadanou množinou, má zmysel uvažovať o množine dolných ohraničení ako o usporiadanej množine.

Definícia (infimum množiny)

Nech $(M, <_M)$ je usporiadaná množina a A jej neprázdna podmnožina. Prvok $a \in M$ nazveme **infimum** množiny A v množine M , ak platí:

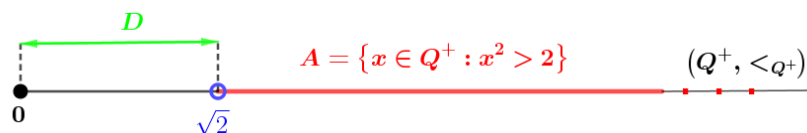
- a je dolné ohraničenie množiny A v množine M a súčasne
- žiadny prvok $t \in M$ taký, že $a <_M t$ už nie je dolným ohraničením množiny A v množine M .

Zapisujeme: $a = \inf(A)_M$.

Aké môžu nastať prípady?

- Uvažujme podmnožinu $A = \{4,5,6,7,8,9,10\}$ usporiadanej množiny prirodzených čísel $(N, <_N)$ a jej prvý prvok je „4“. Platí, že $4 \in A \Rightarrow 4 \in N$ a ide o infimum množiny A v množine N . Množina D dolných ohraničení množiny A má prvky $D = \{1,2,3\}$ a infimum jej nepatrí.
Z toho vyplýva: **Ak má množina A prvý prvok, potom je tento prvok aj jej infimom.**
- Ak $(R, \leq_R)$ je usporiadaná množina reálnych čísel, kde relácia $\leq_R$ „byť menší alebo rovný“ je (štandardné) usporiadanie reálnych čísel podľa veľkosti, a otvorený interval $(0,1)$ je jej uvažovaná neprázdna podmnožina A , potom D ako množina dolných ohraničení je polouzavretý interval $(-\infty, 0)$ a infimom je prvok - číslo „0“.
V tomto prípade ide o posledný prvok množiny dolných ohraničení D .
- Množina D dolných ohraničení je prázdna, napr. uvažujme množiny $(Z, <_Z)$ a $(R, <_R)$. Množina $(Z, <_Z)$ nemá v $(R, <_R)$ infimum.
- Uvažujme množinu $A = \{x \in Q^+, 2 <_{Q^+} x^2\}$ ako podmnožinu usporiadanej množiny kladných racionálnych čísel $(Q^+, <_{Q^+})$ kde relácia $\leq_R$ „byť menší alebo rovný“ je (štandardné) usporiadanie racionálnych čísel podľa veľkosti.

⁹ Pomôcka na zapamätanie: „Ak má človek na nohe len jednu topánku, ešte nie je obutý.“



Množina dolných ohraničení D obsahuje len tie kladné racionálne čísla, ktoré sa nachádzajú medzi „0“ a „ $\sqrt{2}$ “. Keďže $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo a množina $(Q^+, <_{Q^+})$ je HUM, nemá množina D horné ohraničenie a množina A nemá infimum v Q^+ .

Veta. Každá neprázdna podmnožina usporiadanej množiny má najviac jedno infimum.

Dôkaz (nepriamo). Nech a_1, a_2 sú dve navzájom rôzne infimá neprázdnej podmnožiny A usporiadanej množiny $(M, <_M)$.

Keďže sú a_1, a_2 infimá, sú obe dolným ohraničením množiny A v množine M .

Súčasne sú navzájom rôzne, preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a_1 <_M a_2$.

To však predstavuje spor - podľa definície infima, mal byť prvok a_1 takým prvkom, ktorého nepredchádza už iné dolné ohraničenie (teda ani dolné ohraničenie „v podobe“ prvku a_2). ■

Obdobne, ako sme definovali infimum množiny, dá sa definovať aj **suprémum množiny**.

5.7 Spojito usporiadaná množina

Ukážka neprázdnej podmnožiny $A = \{x \in Q^+, 2 <_{Q^+} x^2\}$ v usporiadanej množine $(Q^+, <_{Q^+})$ naznačuje, že existujú zdola ohraničené množiny, ktoré nemajú infimum. Množiny, ktoré tento problém nemajú, nazývame spojito usporiadanými množinami.

Definícia (infimum množiny)

Usporiadanú množinu $(M, <_M)$ nazveme **spojito usporiadanou množinou**, ak každá jej neprázdna zdola ohraničená podmnožina A má v množine M infimum.

- Príklad - množina reálnych čísel R so štandardným usporiadaním čísel podľa veľkosti je **spojito usporiadaná množina** (v skratke SUM).

Teória o spojito usporiadaných množinách má svoj význam v matematickej analýze pri vyšetrovaní vlastností funkcií, ich limit a pod.

5.8 Cvičenie

1. Na množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$ je určená relácia $D = \{[1, 2], [2, 3], [1, 3], [3, 4], [4, 1]\}$. Zistite, či množina $(M, <_D)$ je ČUM.
2. Prvé štyri písmená abecedy tvoria množinu $P = \{a, b, c, d\}$.

Relácia D s názvom „predchádza“ a znakom $<_P$ je definovaná tak, že „ $x <_P y$ “, ak prvok x je v abecede pred prvkom y .

Znázornite reláciu Hasseho diagramom a zistite, či je množina $(P, <_P)$ LUM. Zistite prvý prvok a posledný prvok relácie.

3. Na množine $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$ je definovaná relácia D s názvom „delí“ a znakom $|_A$ tak, že

$$\forall x, y \in A: x |_A y \Leftrightarrow \exists z \in A: x \cdot z = y$$

Nakreslite Hasseho diagram a zistite, či množina $(A, |_A)$ je ČUM. Určte minimálne a maximálne prvky množiny $(A_0, |_A)$, ak $A_0 = \{3, 4, 6, 12\}$.

4. Na množine $A = \{1, 2, 4, 12\}$ je definovaná relácia D „*nedelí*“ (so znakom „ $\nmid_D$ “) tak, že:

$$\forall x, y \in A: x \nmid_D y \Leftrightarrow \nexists c \in A: x \cdot c = y.$$

Je množina $(A, \nmid_D)$ množina typu ČUM alebo LUM?

5. Na množina $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$ je definovaná relácia D (s názvom „*byť menší*“ a označená znakom $\leq_A$) nasledovne: $\forall \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \in A: \frac{1}{n} \leq_A \frac{1}{m} \Leftrightarrow m < n$. Zistite, či množine $(A, \leq_A)$ je LUM a HUM. Existuje prvý prvok usporiadanej množiny $(A, \leq_A)$?

5.9 Odporúčaná literatúra

Vrábel, P. (2018). Rôzne typy usporiadaných množín. In. **Teória množín a teoretická aritmetika**. (pp. 73-87). FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 679, Nitra. ISBN: 978-80-558-1332-5

Šalát, T., Smítal, J. (1986). Usporiadané množiny. In. **Teória množín**. (pp. 102-118). Alfa Bratislava

6 Zobrazenie

V tejto kapitole sa vrátíme k pojmu karteziánsky súčin množín a budeme sa zaoberať špeciálnymi reláciami – zobrazeniami.

Vo viacerých matematických disciplínach je bežnou praxou, že relácie sa v prípade zobrazení značia **malými písmenami**, napr. $f, g, h \dots$. Nepoužíva sa ich označenie ako množín pomocou veľkých tlačných písmen. Aj my túto konvenciu aplikujeme v ďalšom texte.

Definícia (zobrazenie „Z-DO“)

Nech A, B sú množiny a f je relácia definovaná na karteziánskom súčine $A \times B$.

Ak ku každému prvku $x \in A$ existuje **najviac** jeden prvok $y \in B$ tak, že $[x, y] \in f$, potom reláciu f nazývame **zobrazením z množiny A do množiny B** .

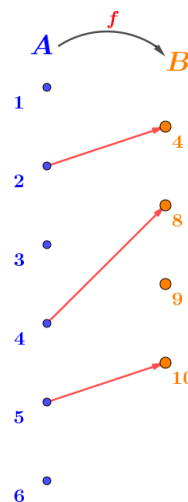
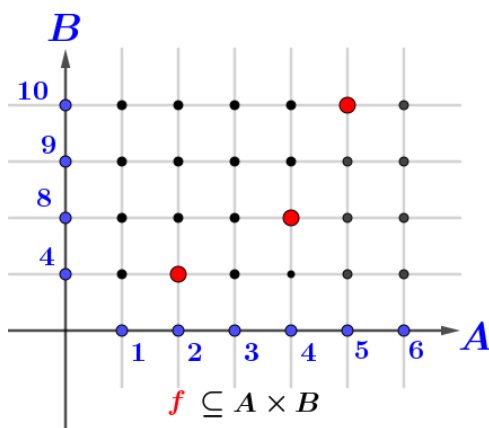
Zobrazenie f zapisujeme $f: A \rightarrow B$, prvky $x \in A$ nazývame **vzory**, prvky $y \in B$ označujeme ako **obrazy** prvkov x . Niekedy použijeme alternatívny zápis:

$$f(x) = y.$$

Uvedieme príklady a kontrapríklady.

- Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 8, 9, 10\}$. Relácia $f \subseteq A \times B$ bude definovaná tak, že: usporiadaná dvojica $[x, y] \in f$ vtedy a len vtedy, keď „ y je dvojnásobok x “.

Znázorníme najprv karteziánsky súčin $A \times B$ uzlovým grafom (obr. vľavo) a v ňom farebne (červenou) vyznačíme príslušné zobrazenie f . Avšak názornejší je orientovaný graf zobrazenia f (obr. vpravo)



Všimnime si, že podľa definície:

- niektoré prvky z množiny A nemusia mať obrazy. Definícia požaduje priradiť prvku $x \in A$ **najviac jeden** prvok $y \in B$, t.j. žiaden alebo jeden.
Např.: v uvedenom zobrazení f sú to prvky „1, 3, 6“, ktoré nemajú obrazy.
Prvky $x \in A$, ktoré majú obrazy $y \in B$, tvoria podmnožinu množiny A , ktorú nazývame **definičným oborom** zobrazenia f a označujeme $D(f)$.
Např. v uvedenom zobrazení $f: A \rightarrow B$ máme: $D(f) = \{2, 4, 5\} \subseteq A$
- Ak skúmame prvky y množiny B , opäť ich možno triediť do dvoch podmnožín. Prvky, ktoré nemajú vzory, např. v danom zobrazení prvok „9“.

Podmnožinu množiny B , ktorej každý prvok y má v danom zobrazení vzor $x \in A$, nazývame **oborom hodnôt** zobrazenia f a označujeme $H(f)$.

Napr.: v uvedenom zobrazení $f: A \rightarrow B$ máme:

$$H(f) = \{4, 8, 10\} \subseteq B.$$

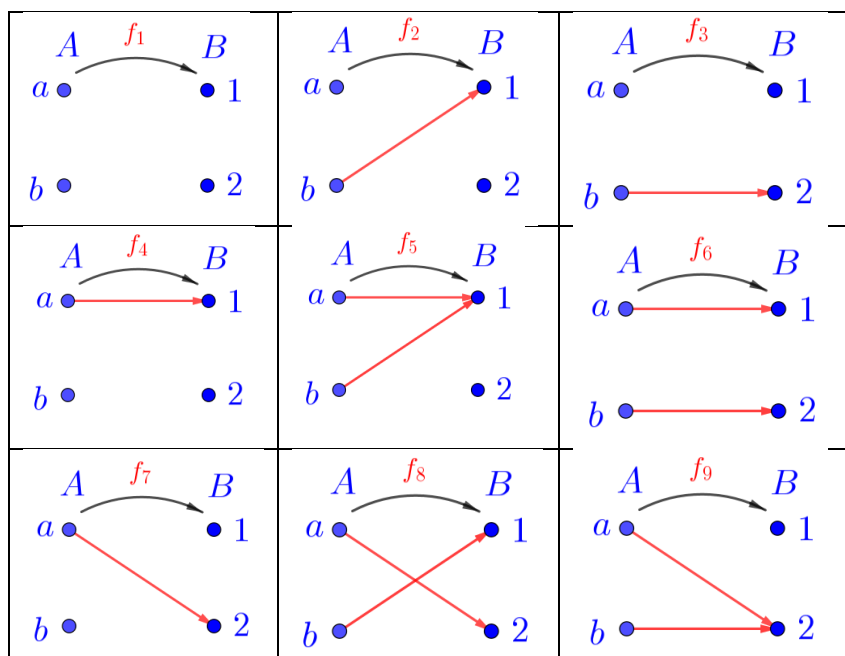
Príklad

Určte všetky zobrazenia f z množiny $A = \{a, b\}$ do množiny $B = \{1, 2\}$.

