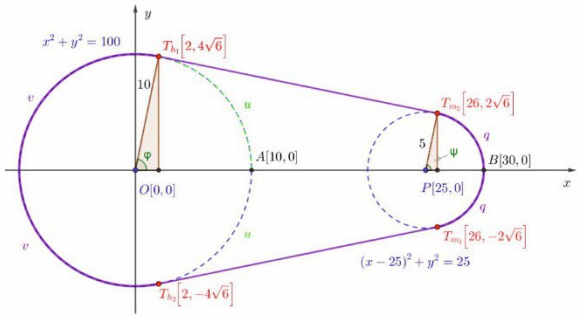
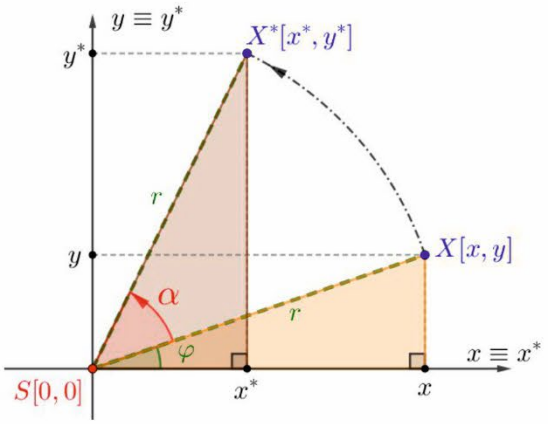
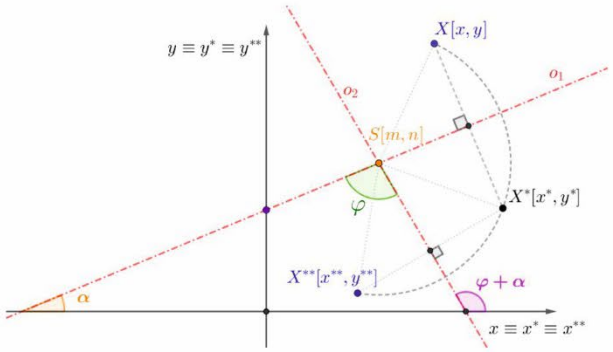
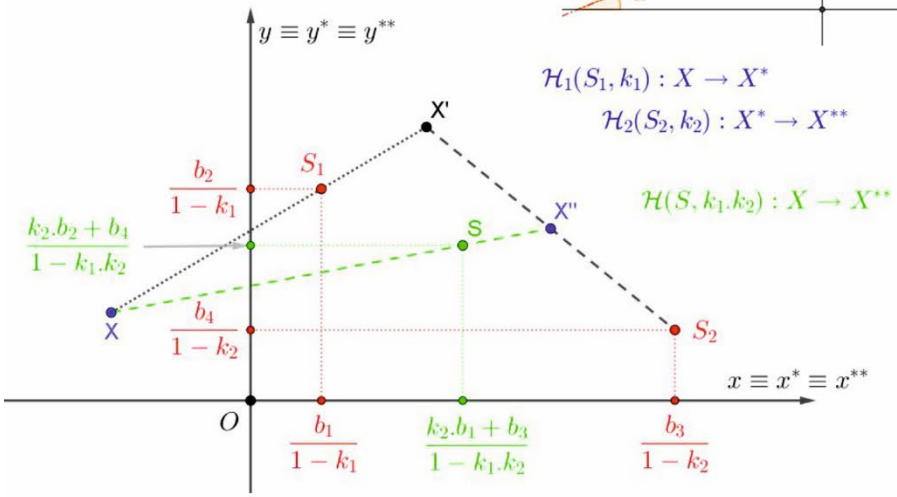




Úvod do afinnej geometrie

Afinné zobrazenia





Dušan Vallo

Nitra 2026

Úvod do afinnej geometrie

Afinné zobrazenia

Edícia Prírodovedec č. 929

Autor:

doc. RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Recenzenti:

doc. Mgr. RNDr. Dana Országhová, CSc.

(Ústav štatistiky, operačného výskumu a matematiky FEM SPU v Nitre)

doc. PaedDr. Viera Tomková, PhD.

(Katedra techniky a informačných technológií PF UKF v Nitre)

Publikácia je podporená z projektu KEGA s názvom Tvorba študijných materiálov s dôrazom na interdisciplinárny prístup v študijnom programe Učiteľstvo vzdelávacej oblasti matematika a informatika.

ISBN 978-80-558-2433-8

Obsah

1 Základné pojmy, označenia, definície a vety 4
1.1 Stredoškolské pojmy – opakovanie 4
1.2 Afinný priestor a euklidovský priestor 6
1.3 Podpriestory 14
2 Afinné zobrazenia 17
2.1 Afinné zobrazenia 17
2.2 Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia 21
2.3 Samodružné body a samodružné smery 24
2.4 Nadrovinová afinita 28
2.5 Cvičenia a úlohy 29
3 Zhodné zobrazenia 32
3.1 Zhodnosti na euklidovskej priamke 33
3.2 Grupa zhodností na $\mathbb{E}1$ 34
3.3 Zhodnosti v euklidovskej rovine 36
3.3.1 Identita 38
3.3.2 Posunutie 39
3.3.3 Stredová súmernosť 40
3.3.4 Otočenie 41
3.3.5 Osová súmernosť 44
3.3.6 Posunutá súmernosť 47
3.4 Grupa zhodností v $\mathbb{E}2$ 50
3.4.1 Skladanie osových súmerností v $\mathbb{E}2$ 55
3.5 Poznámka k zhodnostiam v $\mathbb{E}3$ 71
3.6 Cvičenia a úlohy 74
4 Podobné zobrazenia 76
4.1 Podobnosti na euklidovskej priamke 78
4.2 Skladanie podobností na $\mathbb{E}1$ 79
4.3 Podobnosti v euklidovskej rovine 80
4.3.1 Samodružné elementy priamej podobnosti v $\mathbb{E}2$ 85
4.3.2 Samodružné elementy nepriamej podobnosti v $\mathbb{E}2$ 86
4.3.3 Rovnoľahlosť v $\mathbb{E}2$ 87
4.4 Skladanie podobností v $\mathbb{E}2$ 105

4.4.1 Skladanie dvoch rovnoľahlostí v $\mathbb{E}2$ 105
4.4.2 Skladanie rovnoľahlosti a otočenia v $\mathbb{E}2$ 106
4.4.3 Skladanie rovnoľahlosti a osovej súmernosti v $\mathbb{E}2$ 110
4.5 Cvičenie 118
Index 121
Zoznam použitej a odporúčanej literatúry 124

Slovo na úvod ...

Publikácia *Úvod do afinnej geometrie (Afinné zobrazenia)* je ďalšou zo série vysokoškolských učebníc geometrie, ktoré vyšli v edícii *Prírodovedec* na *Fakulte prírodných vied a informatiky UKF v Nitre* a je určená predovšetkým študentom *učiteľstva matematiky v kombinácii* a *učiteľstva vzdelávacej oblasti Matematika a informatika*.

Učebnica je didakticky a metodicky spracovaná tak, aby prinášala základnú teóriu o afinných zobrazeniach v názornom prevedení. Z toho dôvodu je jadro učebného textu zamerané na afinné transformácie na priamke a v rovine, špeciálne orientované na zhodnosti a podobnosti.

K štúdiu uvedenej problematiky sme zvolili analytický prístup, aby sme doplnili obsahovú náplň už vydaných učebníc novým, komplexnejším pohľadom na základnú teóriu afinných transformácií.

Textová časť je dopĺňaná množstvom ilustračných obrázkov, ako aj vhodným výberom a počtom demonštračných príkladov, úloh a cvičení. Inovatívnosť učebného textu je zdôraznená aj návodmi k úlohám, ktoré vyžadujú implementáciu dynamických geometrických softvérov na modelovanie, experimentovanie a praktické overovanie výsledkov.

Súčasťou tejto aktivizujúcej zložky učebného textu sú úlohy na použitie vhodných nástrojov umelej inteligencie za účelom doplnenia teoretických poznatkov, overovania rutinných, či inak komplikovaných odvodení a výpočtov.

Možno konštatovať, že celková koncepcia je smerovaná tak, aby u čitateľa systematicky rozvíjala geometrickú predstavivosť, schopnosť aplikovať poznatky v ďalšej teórii, podnietila kritické myslenie a ponúkla nadhľad nad problematikou, ktorú bude študent učiteľstva matematiky ako budúci učiteľ matematiky potrebovať vo svojej profesijnej kariére.

Veríme, že uvedená vysokoškolská učebnica bude pre študentov užitočným, zrozumiteľným a inšpiratívnym učebným textom.

V Nitre, 8. októbra 2026

Dušan Vallo

Osobitná vďaka patrí
pani doc. Mgr. RNDr. Országhovej, CSc. a pani doc. PaedDr. Tomkovej, PhD.,
ktoré rukopis starostlivo prečítali a svojimi pripomienkami výrazne pomohli vylepšiť jeho pôvodnú verziu.

Fundamentum posui:
Alius autem superae dificat.
(Nový zákon, Pavol, 1. Korintským 3,10)

1 Základné pojmy, označenia, definície a vety

1.1 Stredoškolské pojmy – opakovanie

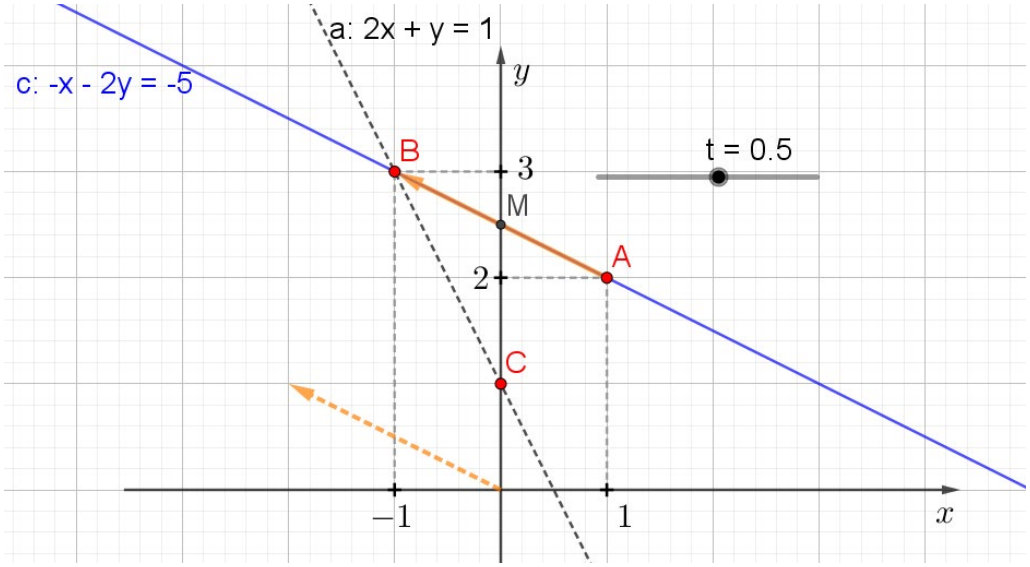
Základnými pojmami v geometrii sú *bod, priamka* a *rovina.*

V zhode s literatúrou[1], **body** budeme označovať veľkými tlačenými písmenami, napr. bod A, bod B,... . V prípadoch, kedy použijeme analytický model bodu, v pravotočivej karteziánskej súradnicovej sústave O_{xy} doplníme k bodu jeho dve súradnice[2] zápisom: $A[1,2]$, $B[-1,3]$, $C[0,1]$.

Priamky označujeme pomocou ich bodov, napr. AB, BC alebo malými písanými písmenami: $AB = c, BC = a$ a podobne. Toto označenie použijeme aj na označenie úsečiek.[3] Pokiaľ bude nevyhnutné rozlíšiť, či ide o priamku alebo úsečku, uvedieme to osobitne[4]. Navyše, zápis $|AB| = c$ znamená, že úsečka AB má dĺžku c.

Ak uvažujeme analytický model priamky v rovine, používame algebrické vyjadrenie pomocou rovníc (parametrických; všeobecných; smernicových), napr. $AB: x = 1 - 2t, y = 2 + 1t, t \in R$; $AB: x + 2y - 5 = 0$; $AB: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Výhodou parametrického vyjadrenia je možnosť obmedzenia parametra t. Ak $t \in \langle 0,1 \rangle$, ide o parametrické vyjadrenie úsečky AB. Na obr. 1.1 je $t = \frac{1}{2}$ a zodpovedá stredu M úsečky AB.



Obr. 1.1

[1] Páleníková K, Záhorská J., Vargová M., Rumanová L. (2020). *Základy matematiky 2*, Ed. Prírodovedec č. 725, FPV UKF v Nitre

[2] Ak pôjde o n −rozmerný euklidovský (afinný) priestor, jeho body budú mať priradený príslušný počet súradníc. Súradnice sú výhradne reálne čísla, ale príslušná báza vektorového priestoru nemusí byť nutne **ortonormálna** (vektory sú po dvojiciach na seba kolmé a každý vektor má jednotkovú veľkosť).
Navyše, treba si uvedomiť – používaný zápis alebo označenie bodu, vektora, či priamky v príslušnom dynamickom softvéri môže byť iné (závisí od nastavení a vývojárov).

[3] Úsečka AB je množina bodov priamky, ktoré ležia medzi bodmi A, B. Body A, B sa nazývajú krajnými bodmi úsečky.