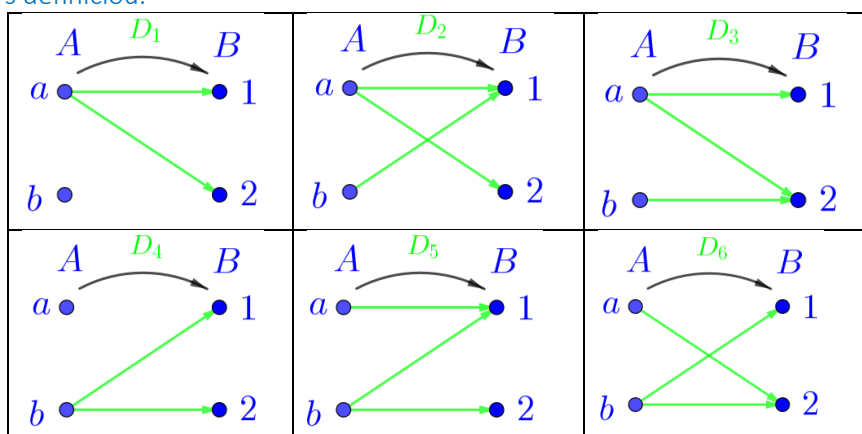
Riešenie. Zobrazenia určíme graficky.

Postupujeme systematicky podľa „pravidla“ - prvku $a \in A$ priradíme **najviac** jedno $y \in B$:

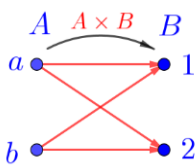
- v zobrazeniach f_1, f_2, f_3 vzoru „ a “ najprv žiaden obraz. Následne prvku $b \in A$ priradíme postupne žiaden obraz, potom prvok „1“ a nakoniec prvok „2“.
- V zobrazeniach f_4, f_5, f_6 prvku „ a “ priradíme prvok „1“, a potom „prebehneme“ možnosti obrazu prvku $b \in A$ - postupne žiaden prvok, prvok „1“ a nakoniec prvok „2“.
- V zobrazeniach f_7, f_8, f_9 prvku „ a “ priradíme obraz „2“. Následne „prebehneme“ možnosti priradenia obrazu prvku $b \in A$ - postupne žiaden prvok, prvok „1“ a nakoniec prvok „2“.



Relácie D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 a D_6 zobrazeniami (z množiny A do množiny B) **nie sú**, pretože v príslušných reláciách vždy jednému (vybranému) prvku z množiny A sa priradujú dva rôzne obrazy z množiny B . To je rozpor s definíciou.



Z rovnakého dôvodu ani karteziánsky súčin $A \times B$ **nie je** zobrazením z množiny A do množiny B .



Záver: Množina M všetkých zobrazení **z** množiny $A = \{a, b\}$ **do** množiny $B = \{1, 2\}$ je:

$$M = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_9\}$$

a ďalšie zobrazenia už nie sú.

Dôvod: na karteziánskom súčine $A \times B$ sú vyznačené **štyri** orientované **šípky**, ktoré sme postupne z grafu odoberali - najprv všetky štyri, potom tri, dva, jednu a nakoniec žiadnu šípku, pričom na poradi výberu nezáležalo. Z hľadiska kombinatoriky - vyjadrené kombinačnými číslami

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} + \binom{4}{0} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4,$$

čo predstavuje počet všetkých podmnožín štvorprvkovej množiny. Ako sme uviedli, nie všetky možnosti sú zobrazeniami.

Pre zobrazenia platí:

- $D(f_1) = \emptyset$,
- $D(f_4) = D(f_7) = \{a\}$
- $D(f_2) = D(f_3) = \{b\}$
- $D(f_5) = D(f_6) = D(f_8) = D(f_9) = \{a, b\}$
- $H(f_1) = \emptyset$
- $H(f_2) = H(f_4) = H(f_5) = \{1\}$
- $H(f_3) = H(f_7) = H(f_9) = \{2\}$
- $H(f_6) = H(f_8) = \{1, 2\}$

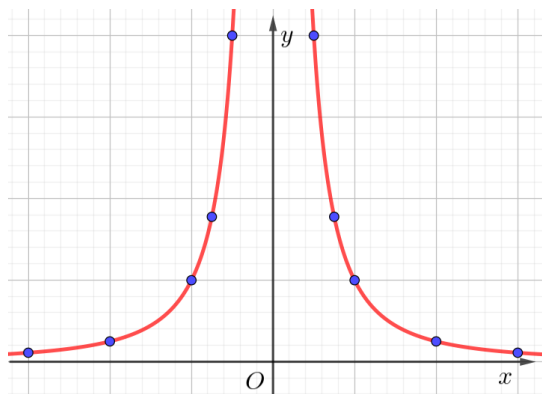
V predchádzajúcom príklade sme pracovali s konečnými množinami a nebol problém s určením definičného oboru, či oboru hodnôt. V prípade hustých množín je to komplikovanejšie, napr.:

- ak uvažujeme o zobrazení g z množiny reálnych čísel R do množiny reálnych čísel R , ktoré prvku $x \in R$ priradí (najviac) jedno $y \in R$ tak, že

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Nakresliť graf zobrazenia, t.j. množinu všetkých usporiadaných dvojíc $\left[x, \frac{1}{x^2}\right]$ postupne „bod za bodom“, nie je možné, a preto sa uspokojíme s presným výpočtom len vybraných bodov (pomocou tabuľky) a „zvyšok“ doplníme približným náčrtom.

x	-3	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{16}{9}$	4	ndef.	4	$\frac{16}{9}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$



Je zrejmé¹⁰, že $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$ a $H(g) = \{y \in \mathbb{R}, y > 0\}$.

Z uvedených príkladov vyplýva, že v zobrazení f z množiny A do množiny B :

- a) nie každý prvok $x \in A$ musí byť vzorom nejakému prvku $y \in B$, t.j. $D(f) \subseteq A$ alebo
- b) nie každý prvok $y \in B$ musí byť obrazom nejakého prvku $x \in A$, t.j. $H(f) \subseteq B$.

V prípade zobrazenia $f: A \rightarrow B$ z množiny do množiny je definičný obor podmnožinou množiny A a môže byť vlastnou podmnožinou. To znamená, že existuje aspoň jeden prvok z množiny A , ktorý nemá priradený obraz. Situáciu zmení ďalšia definícia – definícia zobrazenia množiny do množiny.

Definícia (zobrazenie „DO“)

Nech A, B sú množiny a f je relácia definovaná na karteziánskom súčine $A \times B$.

Ak ku každému prvku $x \in A$ existuje práve jeden prvok $y \in B$ tak, že $[x, y] \in f$, potom reláciu f nazývame **zobrazením množiny A do množiny B** .

Pre zobrazenie f množiny A do množiny B je typické, že jeho **definičný obor $D(f)$ je množina A** .

Ak sa opätovne pozrieme na zobrazenia medzi množinami $A = \{a, b\}$ a $B = \{1, 2\}$, potom:

- a) existuje 9 zobrazení z množiny A do množiny B , ale
- b) len zobrazenia f_5, f_6, f_8 a f_9 sú zobrazenia množiny A do množiny B .
Všimnime si, že zobrazenie f_5 priradzuje $a \rightarrow 1$ a $b \rightarrow 1$. Vzorom a, b existuje priradený len jeden obraz. To, že tento obraz – prvok „1“ je spoločným obrazom dvoch rôznych vzorov, nie je v rozpore s definíciou. Analogicky aj príklad zobrazenia f_9 .

Zobrazenie f množiny A do množiny B sa v prípade číselných množín A, B nazýva **funkciou**. Funkcia je dôležitý pojem aj v stredoškolskej matematike.

Príklad

Určte všetky zobrazenia f množiny $A = \{a, b\}$ do množiny $B = \{1, 2, 3\}$, t.j.

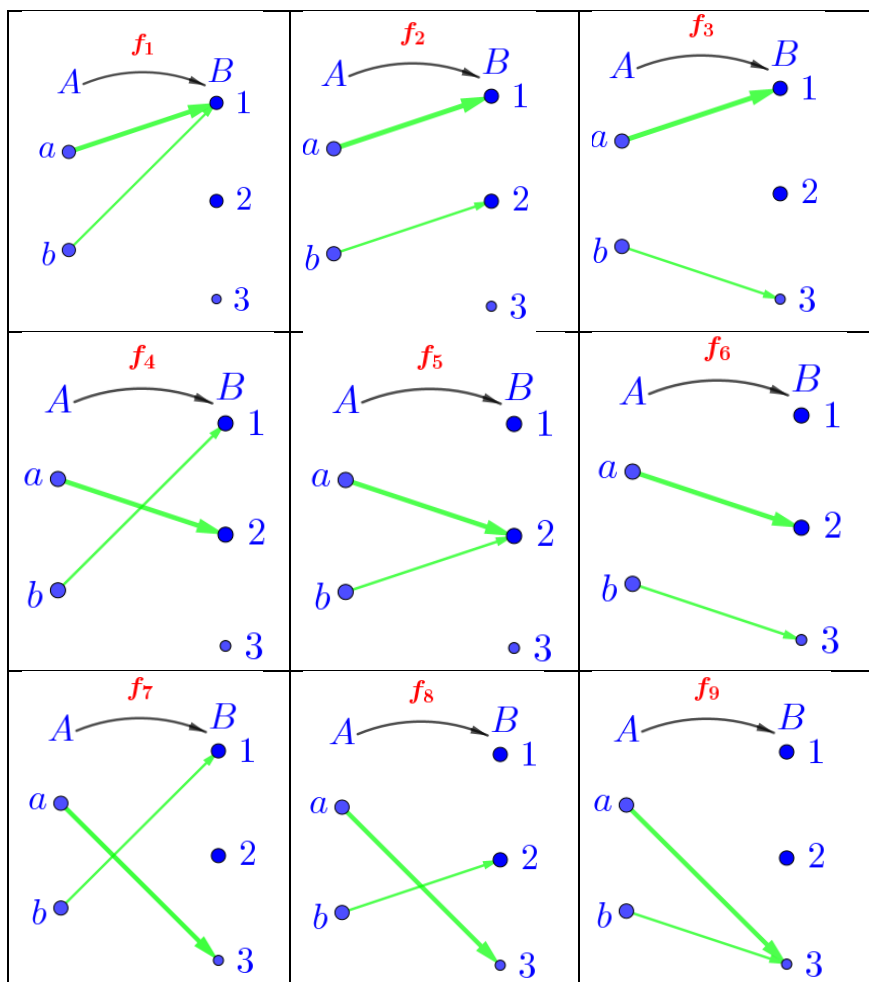
$$f: A \rightarrow B$$

Riešenie. Zobrazenia určíme graficky.

¹⁰ V niektorej literatúre sa množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ mylne zamieňa za otvorený interval $(-\infty, \infty)$. Tento interval predstavuje **rozšírenú** množinu reálnych čísel o nevlastné prvky $\pm\infty$. Na určenie definičného oboru, resp. oboru hodnôt, sme použili množinový zápis pomocou definovaného rozdielu množín, resp. charakteristickej vlastnosti.

Postupujeme systematicky podľa „pravidla“ - každému prvku $a \in A$ priradíme **práve** jedno $y \in B$:

- v zobrazeniach f_1, f_2, f_3 vzoru „ a “ priradíme prvok „1“ Následne prvku $b \in A$ priradíme postupne prvok „1“, „2“ a nakoniec prvok „3“.
- V zobrazeniach f_4, f_5, f_6 prvku „ a “ priradíme prvok „2“ a analogicky „prebehne cez“ možnosti obrazu prvku b .
- V zobrazeniach f_7, f_8, f_9 prvku „ a “ priradíme prvok „3“ a analogicky „prebehne cez“ možnosti obrazu prvku b .



Záver: Množina M všetkých zobrazení množiny $A = \{a, b\}$ do množiny $B = \{1, 2, 3\}$ je:

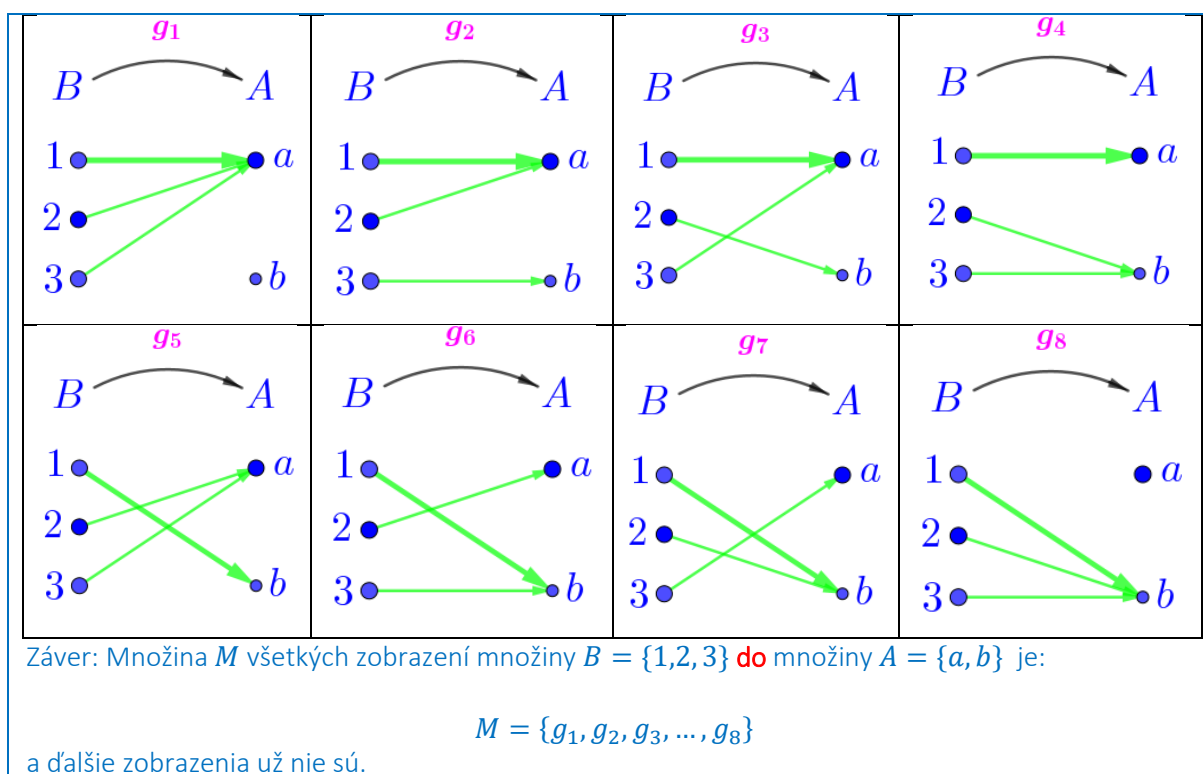
$$M = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_9\}.$$

Príklad

Určte všetky zobrazenia (funkcie) g množiny $B = \{1, 2, 3\}$ do množiny $A = \{a, b\}$, t.j.

$$g: B \rightarrow A$$

Riešenie. Zobrazenia znázorníme graficky.



Ak množiny A, B sú konečné, t.j. $|A| = m$, $|B| = n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, potom

- počet zobrazení $f: A \rightarrow B$ množiny A do množiny B je n^m ,
- počet zobrazení $g: B \rightarrow A$ množiny A do množiny B je m^n .



V ďalšom texte budeme pracovať len so zobrazeniami množiny A do množiny B .

6.1 Skladanie zobrazení

Zobrazenia možno skladať.

Veta. Zložením dvoch zobrazení $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ je zobrazenie $h: A \rightarrow C$. Skladanie zobrazení nie je komutatívne.

Dôkaz. Uvažujme teda o zobrazeniach:

- ak $f: A \rightarrow B$ je zobrazenie množiny A do množiny B , potom obsahuje usporiadané dvojice $[x, y]$, kde ľubovoľnému $x \in A$ existuje jediné $y = f(x) \in B$.
- Ak $g: B \rightarrow C$ je zobrazenie množiny B do množiny C , potom obsahuje usporiadané dvojice $[y, z]$, kde ľubovoľnému $y = f(x) \in B$ existuje jediné $z = g(y) \in C$.

Ak uvažujeme usporiadanú dvojicu $[x, z]$, potom pre x ako ľubovoľný prvok z množiny A a pre prvok $z = g(y) = g(f(x))$ platí, že $z \in C$ (z je jediným obrazom prvku $y \in B$ v zobrazení g , ktorý bol zase jediným obrazom prvku x v zobrazení f).

Z toho vyplýva, že ľubovoľnému prvku $x \in A$ existuje jediný prvok $z \in C$. Usporiadaná dvojica $[x, z] \in A \times C$ a medzi množinami je teda definované nové zobrazenie, ktoré označíme ako $h: A \rightarrow C$.

Skladanie zobrazení vo všeobecnosti nie je komutatívne, resp. „prevediteľné“.

Napr.: ak máme uvažovať o „zobrazení“ $f \circ g$, potom by sme najprv „zobrazovali“ $B \rightarrow C$ a následne by sme „zobrazovali“ $A \rightarrow C$. Voľne povedané - „vo všeobecnosti chýba premostenie“.

Zdôrazňujeme, že je vo **všeobecnosti**. Existujú však prípady zobrazení, kde ich skladanie je komutatívne. ■

Zobrazenie $h: A \rightarrow C$ pomocou zobrazení $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ zapíšujeme:

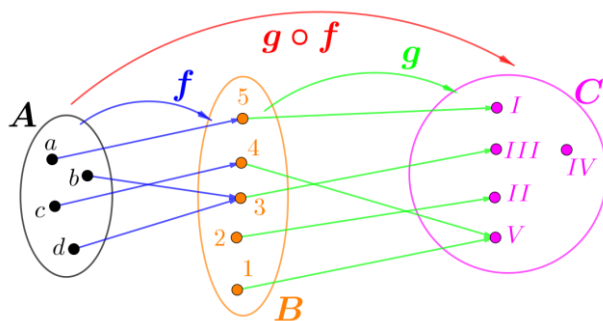
$$h = g \circ f$$

a čítame „zobrazenie g nasleduje zobrazenie f .“

Príklad

Určte zložené zobrazenie $g \circ f: A \rightarrow C$, ak $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{I, II, III, IV, V\}$ a $f = \{[a, 5], [b, 3], [c, 4], [d, 3]\}$, $g = \{[5, I], [4, V], [3, III], [2, II], [1, V]\}$.

Riešenie. Zobrazenia f, g prehľadne znázorníme.



Výsledné zložené zobrazenie $g \circ f: A \rightarrow C$ je množina usporiadaných dvojíc
 $g \circ f = \{[a, I], [b, III], [c, V], [d, III]\}$.

Všimnime si:

- každý prvok $x \in A$ má práve jeden obraz $z \in C$. Nie je v rozpore s definíciou, keď prvky „b, d“ majú rovnaký obraz – prvok „III“.
- Existujú prvky „1, 2“ v množine B , ktoré nemajú vzory v zobrazení f . Keďže g je zobrazenie, tieto prvky musia mať obrazy v množine C .

Z uvedeného dôvodu sme v dôkaze vety písali $y = f(x)$ a $z = g(y)$. V skladaní príslušných zobrazení sa uvažuje len o odpovedajúcich si vzoroch a obrazoch.

Príklad

Určte zložené zobrazenia $g \circ f: R \rightarrow R$ a $f \circ g: R \rightarrow R$, ak $f(x) = 2x$ a $g(x) = 3x + 1$. Zistite, či skladanie daných zobrazení je komutatívne.

Riešenie. Zobrazenia f, g sú definované (a majú obory hodnôt) v množine reálnych čísel, ktorá je hustou množinou. Zadané sú teda predpisom (analyticky, nie vymenovaním prvkov).

Uvažujme najprv o funkcii $g \circ f: R \rightarrow R$. Počítajme:

$$g(f(x)) = 3(2x) + 1 = 6x + 1$$

Pre druhé zobrazenie $f \circ g: R \rightarrow R$ odvodíme:

$$f(g(x)) = 2(3x + 1) = 6x + 2$$

Vidíme, že $g \circ f \neq f \circ g$. Skladanie daných zobrazení f, g nie je komutatívne.

6.2 Vlastnosti zobrazení

Definícia (rovnosť zobrazení)

Nech sú dané zobrazenia $f: A \rightarrow B$ a $g: A \rightarrow B$. Hovoríme, že zobrazenia f a g sa **rovnajú**, ak

- a) $D(f) = D(g)$
a súčasne
- b) pre každé $x \in D(f)$ platí: $f(x) = g(x)$.

Zapisujeme: $f = g$.

- Zápis $f(x) = g(x)$ znamená rovnosť obrazov, nie predpisov. Napr.: zobrazenia (funkcie) $f(x) = \sin^2 x$ a $g(x) = 1 - \cos^2 x$ definované na množine reálnych čísel R , sa rovnajú.
- V definícii sa požaduje splnenie dvoch podmienok. Nepostačuje len rovnosť obrazov $f(x), g(x)$ pre vybraný vzor $x \in A$, dôležité sú aj definičné obory.
Např. zobrazenia $f: x \rightarrow x + 1$ a $g: x \rightarrow \frac{x^2-1}{x-1}$ sa nerovnajú, pretože majú rôzne definičné obory:
 $D(f) = R, \quad D(g) = R - \{1\}$.

Definícia (injekcia)

Zobrazenie $f: A \rightarrow B$ nazývame **injektívne zobrazenie**, ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí:
 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- V prípadoch zobrazení f množiny $A = \{a, b\}$ do množiny $B = \{1, 2, 3\}$ je vidno, že ukážkami injektívnych zobrazení **sú** zobrazenia: f_2, f_3, f_4, f_6, f_7 a f_8 .
Naopak, zobrazenia f_1, f_5 a f_9 injektívne **nie** sú.
- V prípadoch zobrazení $g: B \rightarrow A$, kde $B = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a, b\}$, ľubovoľné zo zobrazení g_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ **nie** je injektívnym zobrazením (vždy sa nájdu dva navzájom rôzne vzory, ktoré majú v danom zobrazení rovnaký obraz).

Definícia (surjekcia)

Zobrazenie $f: A \rightarrow B$ nazývame **surjektívne zobrazenie**, ak pre ľubovoľné $y \in B$ existuje také $x \in A$, že platí:
 $[x, y] \in f$.

- Podľa definície zobrazenie je surjektívnym zobrazením, ak každý prvok $y \in B$ má v danom zobrazení vzor $x \in A$.
- V prípadoch zobrazení f množiny $A = \{a, b\}$ do množiny $B = \{1, 2, 3\}$ je zrejmé, že ľubovoľné zo zobrazení f_i , $i = 1, 2, \dots, 9$ **nie** je surjektívne (vždy sa nájdu prvky $y \in B$, ktoré nemajú vzory).
- V prípadoch zobrazení $g: B \rightarrow A$, kde $B = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a, b\}$, surjektívnymi zobrazeniami **sú**: g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 a g_7 . Nie je v rozpore s definíciou, že v jednotlivých zobrazeniach mal (vybraný) obraz dva rôzne vzory.

Príklad

Určte, ktoré zobrazenia (zadané graficky) na obrázkoch sú injektívnymi a surjektívnymi zobrazeniami.

Riešenie. Zobrazenia určíme graficky (ponecháme označenie zobrazení z pôvodného ilustračného príkladu zobrazenia f z množiny A do množiny B).

	Injektívne: áno Surjektívne: nie		Injektívne: nie Surjektívne: nie
	Injektívne: nie Surjektívne: áno		Injektívne: áno Surjektívne: áno

Definícia (bijekcia)

Zobrazenie $f: A \rightarrow B$ nazývame **bijektívne zobrazenie**, ak je injektívne a súčasne surjektívne zobrazenie.

- Na obr. vyššie je ukážka - bijektívne¹¹ zobrazenie je $k: B \rightarrow A$.
- Všimnime si, že počty prvkov v bijektívnom zobrazení $k: B \rightarrow A$ (konečných) množín A, B sú rovnaké. Nie je však nutné uvažovať o konečných množinách.

Príklad

Zobrazenie $f: N \rightarrow Z$, kde $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je definované takto:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{ak } n \text{ je párne číslo} \\ 1 - \frac{n}{2}, & \text{ak } n \text{ je nepárne číslo.} \end{cases}$$

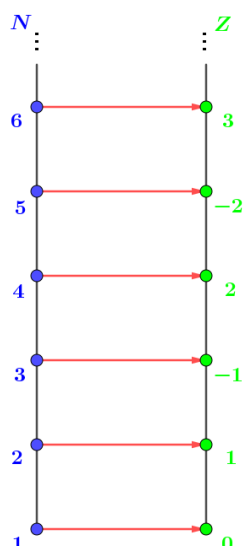
Zistite, či f je bijektívne zobrazenie.

Riešenie. Najprv overíme, či je zobrazenie injektívne.