[4] Zavedenie tohto dvojznačného popisu môže byť na prvý pohľad zmätočné. Z dôvodu častého použitia dynamických geometrickým programov je výhodnejšie aplikovať priamky než úsečky obmedzených dĺžok.

Vektory budeme označovať pomocou koncových bodov a šípok, napr. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,1)$. Znázorňovať ich môžeme ako viazané na koncové body alebo voľné vektory (so začiatkom v bode $O[0,0]$).

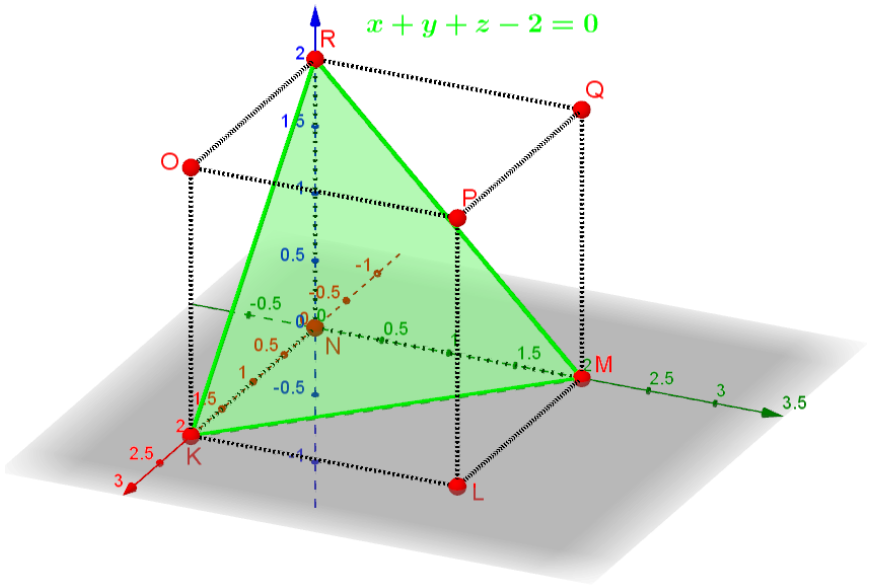
Vektory možno sčitovať, odčitovať a násobiť skalárom.[5]

Ďalej pripomíname, že v karteziánskej súradnicovej sústave O_{xyz} pre **skalárny súčin** $\vec{u}.\vec{v}$ vektorov $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ platí:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3,$$

kde φ je uhol vektorov $\vec{u}, \vec{v}$.

Roviny zapisujeme malými gréckymi písmenami alebo pomocou bodov (so súradnicami), ktorými sú určené. Napr. na obr. 1.2 je zvolená karteziánska súradnicová sústava O_{xyz}. Do sústavy je vložená kocka $KMLMOPQR$ s dĺžkou hrany 2, kde $K[2,0,0], N[0,0,0]$. Vyznačená rovina $\delta = KMR$ má rovnicu $x + y + z - 2 = 0$. [6]



Obr. 1.2

Jedným z kľúčových pojmov, s ktorými budeme pracovať, je deliaci pomer bodu na priamke.

Definícia (deliaci pomer bodu)

Nech A, B, C sú tri navzájom rôzne body kolineárne body.[7] Deliacim pomerom bodu C vzhľadom na body A, B je reálne číslo $\lambda = (ABC)$ definované vzťahom:

[5] Základné operácie s vektormi ako sú sčítanie, odčítanie, násobenie skalárom, ako aj grafické znázornenie a geometrické interpretácie považujeme za známe a ďalej sa im nevenujeme. Ak je to potrebné, preštudujte kap. 4 z literatúry v poznámke č. 1.

[6] V tematických celkoch z analytickej geometrie bolo v stredoškolských učebniciach zvykom písať nad jednotlivé označenia priamok a rovín obojstranné šípky (na polpriamky a polroviny sa používali jednostranné šípky s odrážkou). Kvôli prehľadnosti textu tento spôsob označovania vynechávame. Z rovnakých dôvodov v obrázkoch roviny (neohraničené útvary) znázorňujeme ako mnohouholníky, napr. uvedená rovina KMR je vizualizovaná ako trojuholník, súradnicová rovina Oxy ako kosodĺžnik.

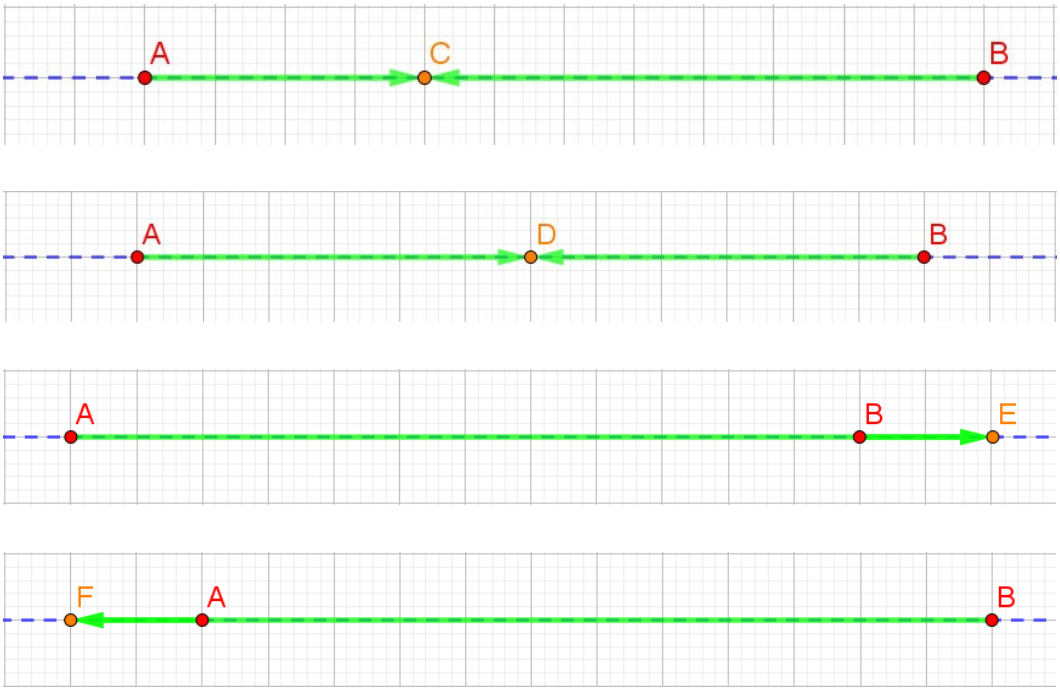
[7] Body ležia na jednej priamke.

$$\lambda = \pm\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|},$$

kde $|\overrightarrow{AC}|, |\overrightarrow{BC}|$ sú veľkosti vektorov $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ a znamienko priraďujeme podľa orientácie vektorov:

a) deliaci pomer λ je kladný, ak sú vektory súhlasne orientované,

b) deliaci pomer λ je záporný, ak sú vektory orientované opačne.



Obr. 1.3

Podľa obr. 1.3 pre deliace pomery bodov C, D, E, F (vzhľadom k bodom A, B) platí:

$$\lambda_C = -\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}, \qquad \lambda_D = -\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BD}|} = -\frac{6}{6} = -1,$$

$$\lambda_E = -\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{BE}|} = +\frac{14}{2} = 7, \qquad \lambda_F = -\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|} = +\frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

Poznamenávame, že v definícii sa vyžaduje, aby body A, B, C boli navzájom rôzne. Rozšírenie definície dovoľuje uvažovať prípad $A \equiv C$, kedy platí $\lambda = 0$ a deliaci pomer nemožno definovať, ak $C \equiv B$.

Ak $(ABC) = \lambda$, potom z definície deliaceho pomeru vyplýva:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda.\overrightarrow{BC}$$

$$C - A = \lambda(C - B)$$

$$C - \lambda.C = A - \lambda.B$$

$$C = \frac{A - \lambda.B}{1 - \lambda}$$

1.2 Afinný priestor a euklidovský priestor

Dôležitým pojmom, ktorý použijeme v ďalšom texte, je pojem grupy. Pojem pripomenieme najprv úvodným príkladom.

Príklad

V rovine α je zavedená súradnicová sústava Oxy a je definovaná množina vektorov

$$M = \{\vec{u} = (u_1, u_2); u_1 \in R, u_2 \in R\}.$$

Pre dva vektory $\vec{u} = (u_1, u_2) \in M, \vec{v} = (v_1, v_2) \in M$ definujeme operáciu sčitovanie vektorov " + " nasledovne: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. Aké vlastnosti má štruktúra $(M, +)$?

Riešenie

1) Pre ľubovoľné dva vektory $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ z množiny M platí, že po operácii dostaneme **opäť vektor**[8], ktorý má dve súradnice a leží v danej rovine α.
   Zapísali by sme:
   $$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in M: \vec{u} + \vec{v} \in M.$$
   Hovoríme, že štruktúra $(M, +)$ je vzhľadom na operáciu " + " ***uzavretá***.

2) Pre ľubovoľné vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{m} \in M$ platí:
   $$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{m} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{m}),$$
   pretože pre súradnice počítame[9]
   $$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{m} = \big((u_1, u_2) + (v_1, v_2)\big) + (m_1, m_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (m_1, m_2) =$$
   $$= (u_1 + v_1 + m_1, u_2 + v_2 + m_2) = \big(u_1 + (v_1 + m_1), u_2 + (v_2 + m_2)\big) =$$
   $$\big((u_1, u_2) + (v_1 + m_1, v_2 + m_2)\big) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{m})$$
   Hovoríme, že štruktúra $(M, +)$ je vzhľadom na operáciu " + " ***asociatívna***.

3) Pre každý vektor $\vec{u} \in M$ existuje v rovine α vektor $\vec{e}$ taký, že platí:
   $$\vec{u} + \vec{e} = \vec{e} + \vec{u} = \vec{u}.$$
   V príklade ide konkrétne o vektor $\vec{e} = (0,0)$. [10]
   Hovoríme, že štruktúra $(M, +)$ má vzhľadom na operáciu " + " ***jednotkový prvok*** $\vec{e}$.

4) Pre každý vektor $\vec{u} \in M$ existuje v rovine α vektor $\overrightarrow{u_0}$ taký, že platí:
   $$\vec{u} + \overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{u_0} + \vec{u} = \vec{e}.$$
   V príklade ide konkrétne o vektor $\overrightarrow{u_0} = (-u_1, -u_2)$. [11]
   Hovoríme, že v štruktúra $(M, +)$ má vzhľadom na operáciu " + " každý vektor svoj ***inverzný prvok***.

Štruktúra $(M, +)$ má teda uvedené štyri základné vlastnosti.[12]

---

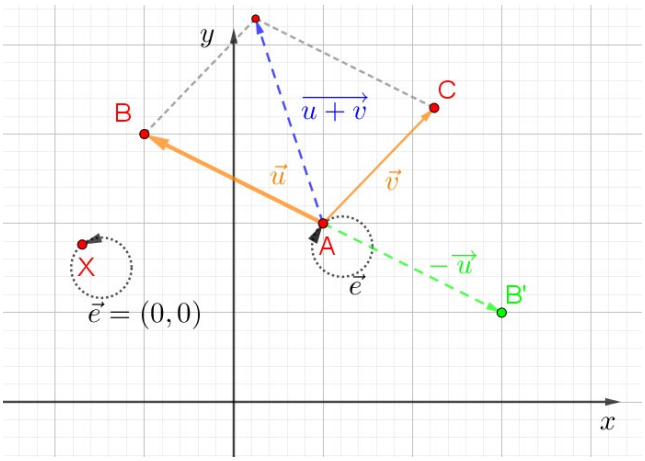
[8] Vychádzame z predstavy o grafickom sčitovaní dvoch vektorov.

[9] Vychádzame z pravidiel pre sčitovanie reálnych čísel (súradnice sú reálne čísla).

[10] Vektor $\vec{e} = (0,0)$ môžeme zapísať aj v tvare $\vec{e} = X - X$, kde X je ľubovoľný bod roviny α. To znamená, že tento vektor (viazaný na body) môžeme „umiestniť“ kdekoľvek v rovine. Graficky sa vektor znázorňuje slučkou (nie orientovanou úsečkou).

[11] Vektor $\overrightarrow{u_0} = (-u_1, -u_2)$ je opačne orientovaný vektor k vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

[12] Navyše, podľa definície operácie "+" pre ľubovoľné dva vektory $\vec{u} \in M, \vec{v} \in M$ ešte platí: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. Hovoríme, že operácia " + " je **komutatívna**. Táto vlastnosť však nemusí byť všeobecne platná pre inak definovanú operáciu.



Obr. 1.4

Definícia (grupa)

Nech M je neprázdna množina prvkov, na ktorých je definovaná operácia " $*$ ". Hovoríme, že štruktúra označovaná ako $(M,*)$ je **grupa** s operáciou *, ak platia nasledovné vlastnosti:

1) $\forall x,y \in M:\ x*y \in M,$
2) $\forall x,y,z \in M:\ (x*y)*z = x*(y*z),$
3) $\forall x \in M, \exists e \in M:\ x*e = e*x = x,$
4) $\forall x \in M, \exists x_0 \in M:\ x*x_0 = x_0*x = e.$

Niekedy sa skúma aj **komutatívnosť**[13] operácie " $*$ ", t.j. či platí: $\forall x,y \in M:\ x*y = y*x$.