- Ak n_1, n_2 sú dve navzájom rôzne **párne** prirodzené čísla, potom platí: $\frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2}$.
- Ak n_1, n_2 sú dve navzájom rôzne **nepárne** prirodzené čísla, potom $\frac{1-n_1}{2} \neq \frac{1-n_2}{2}$.
- Nech n_1 je párne číslo a n_2 nepárne prirodzené číslo. Ak n_1 je párne číslo, potom $\frac{n_1}{2} > 0$. Ak n_2 je nepárne, potom $1 - \frac{n_2}{2} \leq 0$ a teda $\frac{n_1}{2} \neq \frac{1-n_2}{2}$.

Zobrazenie $f: N \rightarrow Z$ je **injektívne** zobrazenie.

¹¹ V staršej literatúre injektívne zobrazenie nájdeme pod názvom **jednoznačné** zobrazenie. Pre bijektívne zobrazenie sa používal názov **jedno-jednoznačné** zobrazenie.



Overíme, či je zobrazenie surjektívne. Nech z je ľubovoľné celé číslo.

a) Ak $z \geq 0$, potom prirodzené číslo $n = 2z$ je jeho vzorom v zobrazení f .

b) Ak $z < 0$, potom prirodzené číslo $n = 1 - 2z$ je jeho vzorom v zobrazení f .

Zobrazenie $f: N \rightarrow Z$ je **surjektívne** zobrazenie.

Zobrazenie $f: N \rightarrow Z$ je **bijektívne** zobrazenie.

Veta. Nech zobrazenie $f: A \rightarrow B$ je bijektívne zobrazenie. Relácia $g: B \rightarrow A$ definovaná na karteziánskom súčine $B \times A$, ktorá obsahuje všetky usporiadané dvojice $[y, x]$, kde $[x, y] \in f$, je tiež zobrazením množiny B na množinu A .

Dôkaz. Zobrazenie $f: A \rightarrow B$ je bijektívne zobrazenie, teda je aj surjektívne a ku každému (ľubovoľnému) prvku $y \in B$ **existuje** prvok $x \in A$ taký, že $f(x) = y$.

Keďže $f: A \rightarrow B$ je aj injektívne zobrazenie, **nemôže** nastať prípad, že by ľubovoľný prvok $y \in B$ bol „spoločným“ obrazom najmenej dvoch rôznych prvkov $x \in A$.

Z toho vyplýva, že ľubovoľnému prvku $y \in B$ **existuje práve jeden** prvok $x \in A$, kde $y = f(x)$ je vzor a x je obraz v relácii $g: B \rightarrow A$. Relácia g je v zmysle definície zobrazením $g: B \rightarrow A$. ■

Zobrazenie $g: B \rightarrow A$ nazývame **inverzným zobrazením** k zobrazeniu $f: A \rightarrow B$ a zvyčajne označujeme:

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

- Pre definičné obory a obory hodnôt zobrazení f a f^{-1} platí: $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(f^{-1})$.
- V prípadoch, kedy namiesto zobrazení hovoríme o funkciách, analytické vyjadrenie inverznej funkcie f^{-1} získame formálne tak, že v predpise funkcie f nezávislú premennú x nahradíme y a závislú premennú y zase premennou x . Následne pomocou úprav vyjadríme y pomocou x . Napr.: funkcia $f: y = x^2 - 4x + 3$ definovaná na $D(f) = \{x \in \mathbb{R}, 2 < x < 5\}$ má obor hodnôt $H(f) = \{y \in \mathbb{R}, -1 < y < 8\}$.

Na danom $D(f)$ je funkcia bijektívne zobrazenie (prostá) a existuje jej inverzná funkcia f^{-1} , kde $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x < 8\}$ a $H(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R}, 2 < y < 5\}$.

Analytické vyjadrenie odvodíme nasledovne:

$$\begin{aligned}
 x &= y^2 - 4y + 3 \\
 x &= y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2 + 3 \\
 x &= (y - 2)^2 - 4 + 3 \\
 x &= (y - 2)^2 - 1 \\
 \sqrt{x + 1} &= |y - 2|
 \end{aligned}$$

Pre každé $x \in D(f^{-1})$ a $y \in H(f^{-1})$ platí $\sqrt{x + 1} \geq 0$ a $|y - 2| = +(y - 2)$ dostaneme

$$f^{-1}: y = 2 + \sqrt{x + 1}$$

Veta. Ak zobrazenie $f: A \rightarrow B$ je bijektívne zobrazenie, potom inverzné zobrazenie $f^{-1}: B \rightarrow A$ je tiež bijektívnym zobrazením.

Dôkaz vyplýva z vlastností bijektívneho zobrazenia $f: A \rightarrow B$.

Veta. Ak zobrazenie $f: A \rightarrow B$ je bijektívne zobrazenie a súčasne $g: B \rightarrow C$ je bijektívne zobrazenie, potom zložené zobrazenie $g \circ f: A \rightarrow C$ je tiež bijektívnym zobrazením.

Dôkaz opäť vyplýva z vlastností bijektívneho zobrazenia.

6.3 Cvičenia

- Nájdite všetky zobrazenia z množiny $A = \{1, 2, 3\}$ do množiny $B = \{a, b\}$. Znázornite graficky. Ktoré zobrazenia sú zobrazeniami množiny A do množiny B ?
- Na množine $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ je definovaná relácia $D = \{[a, a^2], a \in A\}$. Je relácia zobrazením z množiny A do množiny A ?
- Napíšte všetky zobrazenia množiny B do množiny B , ak $B = \{0, 1\}$.
Určte, ktoré zo zobrazení sú bijektívne.
- Zistite, či zobrazenie $f: R - \{0\} \rightarrow R - \{0\}$ definované predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$ je bijektívnym zobrazením.

6.4 Odporúčaná literatúra

- Haupt, D. (1984). Zobrazenia. In. **Množinový počet zrozumiteľne**. (pp. 82-91). Alfa Bratislava
- Jelínek, M. (1974). Inverzní funkce. In. **Relace a funkce 2**. (pp. 48-65). SPN Praha
- Vrábel, P. (2018). Karteziánsky súčin množín, relácie a zobrazenie. In. **Teória množín a teoretická aritmetika**. (pp. 30-36). FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 679, Nitra. ISBN: 978-80-558-1332-5
- Šedivý, J. (1969). Zobrazení. In. **O modernizaci školské matematiky**. (pp. 171-192). SPN Praha

7 Ekvivalentné množiny

Pojem bijektívneho zobrazenia použijeme aj na „porovnávanie veľkosti“/mohutnosti množín.

Definícia (ekvivalentné množiny)

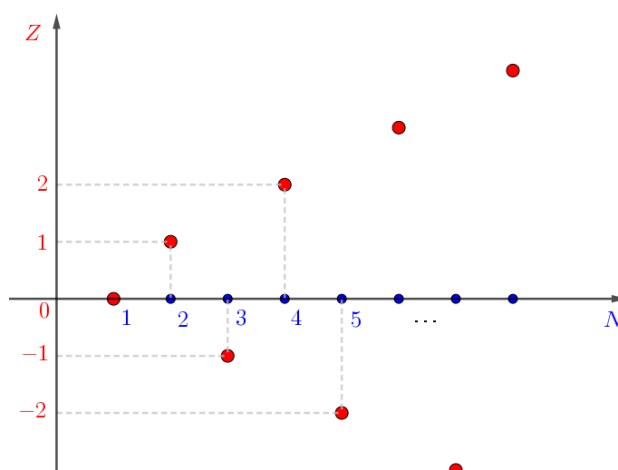
Nech A, B sú množiny. Ak existuje bijektívne zobrazenie $f: A \rightarrow B$, potom hovoríme, že množiny A, B sú **ekvivalentné**.

Zapisujeme: $A \sim B$.

- Niekedy hovoríme, že množina A je **ekvivalentná** s množinou B .
- Množiny A, B môžu byť s konečným počtom prvkov. Ak majú rovnaký počet prvkov, potom môže existovať medzi nimi bijektívne zobrazenie a povieme, že množiny sú ekvivalentné.
- Ak majú obe množiny A, B nekonečne mnoho prvkov a vieme určiť bijektívne zobrazenie medzi nimi, potom sú aj tieto množiny ekvivalentné. S pojmom „počet prvkov“ musíme pracovať opatrne, pretože nezodpovedá intuitívnej predstave, napr. ak uvažujeme o bijektívnom zobrazení $f: N \rightarrow Z$, ktoré priradzuje prirodzené čísla celým číslam podľa predpisu

$$f: n \rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{ak } n \text{ je párne číslo} \\ 1 - \frac{n}{2}, & \text{ak } n \text{ je nepárne číslo} \end{cases}$$

Vidíme, že $N \sim Z$ a súčasne $N \subset Z$.



V prípadoch **ekvivalentných množín** preto hovoríme, že množiny majú rovnakú **mohutnosť**.

- Ak máme množinu A , potom identické zobrazenie $I: A \rightarrow A$ je tiež bijektívnym zobrazením. Ekvivalencia množín je **reflexívna** vlastnosť. Zapišeme:

$$A \sim A.$$

- Zobrazenie f je bijektívne zobrazenie, preto aj inverzné zobrazenie $f^{-1}: B \rightarrow A$ je bijektívne zobrazenie a platí: množina B je ekvivalentná s množinou A . Ekvivalentnosť množín je teda **symetrická** vlastnosť. Zapišeme:

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A.$$

- Ak $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ sú obe bijektívne zobrazenia, potom zložené zobrazenie $g \circ f: A \rightarrow C$ je bijektívnym zobrazením. Ekvivalencia množín je **tranzitívna** vlastnosť. Zapišeme:

$$((A \sim B) \wedge (B \sim C)) \Rightarrow (A \sim C).$$

- Zámerne píšeme o reflexívnej, symetrickej a tranzitívnej **vlastnosti** a nie relácii medzi množinami. Ekvivalencia množín ako relácia by musela byť definovaná na množine všetkých množín, ktorej existencia vedie k sporu. Z toho plynie záver, že v prípade ekvivalencie množín nejde o reláciu ekvivalencie.

7.1 Konečné množiny a nekonečné množiny

Zatiaľ sme pracovali s intuitívnou predstavou o nekonečných množinách, napr. množina prirodzených čísel je nekonečná. Najprv definujeme pomocný pojem - nasýtený element.

Definícia (nasýtený element)

Nech $\mathcal{S}$ je systém množín, ktorý obsahuje množinu A . Hovoríme, že množina A je nasýtený element systému $\mathcal{S}$, ak v systéme $\mathcal{S}$ neexistuje taká množina B , ktorá by bola vlastnou nadmnožinou množiny A .

Uvedieme ilustračné príklady a kontrapríklady.

- Nech je daný systém množín $\mathcal{S} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{3\}\}$.
Množina $A_1 = \{1\}$ nie je nasýtený element, pretože v systéme $\mathcal{S}$ existuje množina $A_2 = \{1,2\}$, pre ktorú platí: $A_1 \subset A_2$.
Množina $A_2 = \{1,2\}$ je nasýtený element, pretože systém $\mathcal{S}$ už neobsahuje nadmnožinu množiny A_2 .
Množina $A_3 = \{3\}$ je tiež nasýteným elementom systému $\mathcal{S}$.
- V systéme množín $\mathcal{S}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}, \dots\}$ je každá množina nasýteným elementom systému.
- Systém množín $\mathcal{S}_n = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots, \{1,2, \dots, n\}, \dots\}$ je príkladom systému množín, ktorý nemá nasýtený element.

Definícia (ne / konečná množina - Tarski¹²)

Množinu M nazývame **konečnou**, ak každý neprázdny systém jej podmnožín má nasýtený element. Množina je **nekonečná**, ak nie je konečná.

- V definícii konečnej množiny sa uvádza, že **každý** neprázdny systém jej podmnožín má nasýtený element.
- Ak je množina M prázdna, potom má množina M **jediný** neprázdny systém jej podmnožín, ktorý obsahuje ako prvok – prázdnu množinu M . Tá je súčasne aj nasýtený element. **Prázdna množina** je teda **konečná** množina (v zmysle Tarskiho definície)
- Taktiež sa v definícii vyžaduje, aby systém jej podmnožín bol **neprázdny**. Ak by systém podmnožín neobsahoval podmnožiny množiny M , nemalo by zmysel uvažovať o nasýtenom elemente ako o nadmnožine.
- Z definície vyplýva, že množina M je **nekonečná**, ak existuje neprázdny systém jej podmnožín, ktorý **nemá** nasýtený element.

Napr. množina prirodzených čísel $N = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}$ je nekonečná, pretože existuje neprázdny systém $\mathcal{S}_n = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots, \{1,2, \dots, n\}, \dots\}$ jej podmnožín, ktorý nemá nasýtený element.

¹² Alfred Tarski (14.1.1901 – 26.10. 1983) - poľský matematik

O konečných množinách platia vety, ktoré uvádzame bez dôkazu.

Veta. Každá podmnožina konečnej množiny je konečnou množinou.

Veta. Ak množina A je konečná a $\{x_0\}$ jej jednoprvková množina, potom aj množina $A \cup \{x_0\}$ je konečnou množinou.

Veta. Ak množina A je konečná množina a $f: A \rightarrow B$ je surjektívne zobrazenie, potom množina B je konečnou množinou.

V literatúre možno nájsť aj inú definíciu nekonečnej podľa Dedekinda¹³.

Definícia (nekonečná množina - Dedekind)

Množina M sa nazýva **nekonečná množina**, ak je ekvivalentná s nejakou svojou vlastnou podmnožinou.

- Ak uvažujeme množiny $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ a $N_1 = \{2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$, potom zobrazenie

$f: N \rightarrow N_1$ definované tak, že $f(n) = n + 1$ je bijektívne zobrazenie.

Množiny N, N_1 sú ekvivalentné a súčasne $N_1 \subset N$. Z toho vyplýva, že množina N je nekonečná v zmysle Dedekindovej definície.

- Ukázali, že množina N je nekonečná aj podľa Tarskiho definície.

Dá sa dokázať, že obe definície nekonečných množín sú **rovnocenné**, t.j. ak je množina nekonečná podľa Tarskiho definície, potom je nekonečná podľa Dedekindovej definície a obrátene. V matematike rovnocenné definície nazývame (odborne) **ekvivalentnými definíciami**.

7.2 Kardinálne čísla

Kardinálne číslo je pojem, ktorý sa používa pre nekonečné množiny. Charakterizuje sa ním mnohosť prvkov množiny, pretože pojem „počet prvkov“ stráca zmysel (napr. bijektívne zobrazenia množiny N do Z zdôvodňuje, že množiny sú rovnako početné, hoci $N \subset Z$).

Kardinálne číslo sa zavádza pomocou axiómy o kardinálnych číslach.

Axióma (kardinálne číslo)

Ku každej množine A existuje práve jedna množina (neštandardne označovaná ako) $|A|$ taká, že pre ľubovoľné dve množiny A, B platí:

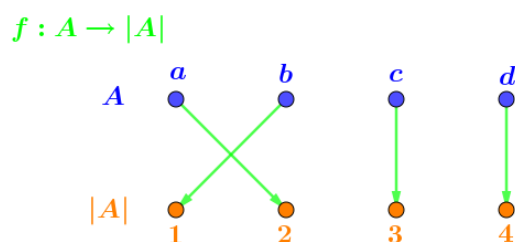
- a) množina A je ekvivalentná s množinou $|A|$.
- b) Ak množina A je ekvivalentná s množinou B , potom množiny $|A|, |B|$ sa rovnajú.

Množinu $|A|$ nazývame **kardinálne číslo** množiny A .

- Kardinálne číslo $|A|$ nazývame aj **mohutnosťou** množiny A .
- V prípade, že množina A je konečná a majúca n prvkov, môžeme položiť $|A| = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ a následne zostrojiť vhodné bijektívne zobrazenie $f: A \rightarrow |A|$.

Napr.: $A = \{a, b, c, d\}$ a $|A| = \{1, 2, 3, 4\}$, **bijektívne** zobrazenie $f: A \rightarrow |A|$ by mohlo byť (dané graficky):

¹³ Richard Dedekind (6.10.1831 – 12.2.1916) – nemecký matematik



- Druhá vlastnosť axiómy tvrdí, že v prípade dvoch ekvivalentných množín A, B sa ich kardinálne čísla rovnajú.
Opäť (pri zjednodušenej predstave), že sa jedná o konečné množiny s rovnakým počtom prvkov, dostaneme $|A| = \{1, 2, 3, \dots, n\} = |B|$. Upozorňujeme však, že 2. vlastnosť platí všeobecne, teda aj pre nekonečné množiny.
- **Prázdna množina** má kardinálne číslo 0.

Veta. Nech sú dané množiny A, B . Ak $|A| = |B|$, potom množiny A, B sú ekvivalentné.

Dôkaz. Ak množiny – kardinálne čísla $|A|, |B|$ sa rovnajú, potom identické zobrazenie $I: |A| \rightarrow |B|$ je bijektívne zobrazenie. Ďalej (podľa axiómy o kardinálnych číslach) ku množine A existuje bijektívne zobrazenie f , ktoré $f: A \rightarrow |A|$, pričom aj inverzné zobrazenie $f^{-1}: |A| \rightarrow A$ je bijektívne zobrazenie. Analogicky, existuje bijektívne zobrazenie $g^{-1}: |B| \rightarrow B$.

Zložené zobrazenie $g^{-1} \circ f = g^{-1} \circ I \circ f$ zobrazuje (postupne) množinu A do $|A|$, následne $|A|$ do $|B|$ a nakoniec $|B|$ do B . Zložený bijektívnych zobrazení je bijektívne zobrazenie, preto aj množiny A, B sú ekvivalentné. ■

Veta. Pre ľubovoľnú množinu A platí, že kardinálne číslo z kardinálneho čísla množiny A sa rovná kardinálnemu číslu množiny A .

Dôkaz. Podľa axiómy o kardinálnych číslach platí, že k ľubovoľnej množine existuje množina, ktorú nazývame kardinálne číslo a označujeme pomocou $| \cdot |$.

Z toho vyplýva, že aj k množine $|A|$ existuje jej kardinálne číslo, ktoré označíme $| |A| |$, a súčasne, množiny $|A|, | |A| |$ sú ekvivalentné. Podľa axiómy, ak sú množiny ekvivalentné, ich kardinálne čísla sa rovnajú, t.j. $|A| = | |A| |$. ■

Definícia (súčet kardinálnych čísel)

Nech A, B sú disjunktné množiny, ktorých kardinálne čísla sú označené $a = |A|, b = |B|$. **Súčtom kardinálnych čísel a, b nazývame kardinálne číslo množiny $A \cup B$.**

Zapisujeme: $|A \cup B| = a + b$

- Podmienka, aby množiny A, B boli disjunktné, t.j. $A \cap B = \emptyset$, je **dôležitá**.
Napri.: ak $A = \{x, y\}, B = \{m, n, p\}$, potom $|A| = a = 2, |B| = b = 3$. Pre zjednotenie $A \cup B$ platí: $A \cup B = \{x, y, m, n, p\}$, t.j. $|A \cup B| = a + b = 2 + 3 = 5$, pretože $A \cap B = \emptyset$. Ak by sme uvažovali o množinách C, D , ktoré nie sú disjunktné, napri.: $M = \{x, y, z\}, P = \{z, q, r, t\}$, potom $|M| = m = 3, |P| = p = 4$ a $M \cup P = \{x, y, z, q, r, t\}$, kde $|M \cup P| = 6 \neq m + p$.
- Definícia je korektná aj v prípade, ak konečná množina $A \neq \emptyset$ a $B = \emptyset$, pretože $A \cap \emptyset = \emptyset$. Navyše platí: $|A \cup \emptyset| = |A|$. Z toho vyplýva tiež $|\emptyset| = 0$.

Definícia (súčin kardinálnych čísel)

Nech A, B sú množiny, ktorých kardinálne čísla sú označené $a = |A|, b = |B|$. Súčinom kardinálnych čísel a, b nazývame kardinálne číslo množiny $A \times B$.

Zapisujeme: $|A \times B| = a \cdot b$

- Z definície kardinálneho súčinu $A \times B$ vyplýva, že $A \neq \emptyset \neq B$.
- Kardinálne číslo $|A \times B|$ je množina ekvivalentná s množinou usporiadaných dvojíc $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$. Ak A, B sú konečné množiny a $|A| = a, |B| = b$, potom je týchto dvojíc práve $a \cdot b$.

Definícia (mocnina kardinálneho čísla)

Nech A, B sú množiny, ktorých kardinálne čísla sú označené $a = |A|, b = |B|$. Mocninou kardinálneho čísla nazývame kardinálne číslo množiny M všetkých zobrazení $f: B \rightarrow A$.

Zapisujeme: $M = \{f, f: B \rightarrow A\}, |M| = a^b$.

- Z definície mocniny kardinálneho čísla vyplýva, že ide o množinu zobrazení. Odporúčame čitateľovi opätovne pozrieť riešené príklady v kapitole Zobrazenia.

Zavedieme pomocný pojem **charakteristickej funkcie** χ_A množiny A .

Definícia (charakteristická funkcia)

Nech M je ľubovoľná množina a $\mathcal{P}(M)$ je potenčná množina (množina všetkých podmnožín množiny M). Charakteristickou funkciou χ_A podmnožiny A potenčnej množiny $\mathcal{P}(M)$ nazveme zobrazenie $\chi_A: M \rightarrow \{0, 1\}$,

ktorá priradzuje prvky $m \in M$ prvkom množiny $\{0, 1\}$ podľa predpisu:

$$\chi_A(m) = \begin{cases} 1, & \text{ak } m \in A \\ 0, & \text{ak } m \in M - A \end{cases}$$

- Vidíme, že charakteristická funkcia priradzuje prvkom m množiny M ako vzorom obrazy – „1“ alebo „0“, podľa toho, či daný prvok m patril alebo nepatril do vybranej¹⁴ množiny A .
- Každéj podmnožine A potenčnej množiny $\mathcal{P}(M)$ sa tým priradí zobrazenie χ_A . Ukážeme na konkrétnom príklade.

Príklad

Nájdite všetky charakteristické funkcie χ_A , ak $M = \{a, b, c\}$.

Riešenie. Najprv vytvoríme všetky podmnožiny potenčnej množiny $\mathcal{P}(M)$ a následne každej z nich určíme jej charakteristickú funkciu.

Potenčná množina $\mathcal{P}(M)$ obsahuje podmnožiny:

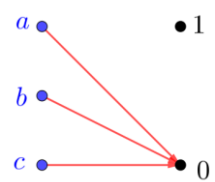
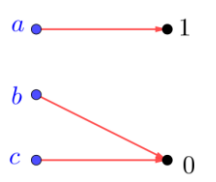
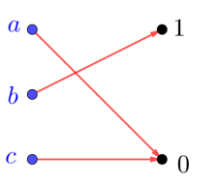
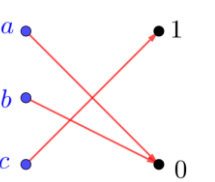
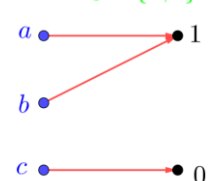
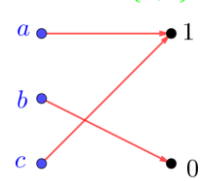
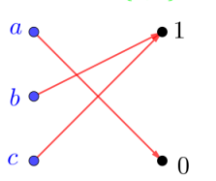
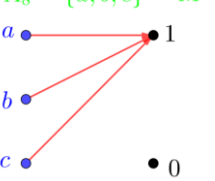
$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Použijeme označenie:

$$A_1 = \emptyset, A_2 = \{a\}, A_3 = \{b\}, A_4 = \{c\}, A_5 = \{a, b\}, A_6 = \{a, c\}, A_7 = \{b, c\} \text{ a } A_8 = \{a, b, c\} = M$$

Jednotlivé charakteristické funkcie znázorníme graficky.

¹⁴ Na priblíženie je tu analógia z bežného života: Firma M má pracovnú skupinu (množinu) A zamestnancov, ktorí pracujú na dôležitej zákazke. Po splnení zákazky majiteľ rozdelí všetkých zamestnancov do dvoch množín – množiny A a množiny $M - A$. Každému zamestnancovi firmy priradí jednu z hodnôt - priradenie „1“ znamená „dostane odmenu, lebo pracoval v skupine A “, priradenie „0“ znamená „bez odmeny, lebo nebol v skupine A “.