Teória grúp má v geometrii má významné postavenie. Umožňuje uvažovať o geometrických objektoch a vzťahoch medzi nimi na všeobecnejšej úrovni, z ktorých možno vyvodiť geometrické dôsledky. Napr. grupa $(M,+)$ z predchádzajúceho príkladu sa môže **izomorfizmom**[14] zobraziť na euklidovskú rovinu, v ktorej prvky množiny M sa zobrazia do iných prvkov - zhodností zvaných **posunutia** (posunutie ako zhodnosť je jednoznačne určená pomocou vektora).

Z vlastnosti grupy vyvodzujeme:

1) uzavretosť operácie - zložením dvoch posunutí (operácie na zhodnostiach) je opäť posunutie.
2) Asociatívnosť operácie uvádza, že tri posunutia možno skladať v ľubovoľnom poradí a výsledok bude rovnaký.
3) Ďalej existuje jediná špeciálna zhodnosť – posunutie s nulovým vektorom,[15] ktoré má funkciu neutrálneho prvku.
4) Nakoniec, ku každému posunutiu existuje k nemu inverzné posunutie s opačným vektorom.

V algebre je definovaný aj pojem vektorového priestoru. V krátkosti uvádzame:

---

[13] Nepatrí medzi základné vlastnosti grupy. Ak však operácia je komutatívna, nazývame grupu ***abelovskou*** (komutatívnou).

[14] Morfizmom f medzi štruktúrami $(A,+)$ a $(B,.)$ nazývame zobrazenie f , ktoré „zachováva vzťahy/operácie medzi prvkami“, t. j. $\forall a,b \in A:\ f(a+b) = f(a).f(b)$. Voľne povedané - obraz výsledku súčtu $a+b$ je taký prvok, ktorý je výsledkom súčinu jednotlivých obrazov $f(a).f(b)$.
Operácie "+","." Možno nahradiť inými znakmi a významom. Ak je morfizmus f **bijektívnym** zobrazením, nazývame ho **izomorfizmom**.

[15] V stredoškolskej geometrii sa (z didaktických dôvodov) neuvažuje o posunutí, ktoré by bolo určené nulovým vektorom. V našom prípade ide o rozšírenie definície posunutia za účelom aplikácie teórie grúp.

Definícia (vektorový priestor)

Nech M je neprázdna množina prvkov (nazývaných vektory), na ktorej je definovaná komutatívna operácia " $+$ " tak, že štruktúra $(M,+)$ je grupa. Ďalej nech štruktúra $(F,+,.)$ je poľom, ktorého prvky nazývame skaláry[16].

Štruktúru $(V(F),+,.)$ nazývame **vektorovým priestorom** nad poľom F, ak platia vlastnosti:

1) $\forall x,y \in M, \forall\, t \in F\colon\ (x+y).t = x.t + y.t,$
2) $\forall x \in M, \forall\, t,s \in F\colon\ (t+s).x = x.t + x.s,$
3) $\forall x \in M, \forall\, t,s \in F\colon\ (t.s).x = t.(s.x),$
4) $\forall x \in M, \exists e \in F\colon\ x * e = e * x = x.$

Poznamenávame, že vektorový priestor je každá štruktúra, ktorá vyhovuje uvedeným vlastnostiam.[17] Z nich vyplýva, že vektorový priestor je taká množina vektorov, s ktorými možno vhodne pracovať, napr. ich vhodne vzájomne sčitovať alebo násobiť skalármi.

V ďalšom texte položíme $(F,+,.)$ ako pole reálnych čísel R, resp. R^n, $n \in N$ usporiadaných $n-$tíc reálnych čísel. Následne pre vektorový priestor konkrétnejšie označujeme $(V(R),+,.)$, resp. $(V(R_n),+,.)$ pre $n \in N, n \geq 1$.

Vektorový priestor $(V(R_n),+,.)$ je „základom“ pre tzv. **afinný** (n –rozmerný) **priestor**.

Definícia (afinný priestor)

Nech P_n je neprázdna množina, $(V_n(R),+,.)$ je vektorový priestor nad poľom R a nech $f\colon P_n \times P_n \to V_n$ je zobrazenie[18] s vlastnosťami:

1) $\forall A,B,C \in P_n\colon f(A,B) + f(B,C) = f(A,C)$
2) Existuje taký prvok $O \in P_n$, že (špeciálne[19]) zobrazenie $f_O\colon P_n \to V_n$, ktoré každému prvku $X \in P_n$ priradí vektor $f(O,X)$, je bijektívne zobrazenie.

Štruktúru – **trojicu** $(\boldsymbol{P_n}, \boldsymbol{V_n}(\boldsymbol{R},+,.), \boldsymbol{f})$ nazývame **afinným priestorom** dimenzie[20] n.

Pre jednoduchosť:

a) afinný priestor $(\boldsymbol{P_n}, \boldsymbol{V_n}(\boldsymbol{R},+,.), \boldsymbol{f})$ označujeme len ako $\mathbb{A}_n$,

---

[16] Pre účely tohto učebného textu si pod pojmom **pole** si môžeme názorne predstaviť množinu reálnych čísel s operáciami ich sčitovania a násobenia. Iné pole v tomto texte nebudeme používať. Exaktnú definíciu poľa nájde čitateľ napr. Palumbíny D. (1997). *Algebra 1*. FPV UKF v Nitre.

[17] Nie je veľmi vhodné stotožňovať fyzikálny priestor okolo nás s nejakým matematickým priestorom. Niektoré vlastnosti matematických priestorov sa dajú názorne ilustrovať v reálnom svete, ale vo všeobecnosti sú matematické priestory abstraktnejšie. Napr. existuje tzv. *triviálny* vektorový priestor nad poľom F, ktorý obsahuje len nulový vektor a žiadne iné.

[18] Zápis zobrazenia $f\colon P_n \times P_n \to V_n$ znamená, že usporiadanej dvojici z množiny $P_n \times P_n$ sa priradí práve 1 obraz – prvok (vektor) z vektorového priestoru V_n. Voľne povedané, z „dvoch prvkov množiny P_n vytvoríme vektor“. Pozor, zo zápisu nie je jasné, akým konkrétnym spôsobom sa tak stane. Ukážeme na príkladoch, že predpisy môžu byť rôzne.

[19] Označenie „špeciálne“ naznačuje, že zobrazenie f_O je iné, než je vyššie uvedené zobrazenie f. Ako vidno, je definované na množine P_n a pomocou konkrétne fixovaného prvku O.

[20] Pojem dimenzie súvisí s maximálnym počtom lineárne nezávislých vektorov v danom vektorom priestore, pomocou ktorých možno vyjadriť ostatné vektory uvažovaného priestoru ako ich lineárnu kombináciu. Vo vektorovom priestore $(V(R_n),+,.)$ je to práve n nenulových vektorov.

b) množinu P_n nazývame **nosičom** afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ a jeho prvky pomenujeme **bodmi,**

c) samotný vektorový priestor $(V(R_n), +, .)$ nazývame zameraním afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ a jeho prvky (v zhode) s pôvodným názvom, voláme **vektormi.**

Príklad

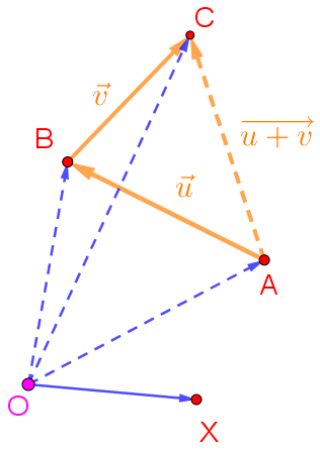
Ukážte, že intuitívnou stredoškolskou interpretáciou orientovanej úsečky ako viazaného vektora v rovine sú splnené obe podmienky uvedené v definícii afinného priestoru $\mathbb{A}_2$.

Riešenie

Vybranú rovinu α považujme za nosič P_2 a jej prvky sú body. Konkrétne, zobrazením f nazveme pravidlo, ktoré ľubovoľnej orientovanej úsečke priradí vektor (podľa orientácie úsečky). Následne pre ľubovoľné tri body $A, B, C \in \alpha$ platí:

$$f(A,B) = \vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad f(B,C) = \vec{v} = \overrightarrow{BC}.$$

Podľa rovnobežníkového pravidla na sčitovanie vektorov odvodíme:



Obr. 1.5

$$f(A,B) + f(B,C) = \vec{u} + \vec{v} =$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC} = f(A,C),$$

čím je prvá vlastnosť splnená.

Ak v rovine α vyberieme pevný bod O, potom zobrazenie f_O zavedieme ako spôsob, kedy každému bodu $X \in \alpha$ priradíme orientovanú úsečku začínajúcu v bode O a končiacu v bode X, teda vektor $\overrightarrow{OX}$.

Zobrazenie f_O je bijektívne (rôzne body X_1, X_2 určujú rôzne vektory $\overrightarrow{OX_1}, \overrightarrow{OX_2}$; každý vektor $\overrightarrow{OX}$ má jediný koncový bod X).

Vidíme, že je splnená aj druhá vlastnosť z definície afinného priestoru.

Uvedený príklad, kde nosičom je rovina a zameraním vektorový dvojrozmerný priestor (nad poľom R) so zobrazeniami f a f_O, je dvojrozmerný afinný priestor $\mathbb{A}_2$.

Všimnime si, že v predchádzajúcom príklade sme nepoužili analytický prístup, t.j. nebolo potrebné zaviesť aritmetický model bodu a vektora (pomocou súradníc).

Ak interpretujeme **bod** ako usporiadanú n –ticu reálnych čísel, **nosičom** P_n bude množina bodov v tvare:

$$A[a_1, a_2, \dots, a_n],\ B[b_1, b_2, \dots, b_n],\ C[c_1, c_2, \dots, c_n], \dots$$
$$\vdots$$
$$X[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

pre $i = 1,2, \dots, n$.

Zobrazenie $f: P_n \times P_n \to V_n$ definujem pomocou súradníc, napr. zavedieme ho štandardne ako *„rozdiel sebe odpovedajúcich zložiek“*

$$f(A,B) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n) = \vec{u}.$$

Platí:

1) $f(A,B) + f(B,C) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n) + (c_1 - b_1, c_2 - b_2, \dots, c_n - b_n) =$
$= (b_1 - a_1 + c_1 - b_1, b_2 - a_2 + c_2 - b_2, \dots, b_n - a_n + c_n - b_n) =$
$= (c_1 - a_1, c_2 - a_2, \dots, c_n - a_n) = f(A,C)$

2) Ak $O[o_1, o_2, \dots, o_n]$, potom bijekcia f_O priradí ľubovoľnému bodu X jednoznačne vektor
$$f(O,X) = (x_1 - o_1, x_2 - o_2, \dots, x_n - o_n) = \vec{u}.$$

Uvedený aritmetický model afinného priestoru je geometricky názorný, praktický na výpočty, a preto aj najpoužívanejší.
Ako naznačuje nasledujúci príklad, existujú aj iné aritmetické modely.

Príklad ([3, str. 21])
Množina $P_2 = \{[x_1, x_2] \in R \times R, x_2 > 0\}$ *spolu s vektorovým priestorom* $(V_2(R), +, .)$ *a zobrazením* $f(X,Y) = \left(x_1 - y_1 + \log\frac{x_2}{y_2}, x_1 - y_1 - \log\frac{x_2}{y_2}\right)$, *kde* $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2] \in P_2$ *je afinným priestorom. Dokážte!*

Riešenie
Overíme vlastnosti afinného priestoru podľa definície. Nech $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2], C[c_1, c_2], O[o_1, o_2]$ sú body P_2. Počítame:

1) $f(A,B) + f(B,C) =$

$$= \left(a_1 - b_1 + \log\frac{a_2}{b_2}, a_1 - b_1 - \log\frac{a_2}{b_2}\right) + \left(b_1 - c_1 + \log\frac{b_2}{c_2}, b_1 - c_1 - \log\frac{b_2}{c_2}\right) =$$

$$= \left(a_1 - b_1 + \log\frac{a_2}{b_2} + b_1 - c_1 + \log\frac{b_2}{c_2},\ a_1 - b_1 - \log\frac{a_2}{b_2} + b_1 - c_1 - \log\frac{b_2}{c_2}\right) =$$

$$= \left(a_1 + \log\frac{a_2}{b_2} - c_1 + \log\frac{b_2}{c_2},\ a_1 - \log\frac{a_2}{b_2} - c_1 - \log\frac{b_2}{c_2}\right) =$$

$$= \left(a_1 - c_1 + \log\left(\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{b_2}{c_2}\right),\quad a_1 - c_1 - \log\left(\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{b_2}{c_2}\right)\right) =$$

$$= \left(a_1 - c_1 + \log\frac{a_2}{c_2},\quad a_1 - c_1 - \log\frac{a_2}{c_2}\right) = f(A,C).$$

2) Ukážeme, že $f_O: P_2 \to V_2$ je bijekcia.
Ak ľubovoľnému bodu $X[x_1, x_2]$ priradíme vzhľadom na pevný bod $O[o_1, o_2]$ vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, potom podľa vlastnosti 1) platí:

$$o_1 - x_1 + \log\frac{o_2}{x_2} = u_1$$
$$o_1 - x_1 - \log\frac{o_2}{x_2} = u_2$$

Odvodíme rovnice (sčítaním a odčítaním vyššie uvedených)

$$2(o_1 - x_1) = u_1 + u_2$$
$$2\log\frac{o_2}{x_2} = u_1 - u_2,$$

z ktorých vyplýva

$$x_1 = o_1 - \frac{u_1 + u_2}{2}$$
$$x_2 = o_2 . 10^{\frac{u_1 - u_2}{2}}$$

Súradnice bodu X sú jednoznačne priradené súradniciam vektora $\vec{u}$ a opačne.
Trojica $(P_2, (V_2(R), +, .), f)$ je afinným priestorom dimenzie 2. Označíme ho $\mathbb{A}'_2$.