$M \xrightarrow{\chi_{A_1}} \{0,1\}$ $A_1 = \emptyset$  Prvky „a, b, c“ nepatria prázdné množine A_1 , majú priradený prvok „0“.	$M \xrightarrow{\chi_{A_2}} \{0,1\}$ $A_2 = \{a\}$  Prvok „a“ patrí množine A_2 , má priradený prvok „1“; ostatné prvky „b, c“ majú priradený prvok „0“.	$M \xrightarrow{\chi_{A_3}} \{0,1\}$ $A_3 = \{b\}$  Prvok „b“ patrí množine A_3 , má priradený prvok „1“; ostatné prvky „a, c“ majú priradený prvok „0“.	$M \xrightarrow{\chi_{A_4}} \{0,1\}$ $A_4 = \{c\}$  Prvok „c“ patrí množine A_4 , má priradený prvok „1“; ostatné prvky „a, b“ majú priradený prvok „0“.
$M \xrightarrow{\chi_{A_5}} \{0,1\}$ $A_5 = \{a, b\}$  Prvky „a, b“ patria množine A_5 , majú priradený prvok „1“; prvok „c“ má priradený prvok „0“.	$M \xrightarrow{\chi_{A_6}} \{0,1\}$ $A_6 = \{a, c\}$  Prvky „a, c“ patria množine A_6 , majú priradený prvok „1“; prvok „b“ má priradený prvok „0“.	$M \xrightarrow{\chi_{A_7}} \{0,1\}$ $A_7 = \{b, c\}$  Prvky „b, c“ patria množine A_7 , majú priradený prvok „1“; prvok „a“ má priradený prvok „0“.	$M \xrightarrow{\chi_{A_8}} \{0,1\}$ $A_8 = \{a, b, c\} = M$  Prvky „a, b, c“ patria množine A_8 , majú priradený prvok „1“.

Množina M_χ všetkých charakteristických funkcií množiny M má prvky:

$$M_\chi = \{\chi_{A_1}, \chi_{A_2}, \chi_{A_3}, \chi_{A_4}, \chi_{A_5}, \chi_{A_6}, \chi_{A_7}, \chi_{A_8}\}.$$

Na príklade vidíme, že každá podmnožina A množiny M indukuje charakteristickú funkciu χ_A . Môžeme definovať zobrazenie

$$F: \mathcal{P}(M) \rightarrow M_\chi$$

tak, že

$$F(A) = \chi_A,$$

kde $A \subseteq \mathcal{P}(M)$. Platí nasledujúca veta.

Veta. Zobrazenie

$$F: \mathcal{P}(M) \rightarrow M_\chi,$$

kde $\mathcal{P}(M)$ je potenčná množina množiny M a M_χ je množina charakteristických funkcií χ_A pre každú podmnožinu $A \subseteq \mathcal{P}(M)$, je bijektívne zobrazenie.

Dôkaz. Ukážeme, že zobrazenie F je injektívne a súčasne surjektívne zobrazenie.

- a) Najprv dokážeme, že zobrazenie F je **injektívne** zobrazenie, t.j. $F(A_1) \neq F(A_2)$.

Uvažujme dve podmnožiny A_1, A_2 množiny M , ktoré sa nerovnajú, t.j. $A_1 \neq A_2$. Teda existuje aspoň jeden prvok $m_0 \in M$, ktorý patrí len do jednej z množín A_1, A_2 . Bez ujmy na všeobecnosti nech $m_0 \in A_1$.

Charakteristické funkcie χ_{A_1}, χ_{A_2} priradujú prvkom množiny M hodnoty 1 alebo 0 podľa toho, či uvažovaný prvok patril alebo nepatril príslušnej množine A_1, A_2 . Pre prvok „ m_0 “ to znamená:

$$\chi_{A_1}(m_0) = 1$$

$$\chi_{A_2}(m_0) = 0.$$

Charakteristické funkcie χ_{A_1}, χ_{A_2} sa ako zobrazenia nerovnajú, preto

$$F(A_1) = \chi_{A_1} \neq \chi_{A_2} = F(A_2).$$

- b) Teraz dokážeme, že je to **surjektívne** zobrazenie.

Každá charakteristická funkcia χ_A má obor hodnôt $H(\chi_A) = \{0,1\}$. Ak vezmeme hodnotu „1“, tak túto nadobúdajú niektoré prvky množiny M . Tieto prvky určujú podmnožinu A množiny M . Každý obraz – charakteristická funkcia χ_A má ako vzor množinu A a zobrazenie F je surjektívne. ■

Z dokázanej vety vyplýva, že množiny $\mathcal{P}(M)$ a M_χ sú ekvivalentné, teda majú **rovnakú mohutnosť** a pre ich kardinálne čísla platí:

$$|\mathcal{P}(M)| = |M_\chi|$$

Ak použijeme definíciu **mocniny kardinálneho čísla**, potom odvodíme:

$$|\mathcal{P}(M)| = |M_\chi| = |\{0,1\}^{|M|}| = 2^{|M|}.$$

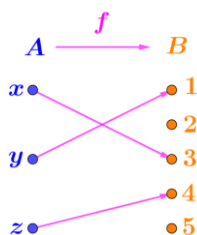
- Potenčná množina $\mathcal{P}(M)$ má mohutnosť vyjadrenú kardinálnym číslom $2^{|M|}$ bez ohľadu na to, či M je konečná alebo nekonečná množina.¹⁵

Definícia (porovnávanie kardinálnych čísel)

Nech A, B sú množiny, ktorých kardinálne čísla sú označené $a = |A|, b = |B|$. Hovoríme, že kardinálne číslo a je **menšie alebo sa rovná** kardinálnemu číslu b , ak existuje **injektívne** zobrazenie $f: A \rightarrow B$.

Zapisujeme: $a \leq b$

- Ak $a \leq b$ a súčasne sa kardinálne čísla a, b nerovnajú, t.j. $a \neq b$, potom hovoríme, že kardinálne číslo a je **menšie** ako kardinálne číslo b a zapisujeme $a < b$. Napr.: ak $A = \{x, y, z\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a injektívne zobrazenie $f: A \rightarrow B$ je dané graficky, kde $|A| = 3 < 5 = |B|$:



Pre porovnávanie kardinálnych čísel platia zaujímavé vety, ktoré uvedieme bez dôkazov¹⁶.

Veta (Cantor – Bernstein)

Ak A, B sú množiny a existujú injektívne zobrazenia $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow A$, potom existuje bijektívne zobrazenie $h: A \rightarrow B$.

- Ak prepíšeme vetu podľa definície, potom pri označení $a = |A|, b = |B|$ dostaneme:

$$(a \leq b \text{ a súčasne } b \leq a) \Rightarrow (a = b)$$

- Ak množinu kardinálnych čísel označíme K , potom podmnožina $D = \{[a, b] \in K \times K, a \leq b\}$ karteziánskeho súčinu $K \times K$ je relácia – **čiasťočné usporiadanie**.¹⁷

a) relácia je antisymetrická podľa Cantorovej- Bernsteinovej vety,

¹⁵ Vzorec na počet prvkov potenčnej množiny $\mathcal{P}(M)$, kde M bola konečná množina, sme odvodili pomocou kombinačných čísel a binomickej vety. V prípade nekonečnej množiny M by bol analogický prístup nepoužiteľný.

¹⁶ Vyžaduje sa znalosť tvrdení (axióm a viet), ktoré sme v tomto texte neuvádzali. Čitateľa, ktorého zaujala táto problematika, odkazujeme na odporúčanú literatúru.

¹⁷ Pripomíname, že reláciu sme nazvali čiasťočným usporiadaním, ak bola antisymetrická a súčasne tranzitívna.

- b) relácia je tranzitívna ($\forall a, b, c \in K: (a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$), pretože zložením dvoch injektívnych zobrazení je opäť injektívne zobrazenie.¹⁸

Veta (Cantor)

Pre každé kardinálne číslo a platí: $a < 2^a$.

- veta tvrdí, že každá množina A má menšiu mohutnosť ako jej potenčná množina $\mathcal{P}(A)$,
- ak a je ľubovoľné kardinálne číslo, potom sa dá dokázať, že v množine K existuje kardinálne číslo z také, že $a < z$,
- neexistuje množina, ktorá by obsahovala všetky kardinálne čísla.

7.3 Spočítateľné množiny

Pojem spočítateľnej množiny zavedieme definíciou.

Definícia (spočítateľná množina)

Množina A sa nazýva **spočítateľná množina**, ak je konečná alebo ekvivalentná s množinou prirodzených čísel N .

- Z definície vyplýva, že každá konečná množina je spočítateľná.
- Samotná množina N je spočítateľná, pretože ako bijektívne zobrazenie stačí vziať identické zobrazenie f , t.j. dané predpisom $f(n) = n$.
- Nekonečná množina A je spočítateľná, ak existuje bijektívne zobrazenie $f: A \rightarrow N$.

Napr.: ak $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, potom zobrazenie je definované predpisom $f(n) = \frac{n}{2}$. Ide o zobrazenie, ktoré je injektívne a súčasne surjektívne. Množiny A, N sú ekvivalentné (zapísali by sme $A \sim N$) a množina A párnych prirodzených čísel je spočítateľná množina.

- Bijektívne zobrazenie $f: N \rightarrow Z$ definované predpisom

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{ak } n \text{ je párne} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \end{cases}$$

opravňuje k záveru, že množina celých čísel Z je spočítateľná množina.

- Príkladom **spočítateľnej množiny** je aj **množina členov ľubovoľnej postupnosti** (konečnej $\{a_n\}_{n=1}^k$, kde $k \in N$ alebo nekonečnej $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Dôkaz je trochu zložitejší a nebudeme ho uvádzať. Len poznamenáme, že myšlienka dôkazu je založená na definícii postupnosti a zobrazenia $f: N \rightarrow A_n$, kde A_n je množina členov postupnosti (v množine sú vynechané prvky, ktoré sa v danej postupnosti opakujú).

- Ak množina A je **spočítateľná** a súčasne je **ekvivalentná s množinou B** , potom aj množina B je **spočítateľná**. Platnosť tohto tvrdenia vyplýva z tranzitívnej vlastnosti ekvivalencie množín.

¹⁸ Dokázali sme vetu, že zložením dvoch bijektívnych zobrazení je opäť bijektívne zobrazenie. Bijektívne zobrazenie je aj injektívnym zobrazením, preto tvrdenie o zložení dvoch injektívnych zobrazení triviálne platí.

Pre spočítateľné množiny platia vety:

Veta

Každá podmnožina spočítateľnej množiny je spočítateľná množina.

Dôkaz. Ak množina A je spočítateľná a B je jej podmnožina, môžu nastať dve možnosti:

- Množina B je konečná. Podľa definície je teda spočítateľná.
- Množina B je nekonečná. Z toho vyplýva, že aj množina A bola nekonečná. Keďže podľa predpokladu je množina A spočítateľná, môžeme jej prvky zoradiť do prostej postupnosti (členy postupnosti sa neopakujú), napr. $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Z týchto členov vyberieme tie, ktoré patria do množiny B .

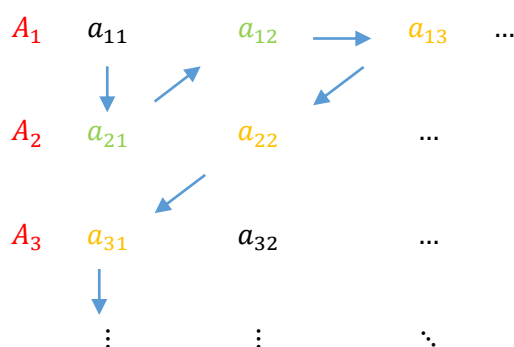
Ďalej preznačíme/prepíšeme indexy od $1, 2, 3, \dots$, ale nebudeme zamieňať poradie členov postupností (ak bol člen $a_m = b_s$ pred členom $a_k = b_h$, potom člen b_s bude pred členom b_h).

Tým sme vytvorili postupnosť $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ a množina B je spočítateľná.¹⁹ ■

Veta

Zjednotenie konečného počtu spočítateľných množín alebo spočítateľne mnoho spočítateľných množín $A_1, A_2, A_3, \dots$ je spočítateľná množina.

Dôkaz. a) Uvažujme najprv, že každá z množín $A_i, i = 1, 2, 3, \dots$ je nekonečná a spočítateľná množina. Zoradíme ich prvky do „nekonečnej matice“ a zoradíme ich podľa naznačenej schémy (Cantorova metóda diagonály):



kde v i –tom riadku sú uvedené prvky množiny $A_i, i = 1, 2, 3, \dots$. Prvky indexujeme dvomi indexami, prvý zodpovedá indexu množiny, druhý zvolenému poradiu, v akom ich zapisujeme.

Ďalej všetky prvky $a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$ usporiadame (podľa naznačených šípok) do postupnosti:

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots$$

Postupnosť obsahuje všetky prvky zjednotenia (zapišeme $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$) množín $A_i, i = 1, 2, 3, \dots$, čo znamená, že zjednotenie $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je spočítateľná množina.

b) Nech niektorá z množín $A_i, i = 1, 2, 3, \dots$ je konečná. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to množina A_1 .

Zjednotením $A_1 \cup N = B_1$ dostaneme nekonečnú množinu, ktorá je spočítateľná (jej prvky vieme zoradiť do postupnosti, v ktorej najprv uvedieme prvky množiny A_1 a nasledovať budú prvky množiny N). Ďalej postupujeme podľa bodu a) s tým, že na miesto množiny A_1 budeme pracovať s množinou B_1 .

¹⁹ Exaktný dôkaz sa urobí matematickou indukciou.

c) Ak by bolo viac konečných množín $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, k, k > 1$, postupujeme matematickou indukciou a to analogicky k bodu b).

d) Poznámka. Ak by išlo o konečný počet množín $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, k$, kde $k \in \mathbb{N}$, zjednotenie $\bigcup_{i=1}^k A_i$ je taktiež spočítateľná množina. ■

Príklad

Ukážte, že množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je spočítateľná množina.

Riešenie. Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je zjednotením množín:

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \\ A &= \{-1, -2, -3, \dots, -n, \dots\} \\ B &= \{0\} \end{aligned}$$

Množiny N, B sú spočítateľné na základe definície. Množina A je tiež spočítateľná, pretože existuje bijektívne zobrazenie $f: N \rightarrow A$ dané predpisom $f(n) = -n$.

Podľa predchádzajúcej vety je zjednotenie spočítateľných množín opäť spočítateľná množina.

Veta

Ak A, B sú spočítateľné množiny, potom karteziánsky súčin $A \times B$ je spočítateľná množina.

Dôkaz. a) Nech množiny A, B sú **konečné**²⁰ (kde $A \neq \emptyset$ a súčasne $B \neq \emptyset$). Karteziánsky súčin $A \times B$ je taktiež konečná množina a podľa definície je každá konečná množina spočítateľná.

b) Nech množina A je **nekonečná** a spočítateľná, množina B je **konečná** (majúca n prvkov). Ak vezmeme ľubovoľný prvok $b_1 \in B$, potom $A_1 = A \times \{b_1\}$ je spočítateľná množina.

Dôvod: množina A_1 usporiadaných dvojíc $[a, b_1]$, kde a je ľubovoľný prvok z množiny A , je ekvivalentná s množinou A . Bijektívne zobrazenie $f: A_1 \rightarrow A$ by sme definovali predpisom:

$$f([a, b_1]) = a, \text{ pre } \forall a \in A.$$

Vytvoríme teda systém množín $A_j = A \times \{b_j\}, j = 1, 2, \dots, n$, pre $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Každá z množín A_j , kde $j = 1, 2, 3, \dots, n$ je spočítateľná a podľa predchádzajúcej vety ich zjednotenie $\bigcup_{j=1}^n A_j$ je spočítateľná množina.

c) Ak sú obe množiny A, B **nekonečné a spočítateľné**, dôkaz sa vykoná pomocou **matematickej indukcie** (podľa prvkov množiny B).

c1) Nech množiny $A_1 = A \times \{b_1\}, A_2 = A \times \{b_2\}$ sú spočítateľné, kde $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$. Množina $A \times \{b_1, b_2\} = A_1 \cup A_2$ je spočítateľná podľa bodu b).

c2) Predpokladajme, že karteziánsky súčin $A \times \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ je spočítateľná množina. Ukážeme, že aj $A \times \{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\}$ je spočítateľná.

Pre karteziánsky súčin $A \times \{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\}$ platí:

$$A \times \{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\} = A \times \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \cup A \times \{b_{n+1}\}.$$

Podľa bodu b) a predchádzajúcej vety ide o spočítateľnú množinu. ■

²⁰ Karteziánsky súčin množín A, B sme definovali pre neprázdne množiny. Ak by $A = \emptyset$, potom množina usporiadaných dvojíc $[x, y]$, kde $x \in \emptyset$ a $y \in B$ je prázdna množina. Formálne $A \times B = \emptyset \times B = \emptyset$ a máme spočítateľnú množinu.

Príklad

Ukážte, že množina racionálnych čísel Q je spočítateľná množina.

Riešenie. Množina racionálnych čísel Q je podmnožinou množiny $\{[m, n] \in Z \times N, m \in Z, n \in N\}$.

Množiny Z a N sú spočítateľné. Podľa predchádzajúcej vety aj ich karteziánsky súčin $Z \times N$ je spočítateľná množina.

Naviac, každá podmnožina spočítateľnej množiny je spočítateľná, preto aj množina racionálnych čísel je spočítateľná.

Predchádzajúcu vetu možno zovšeobecniť. Dokazovať ju nebudeme.

Veta

Ak $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ sú spočítateľné množiny, potom karteziánsky súčin $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ je spočítateľná množina.

Podľa axiómy o kardinálnych číslach možno každej množine priradiť kardinálne číslo. Vzhľadom k tomu, že ľubovoľné dve nekonečne spočítateľné množiny sú ekvivalentné, majú nekonečné spočítateľné množiny priradené jedno kardinálne číslo.

Kardinálne číslo spočítateľnej množiny nazývame „alef nula“ a označujeme²¹ $|N| = \aleph_0$.

Dá sa taktiež dokázať tvrdenie, že:

množina je nekonečná (podľa Tarskiho alebo Dedekinda) práve vtedy, keď **obsahuje spočítateľnú podmnožinu**.

Z toho vyplýva, že „alef nula“ je (podľa relácie usporiadania kardinálnych čísel) **najmenšie kardinálne číslo nekonečnej množiny**.

7.4 Nespočítateľné množiny

Pojem „nespočítateľná množina“ zavedieme definíciou.

Definícia (nespočítateľná množina)

Množina A sa nazýva **nespočítateľná množina**, ak nie je spočítateľná.

- Príkladom nespočítateľnej množiny je potenčná množina $\mathcal{P}(N)$ množiny prirodzených čísel. Podľa Cantorovej vety platí, že $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Z toho vyplýva, že potenčná množina $\mathcal{P}(N)$ s kardinálnym číslom $2^{\aleph_0}$ nemôže byť spočítateľná.
- Ukážeme, že aj polouzavretý interval $(0, 1) \subseteq R$ je **nespočítateľná** množina.

Najprv urobíme pomocné úvahy:

- a) Každé reálne číslo z intervalu $(0, 1)$ vieme zapísať v tvare konečného alebo nekonečného desatinného rozvoja.
- b) Nekonečný desatinný rozvoj môže byť periodický, napr.: číslo $0,23\bar{6} = 0,2366666 \dots$ alebo neperiodický, napr.: číslo $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70710678 \dots$

²¹ V niektorej odbornej literatúre používajú znak $\aleph_0$

- c) Reálne číslo z intervalu $(0, 1)$, ktoré je konečné, môžeme zapísať pomocou nekonečného periodického rozvoja²² s periódou 9, napr.: $0,5 = 0,4\overline{9}$ alebo $1 = 0,\overline{9}$.
- d) Z bodov a), b) a c) vyplýva, že každé reálne číslo $x \in (0, 1)$ môžeme zapísať v tvare nekonečného desatinného rozvoja:

$$x = 0, c_1 c_2 c_3 \dots c_n \dots,$$

kde $c_j, j = 1, 2, 3, \dots$ je číslica z množiny znakov $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Uvažujme **nepriamo**. Nech množina reálnych čísel $x \in (0, 1)$ je **spočítateľná**. Všetky jej prvky sa dajú zoradiť do postupnosti desatinných reálnych čísel $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ a každému desatinnému číslu x_j je priradené jedno prirodzené číslo (ako jeho poradové číslo).

$$1 \leftrightarrow x_1 = 0, c_{11} c_{12} c_{13} \dots$$

$$2 \leftrightarrow x_2 = 0, c_{21} c_{22} c_{23} \dots$$

$$3 \leftrightarrow x_3 = 0, c_{31} c_{32} c_{33} \dots$$

$\vdots$

kde $c_{ij}, i, j = 1, 2, 3, \dots$ sú opäť číslice z množiny znakov $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Teraz špeciálne skonštruujeme reálne číslo $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$.

Vylúčime možnosti, aby nastali prípady:

$$c_{11} = b_1 \text{ pre } b_1 \neq 0$$

$$c_{22} = b_2 \text{ pre } b_2 \neq 0$$

$$c_{33} = b_3 \text{ pre } b_3 \neq 0$$

$\vdots$

Reálne číslo b sa **nenachádza** v postupnosti $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, pretože je rôzne od každého člena tejto postupnosti a to z nasledovných dôvodov:

$$b \neq x_1, \text{ lebo } b_1 \neq c_{11} \text{ (nemá rovnakú číslicu na mieste desatín)}$$

$$b \neq x_2, \text{ lebo } b_2 \neq c_{22} \text{ (nemá rovnakú číslicu na mieste stotín)}$$

$\vdots$

Postupnosť $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ podľa (nepriameho) predpokladu má obsahovať všetky reálne čísla z intervalu $(0, 1)$ a máme spor. **Predpoklad**, že „Množina reálnych čísel intervalu $(0, 1)$ je spočítateľná množina,“ je **nesprávny** a platí:

množina reálnych čísel intervalu $(0, 1)$ je **nespočítateľná**.

Veta

Množina všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$ je nespočítateľná množina.

Dôkaz. Množina $\mathbb{R}$ obsahuje nespočítateľnú podmnožinu – interval $(0, 1)$, preto nemôže byť spočítateľná. ■

²² Dokazuje sa pomocou vzorca pre súčet nekonečného geometrického radu s kvocientom $|q| < 1$.

Medzi priamkou a množinou reálnych čísel R existuje bijektívne zobrazenie (os x). Z toho dôvodu sa množina všetkých reálnych čísel R nazýva aj **kontinuum**.

Definícia (kardinálne číslo kontinua)

Kardinálne číslo množiny všetkých reálnych čísel R nazývame mohutnosťou kontinua a označujeme c .

- Pre množinu všetkých reálnych čísel R platí: $R = Q \cup I$, kde I je množina všetkých iracionálnych čísel. Množina iracionálnych čísel I je tiež nespočítateľná.

Nepriamo.

Ak množina I je spočítateľná, potom zjednotenie $Q \cup I$ so spočítateľnou množinou Q je taktiež spočítateľná množina a máme **spor**. Množina $Q \cup I$ sa rovná množine R , ktorá je nespočítateľná. Predpoklad „Množina iracionálnych čísel I je spočítateľná“ je nesprávny a platí: Množina iracionálnych čísel I je nespočítateľná.

Kardinálne číslo množiny I sa rovná c .

Veta

Pre kardinálne číslo spočítateľnej množiny a kardinálne číslo kontinua nespočítateľnej množiny platí:

$$2^{\aleph_0} = c.$$

Dôkaz vety neuvádzame. Čitateľ ho nájde v Vráble, P. (2018). Teória množín a teoretická aritmetika, FPV UKF v Nitre, ISBN: 978-80-558-1332-5, str. 69.

7.5 Poznámka k algebrickým a transcendentným číslam

Algebrické číslo je pojem, ktorý sa vzťahuje k polynómu a ich koreňom.

- Polynóm $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, kde $a_j \in \mathbb{Z}, j = 0, 1, 2, \dots, n$ je polynóm (premennej x) s celočíselnými koeficientmi stupňa n .
- Ak pre reálne číslo x_0 platí:
$$P(x_0) = a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x_0 + a_0 = 0,$$
potom číslo x_0 nazývame **koreňom** polynómu $P_n(x)$.

Definícia (algebrické číslo)

Reálne číslo x_0 nazveme **algebrickým číslom**, ak je koreňom polynómu s celočíselnými koeficientmi aspoň prvého stupňa.

- algebrické číslo je napr.: $x_0 = 3$, pretože existuje polynóm $P_1(x) = 3x - 9$, ktorého je koreňom.

Algebrické číslo je aj iracionálne číslo v tvare $\sqrt[n]{k}$, kde $k, n \in \mathbb{N}$, napr.: $x_0 = \sqrt{2}$, pretože existuje polynóm $P_2(x) = 5 \cdot x^2 - 10$, pre ktorý platí: $P_2(\sqrt{2}) = 5 \cdot (\sqrt{2})^2 - 10 = 0$.

- Reálne číslo x_0 je koreňom polynómu aspoň prvého stupňa s **racionálnymi koeficientmi** vtedy a len vtedy, keď je algebrickým číslom.