Úloha
Vo vhodnom dynamickom softvéri preskúmajte geometriu afinného priestoru z predchádzajúceho príkladu. Postupujte nasledovne:

a) Zvoľte súradnicovú sústavu Oxy a pevný bod $O[o_1, o_2] \in \mathbb{A}'_2$, $o_2 > 0$.

b) Narysujte niekoľko vybraných geometrických útvarov (napr. úsečku, priamku, kružnicu, trojuholník, ...) tak, aby boli podmnožinami daného afinného priestoru (podmienka $x_2 > 0$ pre každý bod $X[x_1, x_2] \in P_2$).

c) Na každom z vybraných útvarov zvoľte bod M, ktorému priradíte vektor $f(O, M)$. Súradnice vektora použite ako súradnice bodu M_1 a znázornite ho v rovnakej súradnicovej sústave.

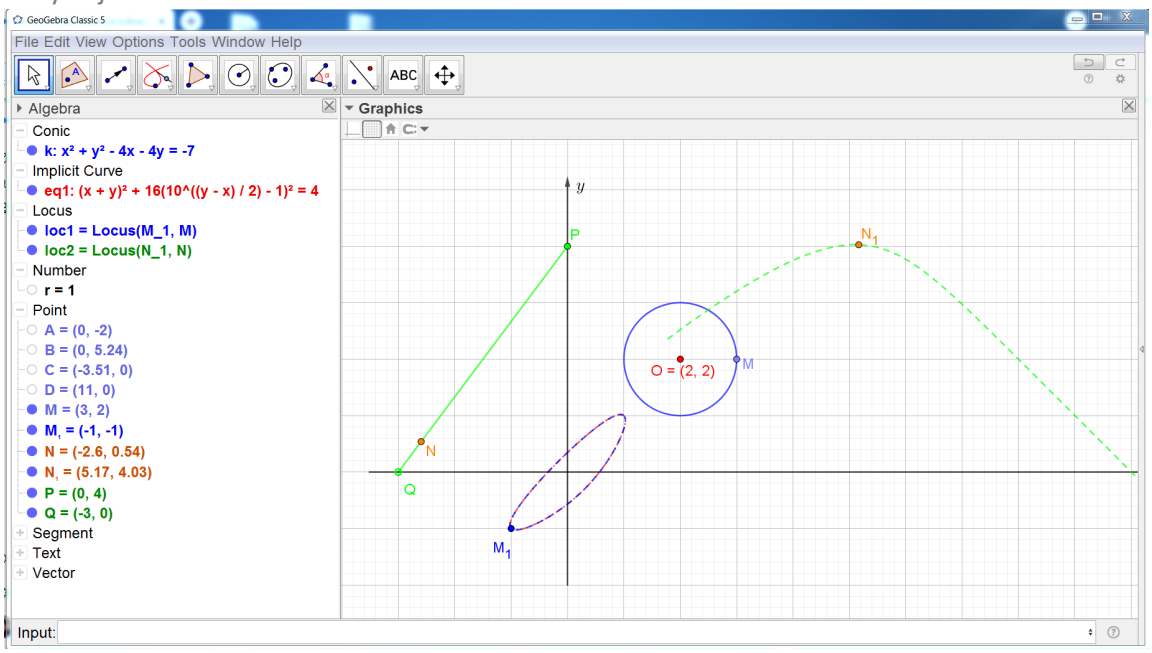
d) Aké útvary vykreslí bod M_1 pri zmene súradníc bodu M? Použite nástroj „geometrické miesto bodov“ na vykreslenie príslušnej krivky.

e) Zmeňte nastavenia – polohu bodu O, súradnice bodov úsečky a vrcholov trojuholníka. Vyšetrite aj limitné prípady pre $M[m_1, m_2]$, kde $m_2 \to 0$.

f) Je obrazom kružnice opäť kružnica? Závisí obraz kružnice od jej polomeru?

g) Použite nástroje umelej inteligencie na odvodenie rovnice krivky, ktorá je obrazom kružnice s rovnicou $(x-2)^2 + (y-2)^2 = r^2$, kde $r > 0$ je parameter. Výsledok overte pomocou dynamického softvéru.

Návody nájdete na obr. 1.6 a 1.7.



Obr. 1.6 Vizualizácia zrealizovaná prostredníctvom Geogebra Classic 5.0.803.0-d

Kružnica k má rovnicu (x-2)^2+(y-2)^2=1. Každému jej bodu M[x(M),y(M)] sa priradí bod M_1[(x(O) - x(M) + lg(y(O) / y(M)), x(O) - x(M) - lg(y(O) / y(M)))].
Aká je rovnica obrazu kružnice k?

Rovnicu obrazu kružnice k určujeme vyjadrením pôvodných súradníc bodu $M[x_M, y_M]$ pomocou nového bodu $M_1[x, y]$ a ich následným dosadením do rovnice kružnice.

1. Určenie stredu kružnice O

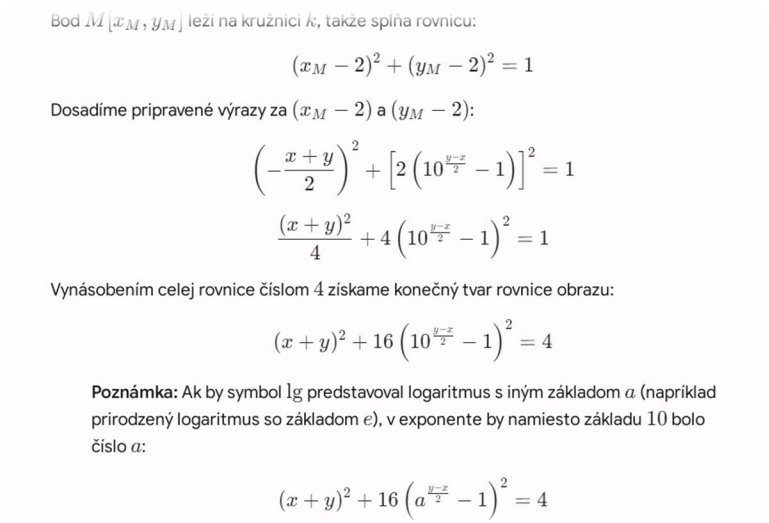
Z danej rovnice kružnice $k: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ vyčítame jej stred O:

$$O[x_O, y_O] = [2, 2]$$

Súradnice zobrazeného bodu $M_1[x, y]$ sú podľa zadania:

$$x = x_O - x_M + \lg\left(\frac{y_O}{y_M}\right)$$

⋮



Bod $M\,[x_M, y_M]$ leží na kružnici k, takže spĺňa rovnicu:

$$(x_M - 2)^2 + (y_M - 2)^2 = 1$$

Dosadíme pripravené výrazy za $(x_M - 2)$ a $(y_M - 2)$:

$$\left(-\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left[2\left(10^{\frac{y-x}{2}} - 1\right)\right]^2 = 1$$

$$\frac{(x+y)^2}{4} + 4\left(10^{\frac{y-x}{2}} - 1\right)^2 = 1$$

Vynásobením celej rovnice číslom 4 získame konečný tvar rovnice obrazu:

$$(x+y)^2 + 16\left(10^{\frac{y-x}{2}} - 1\right)^2 = 4$$

Poznámka: Ak by symbol $\lg$ predstavoval logaritmus s iným základom a (napríklad prirodzený logaritmus so základom e), v exponente by namiesto základu 10 bolo číslo a:

$$(x+y)^2 + 16\left(a^{\frac{y-x}{2}} - 1\right)^2 = 4$$

Obr. 1.7 Výpočet realizovaný prostredníctvom: Google. (2026). *Gemini* (Verzia zo 14. augusta 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

V ďalších kapitolách budeme pracovať s tzv. **euklidovskými** priestormi.

Definícia (euklidovský priestor)

Afinný priestor $\mathbb{A}_n$ nad poľom reálnych čísel R nazveme **euklidovským priestorom**, ak jeho zameranie $(V_n(R), +, .)$ je vektorový priestor, v ktorom je definovaný **skalárny súčin** dvoch vektorov[21].

Zavedením skalárneho súčinu do zamerania afinného priestoru sa mení jeho „kvalita“. Skalárnym súčinom môžeme určovať vzdialenosti bodov (dĺžky úsečiek, veľkosti vektorov). Napr. na obr. 1.4 sú vyznačené body $A[1,2], B[-1,3]$. Ich vzdialenosť je veľkosť vektora $\overrightarrow{AB}$, ktorú vypočítame z rovnosti: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AB}|.\cos 0$, kde $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,1)$. Počítame:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(-2,1).(-2,1)} = \sqrt{(-2).(-2) + 1.1} = \sqrt{5}.$$

Afinné priestor $\mathbb{A}_n$, ktorý je aj euklidovským priestorom, označujeme $\mathbb{E}_n$.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie vyhľadajte algebrickú definíciu skalárneho súčinu dvoch vektorov vo vektorovom priestore V_n a presvedčte sa, že definície:

a) $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + \cdots + a_n.b_n$, kde $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

b) $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 - a_1.b_2 - a_2.b_1 + 2.a_2.b_2$, kde $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$,

sú korektne definované skalárne súčiny.

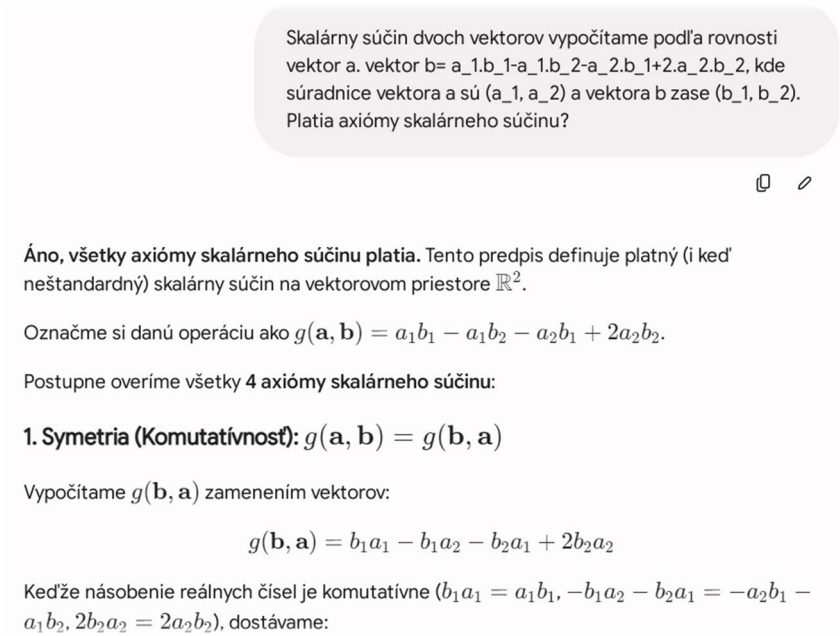
Návod nájdete na obr. 1.8.

[21] Skalárny súčin možno všeobecne definovať ako zobrazenie. Hovoríme, že zobrazenie $f: V_n \times V_n \to R$ je **skalárny súčin** dvoch vektorov, ak $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$ a pre $\forall t \in R$ platia axiómy:

1) $f(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = f(\vec{a}, \vec{c}) + f(\vec{b}, \vec{c})$, 2) $f(t.\vec{a}, \vec{b}) = t.f(\vec{a}, \vec{b})$, 3) $f(\vec{a}, \vec{b}) = f(\vec{b}, \vec{a})$,

4) $f(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$, 5) $f(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Skalárny súčin dvoch vektorov, ktorý sme definovali v kapitole 1.1 spĺňa všetkých 5 vlastností uvedenej definície.



Obr. 1.8 Výpočet realizovaný prostredníctvom: Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 15. augusta 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

1.2 Podpriestory

Uvažujme vektory $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$, pre $n \in N$, z vektorového priestoru $(V(F), +, .)$ nad poľom F. Hovoríme, že vektory $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ sú **lineárne nezávislé**, ak platí implikácia:

$$\forall c_1, c_2, \dots, c_n \in F: \quad c_1.\overrightarrow{u_1} + c_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + c_n.\overrightarrow{u_n} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Ak uvedená implikácia neplatí, potom stručne hovoríme o **lineárne závislých** vektoroch.[22]

Ak sú vektory $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ lineárne nezávislé a každý väčší počet vektorov ako n už predstavuje lineárne závislé vektory, potom množinu $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ nazývame **bázou** vektorového priestoru $(V(F), +, .)$. Prirodzené číslo n nazývame **dimenziou (vektorového) priestoru**. Označujeme:

$$\dim V = n.$$

Báza vektorového priestoru nie je určená pre daný priestor jednoznačne. Napr. majme dvojrozmerný vektorový priestor nad poľom R. Množiny vektorov $B_1 = \{(1,0), (0,1)\}$, $B_2 = \{(2,2), (-2,2)\}$ sú obe bázami daného vektorového priestoru.