Uvažujme! Ak je x_0 je koreňom

$$P(x_0) = \frac{p_n}{q_n} \cdot x_0^n + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \cdot x_0^{n-1} + \dots + \frac{p_1}{q_1} \cdot x_0 + \frac{p_0}{q_0} = 0,$$

potom **rovniciu** vynásobíme najmenším spoločným násobkom čísel $q_n, q_{n-1}, \dots, q_1$ a q_0 , čím dostaneme rovnicu s celočíselnými koeficientmi a v anulovanom tvare. Číslo x_0 je koreňom polynómu s celočíselnými koeficientmi a teda aj algebrickým číslom.

Obrátene: Ak je reálne číslo x_0 algebrické číslo, je koreňom polynómu s celočíselnými koeficientmi, ktoré sú súčasne aj racionálnymi koeficientmi.

- Číslo, ktoré nie je algebrické sa nazýva **transcendentné číslo**.

Dá sa dokázať (zložito), že Eulerovo číslo $e \approx 2,72$ (alebo aj Ludolfovo číslo $\pi \approx 3,14$) je transcendentné číslo. Množina transcendentných čísel je nekonečná.

Pre algebrické čísla platí veta, ktorú uvedieme bez dôkazu.

Veta

Množina všetkých algebrických čísel je spočítateľná množina.

- Číslo, ktoré nie je algebrické sa nazýva **transcendentné číslo**.

Dá sa dokázať (zložito), že Eulerovo číslo $e \approx 2,72$ (alebo aj Ludolfovo číslo $\pi \approx 3,14$) je transcendentné číslo. Dá sa dokázať, že množina všetkých transcendentných čísel je **nespočítateľná**.

7.6 Cvičenie

- Nájdite nasýtený element systému množín $\mathcal{S} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{4\}, \{0\}, \{4,0\}, \{5\}\}$.
- Zostrojte systém podmnožín množiny $A = \{a, b, c, d\}$, ktorý:
 - má 3 prvky a každý z nich je nasýtený element,
 - má 4 prvky a jeden nasýtený element.
- Ukážte, že množina všetkých prirodzených čísel je nekonečná.
- Zdôvodnite, že karteziánsky súčin $Z \times Q$, je spočítateľná množina, ak Z je množina všetkých celých čísel a Q je množina všetkých racionálnych čísel.
- Množina $A = \{x \in R: \exists k \in N, \exists n \in N, x = \sqrt[k]{n}\}$. Dokážte, že množina A je spočítateľná.
- Ukážte, že množina $(0,1) \times (0,1)$ je nespočítateľná (množina $(0,1)$ je otvorený interval).
- Ukážte, že množina všetkých iracionálnych čísel je nespočítateľná.

7.7 Odporúčaná literatúra

Vrábel, P. (2018). Konečné a nekonečné množiny. Množina prirodzených čísel. In. **Teória množín a teoretická aritmetika**. (pp. 50-56). FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 679, Nitra. ISBN: 978-80-558-1332-5

Vrábel, P. (2018). Ekvivalentné množiny, kardinálne čísla a operácie s kardinálnymi číslami. In. **Teória množín a teoretická aritmetika**. (pp. 40-47). FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 679, Nitra. ISBN: 978-80-558-1332-5

Vrábel, P. (2018). Spočítateľné a nespočítateľné množiny. In. **Teória množín a teoretická aritmetika**. (pp. 59-70). FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 679, Nitra. ISBN: 978-80-558-1332-5

Haupt, D. (1984). Konečné a nekonečné množiny. In. **Množinový počet zrozumiteľne**. (pp. 96-97). Alfa Bratislava

Haupt, D. (1984). Kardinálne čísla. In. **Množinový počet zrozumiteľne**. (pp. 113-116). Alfa Bratislava

Haupt, D. (1984). Spočítateľné a nespočítateľné množiny. In. **Množinový počet zrozumiteľne**. (pp. 98-112). Alfa Bratislava

Šalát, T., Smítal, J. (1986). Množiny konečné a množiny nekonečné, množiny spočítateľné a množiny nespočítateľné. In. **Teória množín**. (pp. 75 – 101). Alfa Bratislava.

8 Poznámka k axióme výberu

Teória množín je matematická disciplína, ktoré je založená na axiómach.

Axiómy sú základné tvrdenia, ktoré sa považujú za pravdivé a nedokazujú sa. Z nich sa logickými úvahami odvodzujú ďalšie tvrdenia (definície, vety a ich dôsledky), čím sa rozvíja daná teória.

Podľa toho, ako je vystavaný axiomatický systém, získavajú sa nové poznatky a súčasne s nimi sa postupne objavujú nové hypotézy. Niektoré z nich „odolávajú času“ a úsiliu matematikov o ich dôkaz alebo zamietnutie, pretože sa to v rámci existujúceho axiomatického systému nie je možné.

Ak sa ukáže, že problematická hypotéza je v rámci teórie zameniteľná (ekvivalentná) s nejakou už známou a dokázanou vetou, je pravdepodobné, že ide o tvrdenie, bez ktorého sa teória nezaobíde a malo by byť (do existujúceho axiomatického) systému pridané ako ďalšia axióma.

V teórii množín je takýmto problematickým tvrdením axióma výberu.

Axióma (axióma výberu)

Nech $\mathcal{S}$ je systém neprázdnych a navzájom disjunktných množín. Potom existuje taká množina V , že pre každú množinu A zo systému $\mathcal{S}$ platí, že množina $A \cap V$ je jednoprvková.

Formálny zápis:

$$\forall \mathcal{S} \left\{ \left[(\forall A: A \in \mathcal{S} \Rightarrow A \neq \emptyset) \wedge \left(\forall A, \forall B: ((A \in \mathcal{S} \wedge B \in \mathcal{S} \wedge A \neq B) \Rightarrow A \cap B = \emptyset) \right) \right] \Rightarrow \right. \\ \left. \Rightarrow [\exists V, \forall A: (A \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists V \cap A = \{x\})] \right\}$$

- Axióma v podstate tvrdí, že zo systému neprázdnych a po dvojiciach disjunktných množín možno vybrať z každej množiny po jednom prvku.
- Ako sme uviedli, axiómy sú intuitívne zrejmé tvrdenia, ktoré vychádzajú z pozorovania a skúsenosti.
Príkladom aplikácie axiómy výberu z bežného života – systém neprázdnych množín reprezentuje škola²³. Jej žiaci sú rozdelení do školských tried (množín systému). Nemôže nastať prípad, aby jeden žiak patril súčasne do dvoch rôznych školských tried, preto sú tieto množiny navzájom disjunktné. Z každej triedy môžeme vybrať jedného žiaka²⁴ (pravidlo nie je teraz dôležité). Množina vybraných žiakov je (v axióme uvažovaná) množina V .
- Predpoklad o navzájom disjunktných množinách systému $\mathcal{S}$ je dôležitý, napr.:
ak uvažujeme systém množín $\mathcal{S} = \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$, kde x, y sú dva navzájom rôzne prvky, potom platí:

$$\begin{aligned} \{x\} \cap \{y\} &= \emptyset, \\ \{x\} \cap \{x, y\} &= \{x\}, \\ \{y\} \cap \{x, y\} &= \{y\}. \end{aligned}$$

Ak by podľa axiómy výberu existovala množina V , potom jej prieniky s množinami systému sú jednoprvkové množiny. V prípadoch množín $\{x\}, \{y\}$ teda dostaneme:

$$\begin{aligned} V \cap \{x\} &= \{x\} \\ V \cap \{y\} &= \{y\} \end{aligned}$$

²³ Samozrejme predpokladáme reálnu situáciu, že školu navštevuje nenulový počet žiakov.

²⁴ Pravidlo výberu nie je teraz dôležité (predseda triedy, najvyšší žiak v triede, žiak vo funkcii týždenníka, ...)

Množina V nutne obsahuje prvky x, y , avšak prienik s množinou $\{x, y\}$ by bola dvojprvková množina.

Ukázali sme: ak $\mathcal{S} = \{A, B\}$ je systém neprázdnych a disjunktných množín A, B , potom existuje prvok $x \in A$ a existuje prvok $y \in B$. Prvky x, y možno uviesť ako prvky množiny V . Analogicky by sa postupovalo v prípade, že systém $\mathcal{S}$ obsahuje **konečný počet** neprázdnych a navzájom disjunktných množín²⁵ a teda axióma výberu je v takom prípade „zbytočná“ a axióma výberu zbytočne komplikuje úvahy. Axióma výberu je však **potrebná**, ak systém $\mathcal{S}$ obsahuje **nekonečne** (spočítateľne alebo nespočítateľne) veľa **množín**, napr.: pomocou axiómy výberu možno dokázať vetu:

Veta

Množina je nekonečná práve vtedy, keď jej podmnožinou je nekonečná spočítateľná množina.

Taktiež možno pomocou axiómy výberu dokázať Zermelovu vetu.²⁶ Zaujímavá je skutočnosť - ak by sme Zermelovu vetu vzali ako novú axiómu, potom axiómu výberu dokážeme ako vetu.

- Úvaha je jednoduchá.
Nech M je ľubovoľná dobre usporiadaná množina. Ak systém $\mathcal{S}$ obsahuje neprázdne, navzájom disjunktné podmnožiny množiny M , potom každá z nich (v zmysle definície dobre usporiadanej množiny) má prvý prvok. Množina obsahujúca tieto prvé prvky je v axióme výberu uvedená ako množina V .

Zermelova veta a axióma výberu sú teda **ekvivalentné**.²⁷

Aj vďaka takýmto dôsledkom sa v teórii množín (aj celej matematike) uprednostňujú dôkazy, v ktorých sa axióma výberu nepoužije. Existujú však prípady dôkazov tvrdení, v ktorých axiómu výberu nemožno vynechať.

²⁵ Porovnajte s príkladom „školy a školských tried“.

²⁶ Zermelova veta - každú množinu možno dobre usporiadať.

²⁷ Viet, ktoré sú ekvivalentné s axiómou výberu, je viac.

Zoznam použitej literatúry

- Balcar B., Štěpánek P. (1986). *Teorie množin*. Academia Praha
- Bukovský L. (1985). *Množiny a všeličo okolo nich*. Alfa, Bratislava
- Bukovský L. (1980). *Teória množín*. Prírodovedecká fakulta UPJŠ Košice, Košice
- Čižmár J. (2017). *Dejiny matematiky. Od najstarších čias po súčasnosť*. Perfekt a.s., Bratislava. ISBN: 978-80-8046-829-3
- Haupt D. (1984). *Množinový počet zrozumiteľne*. Alfa, Bratislava
- Koman M., Vyšín J. (1974). *Malý výlet do moderní matematiky*. ÚV Matematické olympiády, ed. Škola mladých matematiku. Mladá fronta, Praha
- Jelínek M. (1976). *Matice*. SPN, ed. Nové směry ve školské matematice, Praha
- Jelínek M. (1974). *Relace a funkce 2*. SPN, ed. Nové směry ve školské matematice, Praha
- Odvárko, O. (1973). *Booleova algebra*. ÚV Matematické olympiády, ed. Škola mladých matematiku. Mladá fronta. Dostupné online [2025-09-02]: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403768>
- Polák, J. (1991). *Přehled středoškolské matematiky*., Prometheus Praha, 7. vyd., ISBN: 80-7196-196-5
- Polák, J. (2006). *Středoškolská matematika v úlohách 1.*, Prometheus Praha, ISBN: 80-7196-337-2
- Viktora V. (1976). *Matematika I pro studium učitelství v 1. až 5. ročníku ZDŠ*, 2. část. Fakulta pedagogická Univ. J. E. Purkyně, Brno
- Vrábel P. (2018). *Teória množín a teoretická aritmetika*. FPV UKF v Nitre, ed. Prírodovedec č. 679, ISBN: 978-80-558-1332-5
- Vyšín J., Kučerová J. (1973). *Druhý výlet do moderní matematiky*. ÚV Matematické olympiády, Ed. Škola mladých matematiku. Mladá fronta, Praha
- Smítal J., Šalát T. (1977). *Reálne čísla pre 3. ročník gymnázií s rozšíreným vyučovaním matematiky*. SPN Bratislava
- Šalát T., Smítal J. (1986). *Teória množín*. Alfa, Bratislava
- Šedivý J. (1969). *O modernizaci školské matematiky*. SPN Praha
- Zelinka B. (1979). *Matematika hrou i vážně*. ÚV Matematické olympiády, ed. Škola mladých matematiku. Mladá fronta, Praha

Názov: Úvod do teórie množín pre rozširujúce štúdium matematiky

Autori Dušan Vallo

Vydavateľ: FPVaI UKF v Nitre

Edícia: Prírodovedec č.910

Návrh obálky: Dušan Vallo

Formát: A4

Rok vydania: 2025

Miesto vydania: Nitra

Vydanie: prvé

Počet strán: 85

ISBN: 978-80-558-2323-2