Pre B_1 výpočtom odvodíme:

$$c_1.(1,0) + c_2.(0,1) = (0,0)$$

$$1.c_1 + 0.c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$
$$0.c_1 + 1.c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Pre B_2 vypočítame:

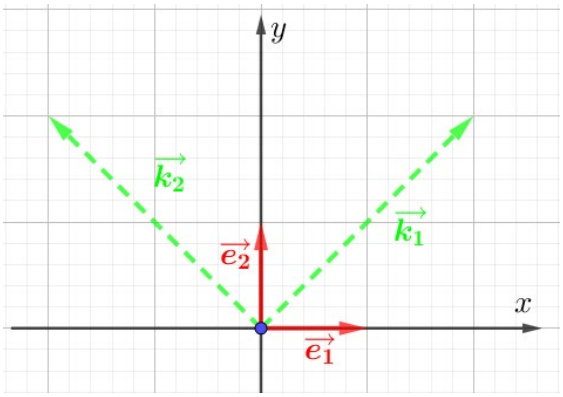
$$c_1.(2,2) + c_2.(-2,2) = (0,0)$$

$$2.c_1 - 2.c_2 = 0$$
$$2.c_1 + 2.c_2 = 0$$

Vzájomným sčítaním a odčítaním oboch rovníc dostaneme:

[22] Implikáciu nemožno obrátiť. Napr. vektory $\overrightarrow{u_1} = (1,1), \overrightarrow{u_2} = (2,2)$ sú lineárne závislé. Avšak, ak by sme implikáciu obrátili a predpokladom položili $c_1 = c_2 = 0$, potom dostaneme $c_1.\overrightarrow{u_1} + c_2.\overrightarrow{u_2} = 0.\overrightarrow{u_1} + 0.\overrightarrow{u_2} = \vec{0}$.

$$4c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$
$$-4c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$



Obr. 1.9

Každý vektor $\vec{v} \in (V(F), +, .)$ je **lineárnou kombináciou** vektorov bázy. Zapisujeme

$$c_1.\overrightarrow{u_1} + c_2.\overrightarrow{u_2} + \ \ldots + c_n.\overrightarrow{u_n} = \vec{v}.$$

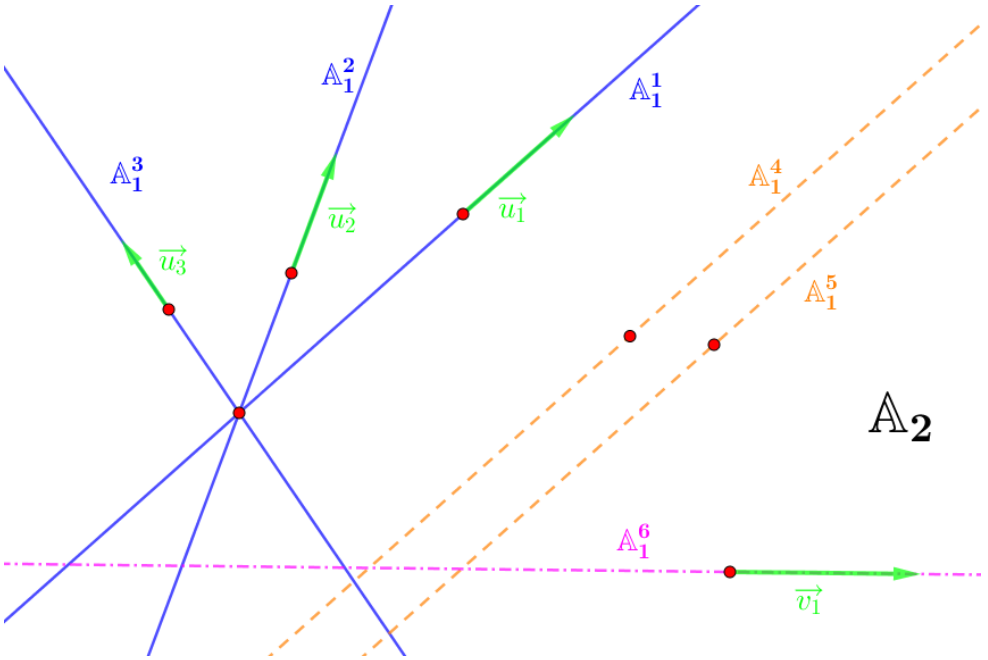
Všetky vektory skúmaného vektorového priestoru možno vyjadriť ako lineárne kombinácie vektorov bázy.
Ak z bázy (množiny lineárne nezávislých) vektorov vektorového priestoru $(V(F), +, .)$ Vytvoríme neprázdnu $k-$prvkovú podmnožinu $(0 \leq k < n)$, dostaneme opäť bázu, ale už **vektorového podpriestoru** $(V_k(F), +, .)$ daného vektorového priestoru $(V(F), +, .)$.

Vektorový podpriestor je tiež vektorovým priestorom, pretože spĺňa všetky vlastnosti z definície vektorového priestoru. V prípade, že $k = 1$, nazývame daný vektorový podpriestor ako **smer**.[23]

Definícia (afinný podpriestor)
Nech $\mathbb{A}_n$ je afinný priestor s nosičom P_n a zameraním $(V_n(R), +, .)$. Neprázdnu podmnožinu $\mathbb{A}_k, k \leq n$ nazveme afinným podpriestorom $\mathbb{A}_n$, ak $\mathbb{A}_k$ je afinný priestor, ktorého nosič P_k je podmnožinou P_n a jeho zameranie $(V_k(R), +, .)$ je vektorovým podpriestorom $(V_n(R), +, .)$.

Je zrejmé, že dimenzia afinného (pod)priestoru sa odvodzuje od dimenzie jeho zamerania. Dimenzia k však neurčuje afinný (pod)priestor jednoznačne. Napr. v afinnej rovine (afinný priestor $\mathbb{A}_2$) existuje nekonečne veľa afinných priamok - afinných podpriestorov dimenzie $k = 1$.
Tieto afinné priamky môžu prechádzať spoločným afinným bodom z nosiča P_2 (patria do jedného zväzku priamok – navzájom rôznobežných alebo rovnobežných) alebo aj nie. [24]

[23] Smer ako jednorozmerný vektorový podpriestor je má bázu len jeden nenulový vektor. Všetky vektory zo smeru sú jeho násobky (vrátane nulového násobku). Ak násobíme vektor bázy kladným skalárom, sú oba vektory súhlasne orientované. Ak je skalár záporný, majú vektory nesúhlasnú (opačnú) orientáciu. V tomto je rozdiel medzi chápaním „smeru“ v bežnom zmysle slova a v matematickom (pre cestujúceho na zastávke je dôležité vedieť, či autobus smeruje do mesta alebo von z mesta).
[24] Na odlíšenie jednotlivých afinných podpriestorov občas používame doplňujúce indexy.



Obr. 1.10

Afinný podpriestor dimenzie:

- $k = 0$ nazývame **afinný bod** (zameranie obsahuje len jeden vektor a to je $\vec{0}$),
- pre $k = 1$ je **afinná priamka** (určená bodom a smerovým vektorom; nosičom podpriestoru sú všetky body uvažovanej priamky, zameraním sú všetky násobky smerového vektora danej priamky),
- pre $k = 2$ ide o **afinnú rovinu** (určená je bodom a dvoma nezávislými smerovými vektormi; nosičom podpriestoru sú všetky body uvažovanej roviny, zameraním sú všetky lineárne kombinácie smerových vektorov danej roviny),
- pre $k = n - 1$ hovoríme o **afinnej nadrovine** (určená je bodom a $n - 1$ nezávislými smerovými vektormi; nosičom podpriestoru sú všetky body uvažovanej nadroviny, zameraním sú všetky lineárne kombinácie smerových vektorov danej nadroviny).

Zo spôsobu určenia afinných podpriestorov pomocou bodu $M[m_1, m_2, \dots, m_k]$ a smerových vektorov $\overrightarrow{u_i} = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik}), i = 1, 2, \dots, k$ vyplýva aj parametrické vyjadrenie v tvare: [25]

$$X = M + c_1.\overrightarrow{u_1} + c_2.\overrightarrow{u_2} + \cdots + c_k.\overrightarrow{u_k},$$

kde $c_i \in R, i = 1,2, \dots, k$.

Ak je afinný (pod)priestor euklidovský, hovoríme o **euklidovskom bode, euklidovskej priamke, euklidovskej rovine** a **euklidovskej nadrovine**.

[25] V niektorej literatúre sa množine bodov X, ktorých súradnice vyhovujú parametrickému vyjadreniu, hovorí **lineárna varieta.**

2 Afinné zobrazenia

V predchádzajúcej kapitole sme zopakovali základné pojmy a definície zo stredoškolskej matematiky, z algebry a analytickej geometrie. Pripomíname, že ďalej pracujeme so štandardným analytickým modelom bodu a vektora (súradnice počítame ako rozdiel odpovedajúcich si súradníc koncového a začiatočného bodu) $n-$ rozmerného afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ nad poľom R, teda:

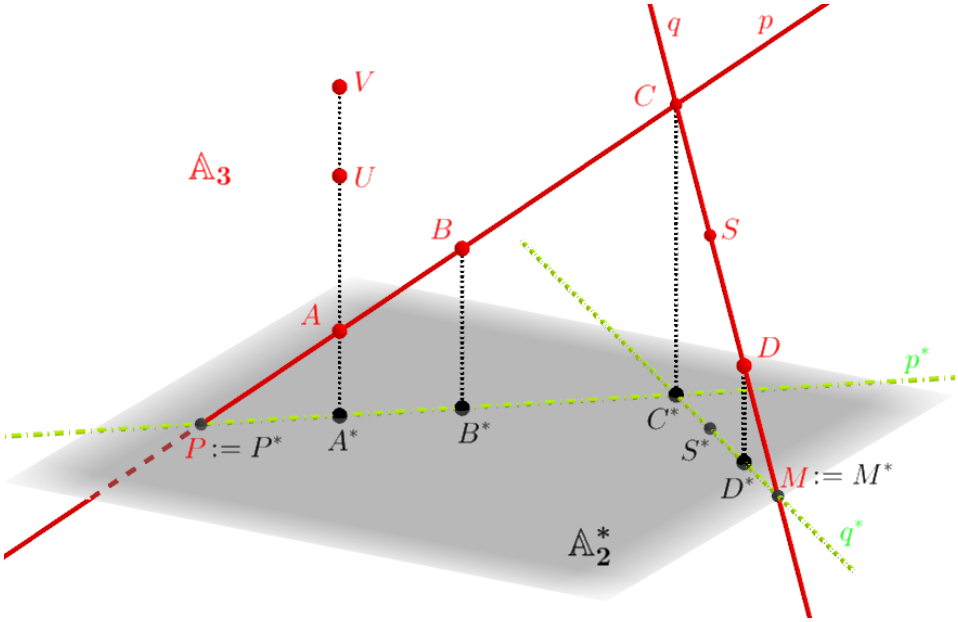
$$A[a_1, a_2, \dots, a_n], B[b_1, b_2, \dots, b_n] \in \mathbb{A}_n, a_i, b_j \in R, i, j = 1,2,3, \dots, n, n \in N,$$

platí:

$$f: P_n \times P_n \to V_n: \ f(A,B) = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n).$$

2.1 Afinné zobrazenia

Body afinného priestoru $\mathbb{A}_3$ zobrazujeme do vybranej afinnej roviny $\mathbb{A}_2^* \subset \mathbb{A}_3$, kde smer premietania je určený kolmo na $\mathbb{A}_2^*$.



Obr. 2.1

Zobrazenie $g: \mathbb{A}_3 \longrightarrow \mathbb{A}_2^*$ má tieto vlastnosti:

- obrazom bodu[26] je vždy bod; $g: A \longrightarrow A^*, \dots, g: P \longrightarrow P^*,$
- obrazom priamky (nie kolmej na rovinu) je priamka; $g: p \longrightarrow p^*, g: q \longrightarrow q^*, \dots$ alebo obrazom priamky kolmej na rovinu je bod; $g: AU \longrightarrow A^*$.
- Ak bod leží na priamke, potom sa zobrazí do bodu ležiaceho na obraze uvažovanej priamky.
- Ak bod bol stredom úsečky, zobrazí sa ako stred obrazu; $g: S \longrightarrow S^*$, kde S je stred CD, S^* je stredom úsečky C^*D^*.
- Zobrazenie g zachováva deliaci pomer; napr. $(CDS) = (C^*D^*S^*), (ABC) = (A^*B^*C^*), \dots$.

Afinné zobrazenie definujeme nasledovne:

[26] Bod $P \in \mathbb{A}_3$ a súčasne $P \in \mathbb{A}_2^*$ má obraz bod P^*. Body P, P^* nie sú totožné, hoci majú rovnakú pozíciu. V prípade použitia analytického modelu by platilo: $P[x_P, y_P, 0]$ a $P^*[x_P^*, y_P^*]$. Z toho dôvodu sme na obr. 1.11 sme použili priraďovací znak „:=“.

Definícia (afinné zobrazenie)

Zobrazenie g afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ do afinného priestoru $\mathbb{A}_m^*$ nazveme afinným zobrazením, ak sa:

a) ľubovoľné tri navzájom rôzne kolineárne body $A, B, C \in \mathbb{A}_n$ zobrazia do troch navzájom rôznych kolineárnych bodov $A^*, B^*, C^* \in \mathbb{A}_m^*$ tak, že sa deliace pomery $(ABC), (A^*B^*C^*)$ sa rovnajú

alebo

b) body $A^*, B^*, C^* \in \mathbb{A}_m^*$ sú totožné body.

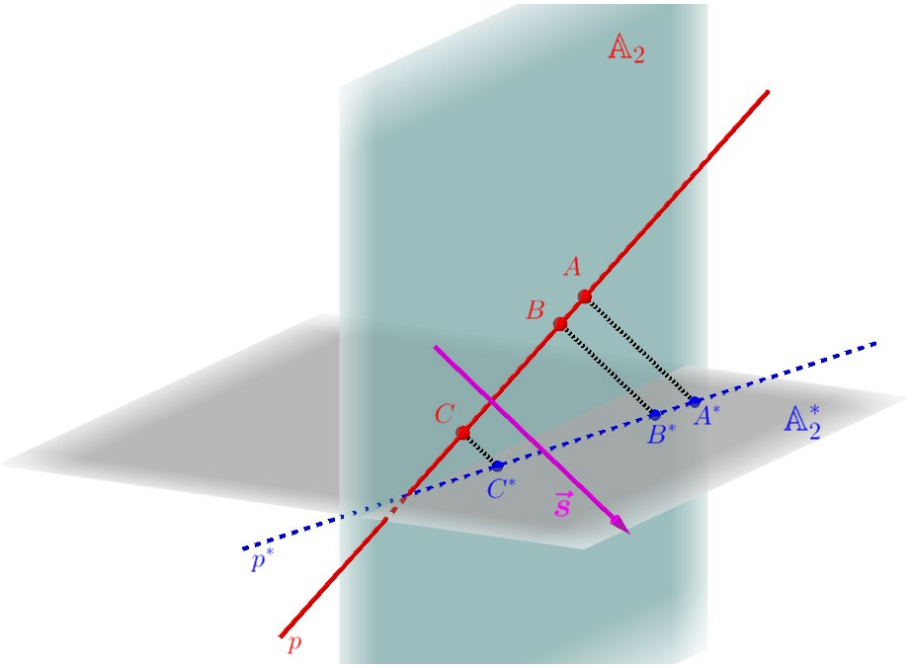
Zobrazenie z predchádzajúcej ukážky je afinným zobrazením.

Ak afinné zobrazenie g spĺňa podmienku a) z definície, potom hovoríme, že je **regulárne**. Ak len spĺňa podmienku b), nazývame ho **singulárnym** afinným zobrazením.

Afinné priestory označujeme $\mathbb{A}_n, \mathbb{A}_m^*$, kde $n, m \in N$. Čísla n, m vyjadrujú dimenziu zameraní odpovedajúcich afinných priestorov. Prakticky určujú, koľko súradníc má bod, resp. vektor daného afinného priestoru. Môžu nastať prípady:

$$n < m, \qquad n = m, \qquad n > m.$$

Pre prípady, kedy $n = m$, zavádzame doplnkové označenie $*$ pre afinný priestor obrazov ako $\mathbb{A}_m^*$. Zdôrazňujeme tak, že afinné priestory $\mathbb{A}_n, \mathbb{A}_m^*$ **môžu byť rovnakej dimenzie**, avšak **nemusia byť totožné**. Napr. uvažujme dve na seba navzájom kolmé afinné roviny $\mathbb{A}_2$ a $\mathbb{A}_2^*$. Rovnobežné premietanie v smere vektora $\vec{s}$ (rôznobežného s priesečnicou rovín) je afinným zobrazením $g: \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_2^*$.



Obr. 2. 2

Nájdu sa aj príklady afinných zobrazení, v ktorých sú afinné priestory $\mathbb{A}_n, \mathbb{A}_m^*$ totožné. Afinné zobrazenie $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n^* = \mathbb{A}_n$ nazývame **afinnou transformáciou**. Napr. osová súmernosť v rovine $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2^*$ je afinná transformácia.

Bodom $A, B, C, \ldots \in \mathbb{A}_n$ hovoríme **vzory**, body $A^*, B^*, C^*, \ldots \in \mathbb{A}_m^*$ nazývame **obrazy**. Niekedy prehľadne zapisujeme:

$$g: A \longrightarrow A^*, \qquad g: B \longrightarrow B^*, \qquad g: C \longrightarrow C^*, \ldots,$$

čím presne určíme, že v afinnom zobrazení g sa vzor A zobrazí do obrazu A^* a pod.

Uvažujme[27] len o regulárnom afinnom zobrazení $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow A_m^*$.

Ak $g: A \longrightarrow A^*$, $g: B \longrightarrow B^*$, potom vektor $\vec{u} = B - A$ sa zobrazí na vektor $\overrightarrow{u^*} = B^* - A^*$, t.j. vektor ako vzor $\vec{u}$ má obraz vektor $\overrightarrow{u^*}$. Vektory sú prvky príslušných zameraní $\vec{u} \in V_n$, $\overrightarrow{u^*} \in V_m^*$.

Keďže sú to prvky vektorových priestorov, nemusia byť viazané na konkrétne afinné body.[28]

Z uvedeného dôvodu medzi vektorovým priestormi V_n, V_m^* definujeme (formálne) **asociované zobrazenie φ** pomocou afinného zobrazenia g:

$$\varphi: V_n \longrightarrow V_m^*$$

$$\forall \vec{u} \in V_n, \vec{u} = B - A, \exists \overrightarrow{u^*} \in V_m^*: \varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{u^*} = g(B) - g(A).$$

Zavedenie asociovaného zobrazenia umožňuje využiť vlastnosti vektorových priestorov, napr. ak tri navzájom rôzne kolineárne body A, B, C sa v afinnom zobrazení g zobrazia postupne do bodov A^*, B^* a C^*, potom asociované zobrazenie φ zobrazí lineárne závislé vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AC}, \vec{v} = \overrightarrow{BC}$ do lineárne závislých vektorov

$$\overrightarrow{u^*} = g(C - A) = g(C) - g(A) = C^* - A^* = \overrightarrow{A^*C^*},$$
$$\overrightarrow{v^*} = g(C - B) = g(C) - g(A) = C^* - B^* = \overrightarrow{B^*C^*},$$

pretože zobrazenie g je regulárnym afinným zobrazením (kolineárne vzory A, B, C zobrazí do kolineárnych obrazov A^*, B^*, C^*).

Navyše, afinné zobrazenie g zachová deliaci pomer[29] a platí:

$$(ABC) = \pm\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \pm\frac{|\overrightarrow{A^*C^*}|}{|\overrightarrow{B^*C^*}|} = (A^*B^*C^*).$$

Z uvedeného vyplýva:

- afinné zobrazenie zachováva **incidenciu**. Ak afinný bod C leží na priamke AB, jeho obraz C^* leží na priamke A^*B^*, ktorá je obrazom AB.
- Obrazom afinnej priamky je tiež afinná priamka. Z toho dôvodu hovoríme, že afinné zobrazenie je **lineárnym** zobrazením.
- Ak afinné priamky AB, CD majú rovnaký smerový vektor (sú rovnobežné), potom sú rovnobežné aj ich obrazy A^*B^*, C^*D^*. Hovoríme, že afinné zobrazenie zachováva **rovnobežnosť**. [30]
- Afinné zobrazenie $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_m^*$ zachováva **lineárnu kombináciu bodov** (lineárna kombinácia vzorov je lineárnou kombináciou príslušných obrazov). [31]

---

[27] Singulárne zobrazenie je z geometrického hľadiska „nezaujímavé"- body nejakej afinnej priamky sa zobrazia do jedného bodu; body ďalšej vybranej afinnej priamky sa môžu zobraziť aj do iného bodu, atď. ... t.j. obrazy afinných priamok z afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ sú body afinného priestoru A_m^*.

[28] Napr. použijeme názorný geometrický pohľad – ak vektor v trojrozmernom (euklidovskom) priestore modelujeme ako orientovanú úsečku, rozhodujúce sú len dve skutočnosti – dĺžka úsečky a jej smerovanie; na konkrétnom umiestnení v danom priestore nezáleží.

[29] Formálne - deliaci pomer je definovaný ako pomer veľkostí vektorov, avšak vo všeobecne zavedenom afinnom priestore nie je definovaný skalárny súčin, ktorým by sme určili konkrétne veľkosti vektorov. Ak by to bolo v konkrétnom prípade potrebné, potom zavedieme skalárny súčin dodatočne.

[30] Vzor a jemu odpovedajúci obraz nemusia byť navzájom rovnobežné.

[31] Pripomíname: Ak sú dané body $O, A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{A}_n$ $k \in N$ a čísla $c_1, c_2, \dots, c_k \in R$, pre ktoré platí: $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$, potom bod $X = c_1(A_1 - O) + c_2(A_2 - O) + \cdots + c_k(A_k - O)$, nazývame **lineárnou kombináciou bodov** $A_1, A_2, \dots, A_k$ (s koeficientami $c_1, c_2, \dots, c_k$). Podmienka $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$ zabezpečí, že poloha bodu X nezávisí na voľbe bodu O. Analogicky, pri podmienke $\sum_{i=1}^{k} c_i = 0$ zase poloha vektora $c_1(A_1 - O) + c_2(A_2 - O) + \cdots +$

Ak $X = c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k$, pre $A_i \in \mathbb{A}_n$, $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$ a platí:

$$g: A_1 \longrightarrow A_1^*, g: A_2 \longrightarrow A_2^*, \ldots, g: A_k \longrightarrow A_k^*,$$

potom pre ľubovoľný bod $O \in \mathbb{A}_n$ a jeho obraz $g(O) = O^* \in \mathbb{A}_m^*$ pomocou asociovaného zobrazenia φ odvodíme[32]:

$$X^* = g(X) = g(X) - g(O) + g(O) = \varphi(\overrightarrow{OX}) + g(O)$$

Súčasne

$$\varphi(\overrightarrow{OX}) = \varphi(X - O) = \varphi(c_1.(A_1 - O) + c_2.(A_2 - O) + \cdots + c_k.(A_k - O) - O) =$$
$$= c_1.\varphi(A_1 - O) + c_2.\varphi(A_2 - O) + \cdots + c_k.\varphi(A_k - O) - g(O) =$$
$$= c_1.\big(g(A_1) - g(O)\big) + c_2.\big(g(A_2) - g(O)\big) + \cdots + c_k.\big(g(A_k) - g(O)\big) - g(O) =$$
$$= c_1.g(A_1) + c_2.g(A_2) + \cdots c_k.g(A_k) + (c_1 + c_2 + \cdots + c_k - 1).g(O) =$$
$$= c_1.g(A_1) + c_2.g(A_2) + \cdots c_k.g(A_k) + (0 - 1).g(O) = c_1.A_1^* + c_2.A_2^* + \cdots c_k.A_k^* - 1.g(O).$$

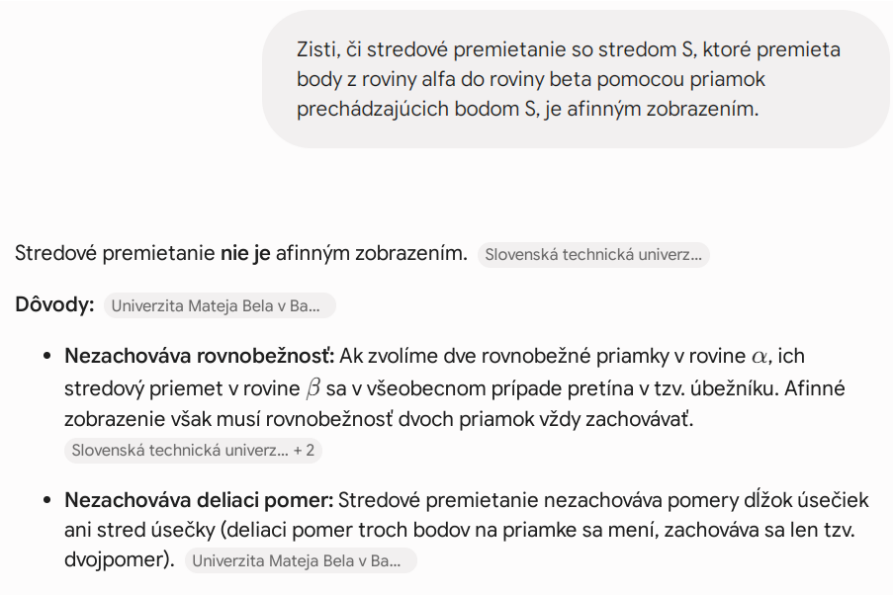
Z oboch odvodených rovností vyplýva:

$$X^* = \varphi(\overrightarrow{OX}) + g(O) = c_1.A_1^* + c_2.A_2^* + \cdots c_k.A_k^* + g(O) - g(O)$$

$$X^* = c_1.A_1^* + c_2.A_2^* + \cdots c_k.A_k^*$$

Úloha

Dané sú dve navzájom kolmé afinné roviny $\mathbb{A}_2, \mathbb{A}_2^*$ a bod S. Pomocou nástroja umelej inteligencie zistite, či zobrazenie premietajúce body X roviny $\mathbb{A}_2$ do bodov X^* roviny $\mathbb{A}_2^*$ tak, že body X, S, X^* sú kolineárne, je afinným zobrazením. Návod nájdete na obr. 2.3.



Obr. 2.3 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 20. augusta 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

$c_k(A_k - O)$ nezávisí na výbere bodu O. Často sa používa skrátený zápis: $X = c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k$. [3, str. 68-71]

[32] Používame asociované zobrazenie φ, pretože pracujeme s vektormi a môžeme používať operácie definované vo vektorovom priestore (sčitovať, násobiť skalárom, uvažovať o ich lineárnej kombinácii).

2.2 Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia

Príklad

Afinná transformácia $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ je definovaná ako osová súmernosť s osou o. Určte rovnice, ktorými pomocou súradníc ľubovoľného vzoru $X[x,y]$ vypočítate súradnice jeho obrazu $X^*[x^*,y^*]$. Vhodne zvoľte súradnicové sústavy a polohu osi súmernosti o.

Riešenie

Do euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$ položme súradnicovú sústavu O_{xy}, pomocou ktorej každému bodu $X \in \mathbb{E}_2$ priradíme súradnice $[x,y]$. Obrazu – bodu X^* priraďujeme súradnice $[x^*,y^*]$ podľa polohy novej súradnicovej $O^*_{x^*y*}$. Vzhľadom k tomu, že ide o afinnú transformáciu, bude jednoduchšie, ak súradnicové osi stotožníme.

a) Nech $x \equiv x^*, y = y^*$a os súmernosti o bude stotožnená so súradnicovými osami y, y^* (v súradnicovej sústave O_{xy} má rovnicu $x = 0$). Podľa definície osovej súmernosti sa vzoru $X[x,y]$ priradí obraz $X^*[x^*,y^*]$ tak, že úsečka XX^* je kolmá na os o a stred XX^* leží na osi o. Z toho vyplýva, že pre jednotlivé súradnice platí:

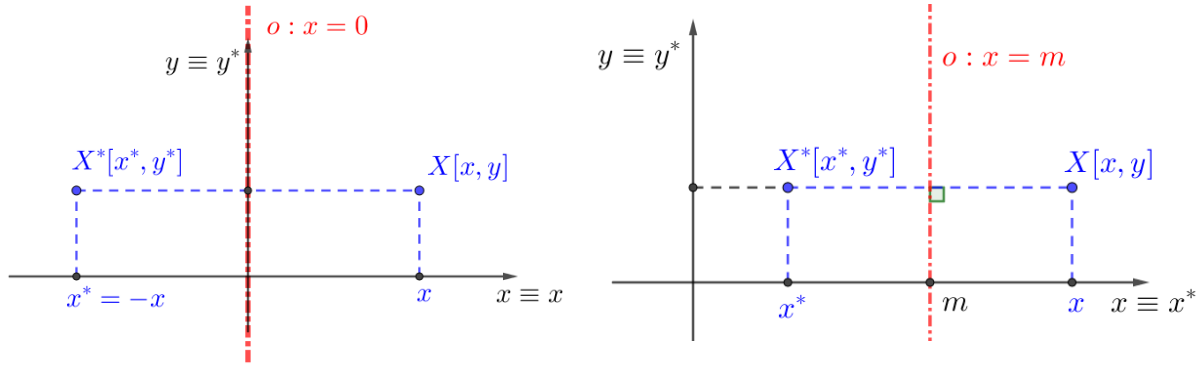
$$x^* = -x$$
$$y^* = y,$$

resp.

$$x^* = -1.x + 0.y + 0$$
$$y^* = 0.x + 1.y + 0.$$

Zapísané maticovo:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Obr. 2.4

b) Nech $x \equiv x^*, y = y^*$a os súmernosti o je určená v sústave O_{xy} má rovnicu $x = m, m \in R$. Pre súradnice platí[33]:

$$x^* = -x + 2m$$
$$y^* = y,$$

resp.

$$x^* = -1.x + 0.y + 2m$$
$$y^* = 0.x + 1.y + 0.$$

Zapísané maticovo:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Analogicky by sme odvodili rovnice, ak by sme položili $x \equiv x^*, y = y^*$ a $o: y = k, k \in R$.

[33] Ak stred úsečky XX^* leží na osi x, pre x −ovú súradnicu jeho stredu platí: $\frac{x+x^*}{2} = m$.

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}.$$

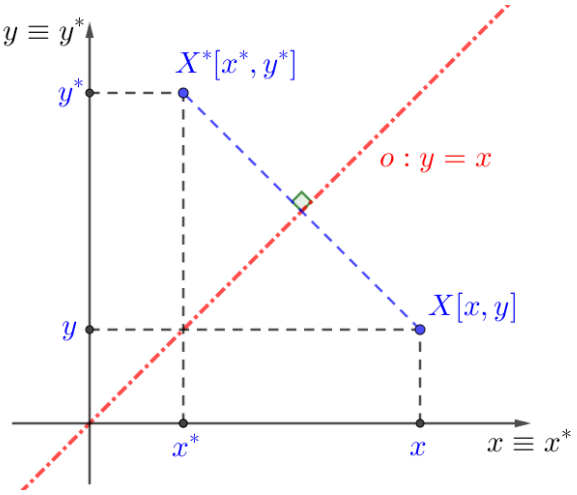
d) Nech $x \equiv x^*, y = y^*$ a os súmernosti má v súradnicovej sústave O_{xy} rovnicu $o: y = x$.

Odvodíme: [34]

$$x^* = y$$
$$y^* = x$$

Zapísané maticovo:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Obr. 2.5

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte rovnice osovej súmernosti v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$, ak os súmernosti o je daná rovnicou $y = kx + q, k, q \in R$.

Výsledok porovnajte s riešeniami predchádzajúceho príkladu. Návod nájdete na obr. 2.6.

Vypočítaj rovnice osovej súmernosti v euklidovskej rovine , ak os súmernosti má rovnicu y=kx+q. Zapíš maticovým zápisom.

Nech $P = [x, y]$ je ľubovoľný bod v rovine a $P' = [x', y']$ je jeho obraz v osovej súmernosti podľa priamky $p : y = kx + q$.

Pre transformáciu bodu P na P' platia dve geometrické podmienky:

1. **Kolmosť:** Smery úsečky PP' a osi p sú na seba kolmé, teda súčin ich smerníc je equal -1:

$$\frac{y' - y}{x' - x} \cdot k = -1 \implies x' - x + k(y' - y) = 0$$

2. **Stred na osi:** Stred úsečky $S = \left[\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right]$ leží na osi p:

$$\frac{y + y'}{2} = k \cdot \frac{x + x'}{2} + q \implies -k(x + x') + (y + y') = 2q$$

Vyriešením tejto sústavy dvoch rovníc pre neznáme x' a y' dostaneme analytické vyjadrenie transformácie:

Obr. 2.6 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 21. augusta 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Jednotlivé riešenia príkladu naznačujú, že analytické vyjadrenia sovej súmernosti v $\mathbb{E}_2$ je v tvare

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{A}.\mathbb{X} + \mathbb{B},$$

[34] Analogická situácia ako pri načrtnutí grafu inverznej funkcie – pomocou osovej súmernosti s osou 1. a 3. kvadrantu.

kde $\mathbb{X}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. [35]

Odvodíme analytické vyjadrenie afinného zobrazenia $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_m^*$ **všeobecne**.

Nech sú dané afinné priestory $\mathbb{A}_n, A_m^*$ tak, že:

a) v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$ je zavedená súradnicová sústava so začiatkom v bode P a súradnicovými vektormi $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$.

b) V afinnom priestore A_m^* je zavedená súradnicová sústava so začiatkom v bode Q a súradnicovými vektormi $d_1, \overrightarrow{d_2}, \dots, \overrightarrow{d_m}$.

Uvažujme afinné zobrazenie $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow A_m^*$ a ďalej nech:

c) obrazom bodu P je bod $P^* \in A_m^*$, pre ktorý platí:

$$P^*[b_1, b_2, \dots, b_m] = Q + b_1.\overrightarrow{d_1} + b_2.\overrightarrow{d_2} + \cdots + b_m.\overrightarrow{d_m},$$

d) obrazom vektora $\overrightarrow{e_i}, i = 1,2, \dots, n$ je vektor $\overrightarrow{e_i^*}$ zo zamerania afinného priestoru A_m^*, ktorý rozpíšeme ako lineárnu kombináciu vektorov $\overrightarrow{d_j}, j = 1,2, \dots, m.$

$$\overrightarrow{e_i^*} = \varphi(\overrightarrow{e_i}) = a_{i1}.\overrightarrow{d_1} + a_{i2}.\overrightarrow{d_2} + \cdots + a_{im}.\overrightarrow{d_m}.$$

Ak sa ľubovoľný bod $X[x_1, x_2, \dots, x_n] = P + x_1.\overrightarrow{e_1} + x_2.\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n.\overrightarrow{e_n}$ v zobrazení g zobrazí do bodu $X^*[x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*] = Q + x_1^*.\overrightarrow{d_1} + x_2^*.\overrightarrow{d_2} + \cdots + x_m^*.\overrightarrow{d_m}$, potom odvodíme:

$$X^*[x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*] = g(X) = g(P + x_1.\overrightarrow{e_1} + x_2.\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n.\overrightarrow{e_n}) =$$

$$= g(P) + \varphi(x_1.\overrightarrow{e_1} + x_2.\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n.\overrightarrow{e_n}) =$$

$$= P^* + \sum_{i=1}^{n} x_i.\varphi(\overrightarrow{e_i}) =$$

$$= Q + b_1.\overrightarrow{d_1} + b_2.\overrightarrow{d_2} + \cdots + b_m.\overrightarrow{d_m} + \sum_{i=1}^{n} x_i.\overrightarrow{e_i^*} =$$

$$= Q + \sum_{j=1}^{m} b_j.\overrightarrow{d_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i.\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.\overrightarrow{d_j}$$

Po rozpísaní do súradníc dostaneme **analytické vyjadrenie afinného zobrazenia** $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_m^*$ v tvare:

$$x_1^* = a_{11}.x_1 + a_{21}.x_2 + \cdots + a_{n1}.x_n + b_1$$

$$x_2^* = a_{12}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{n2}.x_n + b_2$$

$$\vdots$$

$$x_m^* = a_{1m}.x_1 + a_{2m}.x_2 + \cdots + a_{nm}.x_n + b_m$$

Zapísané pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{pmatrix}_{m\ x\ 1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\ x\ n} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\ x\ 1} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\ x\ 1}$$

a prehľadne:

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{A}^T.\mathbb{X} + \mathbb{B}$$

[35] Matica $\mathbb{A}$ je zámerne zapísaná ako **transponovaná** matica.

Maticu $\mathbb{A}$ nazývame **maticou afinného zobrazenia** $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_m^*$.

Analytické vyjadrenie **asociovaného zobrazenia** $\varphi: Z_n \longrightarrow Z_m^*$ odvodíme tak, že vektor $\vec{u} = X - Y$ a jeho obraz $\overrightarrow{u^*} = X^* - Y^*$ „naviažeme" na body X, Y a ich obrazy X^*, Y^*. Počítame:

$$\mathbb{U}^* = X^* - Y^* = \mathbb{A}^T.\mathbb{X} + \mathbb{B} - (\mathbb{A}^T.\mathbb{Y} + \mathbb{B}) = \mathbb{A}^T.(\mathbb{X} - \mathbb{Y}) = \mathbb{A}^T.\mathbb{U},$$

kde $\mathbb{U}^* = \begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{pmatrix}$, $\mathbb{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

V analytickom vyjadrení asociovaného zobrazenia $\varphi: Z_n \longrightarrow Z_m^*$ sa použije matica afinného zobrazenia.

2.3 Samodružné body a samodružné smery

Nech $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ je afinná transformácia.

Definícia (samodružný bod)

Hovoríme, že bod $X[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{A}_n$ je **samodružným bodom** regulárnej afinnej transformácie $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$, ak $g: X \longrightarrow X^* \equiv X$.

Z analytického vyjadrenia vyplýva: [36]

$$\mathbb{X} = \mathbb{A}^T.\mathbb{X} + \mathbb{B} \qquad /-\mathbb{A}^T.\mathbb{X}$$

$$\mathbb{X} - \mathbb{A}^T.\mathbb{X} = \mathbb{B}$$

$$\mathbb{X}.\mathbb{E} - \mathbb{A}^T.\mathbb{X} = \mathbb{B}$$

$$\mathbb{X}.(\mathbb{E} - \mathbb{A}^T) = \mathbb{B} \qquad /.(\mathbb{E} - \mathbb{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbb{X}.(\mathbb{E} - \mathbb{A}^T).(\mathbb{E} - \mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{E} - \mathbb{A}^T)^{-1}.\mathbb{B}$$

$$\mathbb{X} = (\mathbb{E} - \mathbb{A}^T)^{-1}.\mathbb{B}$$

Príklad ([4, str. 26])

Afinná transformácia $g: \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ je daná rovnicami

$$x_1^* = x_1 + x_2 - 2$$
$$x_2^* = 2x_1 - x_2 + 3.$$

Určte samodružné body.

Riešenie

a) Podľa zadania pracujeme s maticami:

$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E} - \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Pre inverznú maticu vypočítame :

$$(\mathbb{E} - \mathbb{A}^T)^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riešením je

[36] Počítame s maticami, preto označenie $\mathbb{E}$ je vyhradené pre jednotkovú maticu a index „-1" používame pre označenie inverznej matice. Násobenie matíc nie je komutatívne (záleží na poradí matíc v zápise ich súčinu). Násobenie musí byť prevediteľné (počet stĺpcov matice v súčine zapísanej ako prvej v poradí sa musí rovnať počtu riadkov matice, ktorá je v zápise súčinu uvedená ako druhá v poradí. Inak skalárny súčin „riadku a stĺpca" nie je možné vypočítať.

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\mathbb{E} - \mathbb{A}^T)^{-1}.\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Položíme $x_1^* = x_1, x_2^* = x_2$ a počítame:

$$x_1 = x_1 + x_2 - 2 \implies x_2 = 2$$
$$x_2 = 2x_1 - x_2 + 3 \implies x_1 = \frac{1}{2}$$

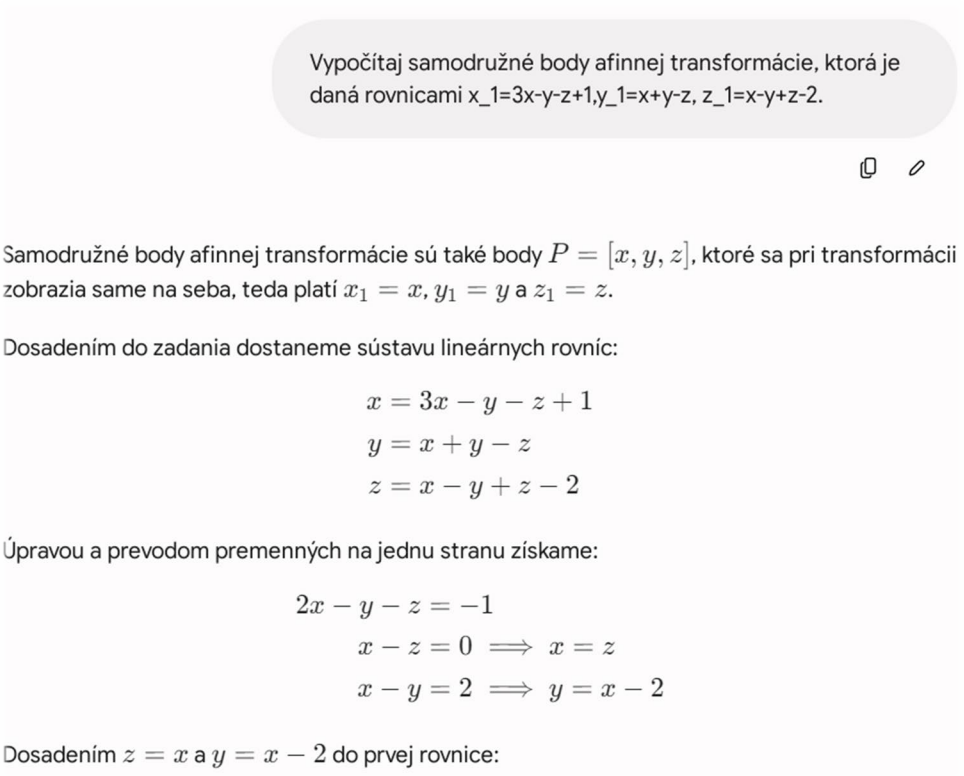
Samodružným bodom afinnej transformácie g je bod $X\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte samodružné body afinnej transformácie $g: \mathbb{A}_3 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ danej rovnicami:

$$x^* = 3x - y - z + 1$$
$$y^* = x + y - z$$
$$z^* = x - y + z - 2$$

Návod nájdete na obr. 2.7.



Vypočítaj samodružné body afinnej transformácie, ktorá je daná rovnicami x_1=3x-y-z+1,y_1=x+y-z, z_1=x-y+z-2.

Samodružné body afinnej transformácie sú také body $P = [x, y, z]$, ktoré sa pri transformácii zobrazia same na seba, teda platí $x_1 = x, y_1 = y$ a $z_1 = z$.

Dosadením do zadania dostaneme sústavu lineárnych rovníc:

$$x = 3x - y - z + 1$$
$$y = x + y - z$$
$$z = x - y + z - 2$$

Úpravou a prevodom premenných na jednu stranu získame:

$$2x - y - z = -1$$
$$x - z = 0 \implies x = z$$
$$x - y = 2 \implies y = x - 2$$

Dosadením $z = x$ a $y = x - 2$ do prvej rovnice:

Obr. 2.7 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 21. augusta 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Definícia (samodružný smer)

Hovoríme, že vektor $\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \in Z_n$ je **samodružným vektorom** regulárnej afinnej transformácie $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$, ak pre jeho obraz $\overrightarrow{u^*} = \varphi(\vec{u})$ platí: $\overrightarrow{u^*} = \lambda.\vec{u}$, kde $\lambda \in R - \{0\}$.

Z analytického vyjadrenia vyplýva: [37]

[37] Označenie $\mathbb{O}$ je vyhradené pre nulovú maticu.

$$\mathbb{U}^* = \mathbb{A}^T.\mathbb{U}$$

$$\lambda.\mathbb{U} = \mathbb{A}^T.\mathbb{U} \qquad /-\lambda.\mathbb{U}$$

$$\mathbb{O} = \mathbb{A}^T.\mathbb{U} - \lambda.\mathbb{U}$$

$$\mathbb{O} = (\mathbb{A}^T - \lambda.\mathbb{E}).\mathbb{U}$$

Po rozpísaní do súradníc, posledná rovnica vyjadruje homogénnu sústavu n rovníc s neznámymi $u_1, u_2, \dots, u_n$ a **parametrom** λ. Homogénna sústava rovníc má triviálne riešenie, pre ktoré platí:

$$u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0.$$

Nulový vektor však nie je bázou jednorozmerného vektorového priestoru, preto hľadáme netriviálne riešenie a položíme determinant matice $\mathbb{A}^T - \lambda.\mathbb{E}$ rovný 0.

$$|\mathbb{A}^T - \lambda.\mathbb{E}| = 0$$

predstavuje algebrickú rovnicu n –tého stupňa s neznámou λ. Rovnicu nazývame charakteristická rovnica asociovaného zobrazenia φ. Ak je to možné, rovnicu vyriešime,[38] dosadíme parameter $\lambda \neq 0$ do homogénnej sústavy a sústavu následne vyriešime vzhľadom na neznáme $u_i, i = 1,2, \dots, n$.

Príklad

Afinná transformácia $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ je daná rovnicami

$$x^* = -x$$
$$y^* = y.$$

Určte samodružné smery asociovaného zobrazenia φ.

Riešenie

Asociované zobrazenie $\varphi: Z_n \longrightarrow Z_n$ má rovnice:

$$u_1^* = -1.u_1 + 0.u_2$$
$$u_2^* = 0.u_1 + 1.u_2$$

Z toho pre samodružný smer a jeho násobok $\lambda \neq 0$ vyplýva:

$$\lambda.u_1 = -1.u_1 + 0.u_2$$
$$\lambda.u_2 = 0.u_1 + 1.u_2$$

Odvodíme:

$$0 = (-1 - \lambda).u_1 + 0.u_2$$
$$0 = 0.u_1 + (1 - \lambda).u_2$$

Charakteristickú rovnicu dostaneme pomocou determinantu:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1+\lambda).(1-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1$$

a) Pre $\lambda_1 = -1$ dostaneme homogénnu sústavu

$$0 = (-1+1).u_1 + 0.u_2$$
$$0 = 0.u_1 + (1+1).u_2$$

ktorej riešením je vektor $\overrightarrow{u_1} = (t, 0)$.

Ak by sme položili $t = 0$, výsledkom by bol nulový vektor (neurčuje smer), preto množinu hodnôt parametra t obmedzíme a platí: $t \in R - \{0\}$

b) Pre $\lambda_2 = 1$ odvodíme analogicky:

[38] Vo všeobecnosti, pre algebrické rovnice stupňa $n > 4$ neexistujú vzorce na výpočet reálnych koreňov, ak tieto korene existujú.

$$0 = (-1-1).u_1 + 0.u_2$$
$$0 = 0.u_1 + (1-1).u_2$$

ktorej riešením je vektor $\overrightarrow{u_2} = (0, s)$.

Ak by sme položili $s = 0$, výsledkom by bol nulový vektor, preto platí: $s \in R - \{0\}$.

Urobíme skúšku:

a) dosadíme súradnice vektoru $\overrightarrow{u_1} = (t, 0)$ do rovníc asociovaného zobrazenia φ a overíme rovnosť $\overrightarrow{u_1^*} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} = (-t, 0)$:

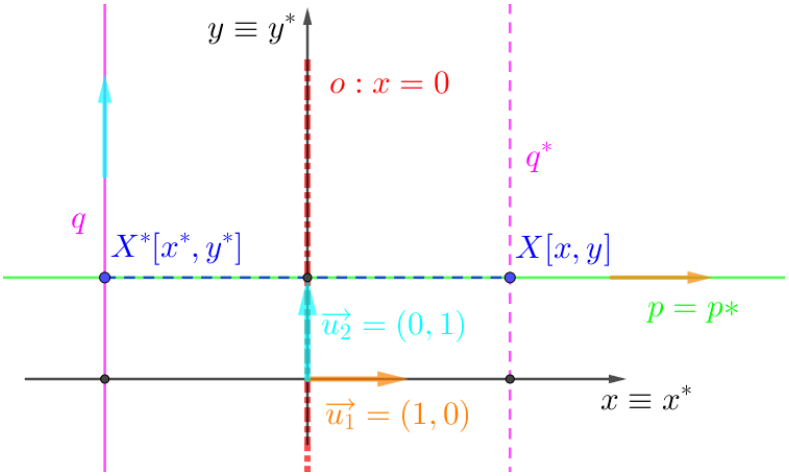
$$u_1^* = -1.t + 0.0 = -t$$
$$u_2^* = 0.t + 1.0 = 0$$

b) Analogicky pre $\overrightarrow{u_2} = (0, s)$ a $\overrightarrow{u_2^*} = \lambda_2.\overrightarrow{u_1} = (0, s)$:

$$u_1^* = -1.0 + 0.s = 0$$
$$u_2^* = 0.0 + 1.s = s$$

Existencia samodružných vektorov vplýva na geometrickú podstatu afinnej transformácie.
Afinná transformácia je osovou súmernosťou, ktorej os súmernosti je totožná so súradnicovou osou y.

a) Ak kvôli názornosti položíme $t = 1$, potom vektor $\overrightarrow{u_1} = (1,0)$ je smerovým vektorom každej priamky kolmej na os súmernosti o.
Obrazom takejto priamky p je priamka p^*, ktorej poloha je totožná so vzorom, ale v zobrazení odpovedajúce dvojice bodov (vzor – obraz) ležia v navzájom opačných polrovinách (až na výnimku bodov priamky o, ktoré sú samodružné).



Obr. 2. 8

b) Pre $s = 1$ je situácia analogická. Vektor $\overrightarrow{u_2} = (0,1)$ je smerovým vektorom každej priamky , ktorá je rovnobežná s osou súmernosti o a táto priamka má obraz rovnobežný s osou o.
Opäť, vzor a obraz ležia v navzájom opačných polrovinách (výnimka: obrazom osi o je totožná[39] priamka).

[39] Priamky a, b sú totožné vtedy a len vtedy, keď každý bod priamky a je súčasne bodom priamky b a opačne; každý bod priamky b je súčasne bodom priamky a. Rovnobežné priamky tejto podmienke nevyhovujú, nemajú spoločné body. Rovnobežné priamky nie sú totožné.

2.4 Nadrovinová afinita

Nadrovinová afinita je špeciálne afinné zobrazenie.

Definícia (nadrovinová afinita)

Afinná transformácia $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ sa nazýva **nadrovinová afinita**, ak existuje aspoň jedna nadrovina, ktorej body sú samodružné.

Príkladom nadrovinovej afinity je osová súmernosť v rovine, kde nadrovinou samodružných bodov je os súmernosti. Uvedieme ešte iný príklad.

Príklad

Afinná transformácia $g: \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ je daná rovnicami

$$x^* = y$$
$$y^* = 2x - y.$$

Určte samodružné body a zistite, či ide o nadrovinovú afinitu.

Riešenie

Počítame:

$$x = y$$
$$y = 2x - y \implies x = y$$

Riešením je priamka s rovnicou $y = x$ (os 1. a 3. súradnicového kvadrantu). Afinná transformácia je nadrovinovou súmernosťou. [40]

Nech v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$ je daná nadrovina všeobecnou rovnicou

$$h: a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n.x_n + a_0 = 0,$$

kde aspoň jeden z koeficientov $a_i \neq 0$ pre $i = 1,2, \dots, n$.

Ak v priestore $\mathbb{A}_n$ zvolíme dva navzájom rôzne afinné body $P[p_1, p_2, \dots, p_n], Q[q_1, q_2, \dots, q_n]$ neležiace v nadrovine h, potom existuje práve jedna nadrovinová afinita $g: \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$, kde :

a) nadrovina h je samodružná nadrovina,
b) bod P je vzorom bodu Q

a **symbolická rovnica nadrovinovej afinity** g je v tvare:

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{X} + \frac{h(\mathbb{X})}{h(P)} \cdot (Q - P),$$

kde $\mathbb{X}^*[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$, $\mathbb{X}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \dots, q_n - p_n)$,

$h(\mathbb{X}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n.x_n + a_0$, $h(P) = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_n.p_n + a_0$.

Dôkaz vynechávame. [4, str. 23]

Príklad

Napíšte rovnice nadrovinovej afinity $g: \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ so samodružnou nadrovinou $h: x - y = 0$ tak, aby sa bodu $P[2,0]$ priradil obraz $Q[0,4]$.

Riešenie

[40] Afinná transformácia nie je osovou súmernosťou v rovine, napr. nemá samodružné vektory. Predstavu o zobrazení získame nakreslením ilustračného obrázku, v ktorom (podľa rovníc $x^* = y, y^* = 2x - y$) bodom $A[1,0], B[2,0], C[1,1]$ priradíme postupne obrazy $A^*[0,2], B^*[0,4], C^*[1,1]$.

Platí:

$$\mathbb{X}^*[x^*, y^*], \quad \mathbb{X}[x, y], \quad Q - P = (-2, 4), \quad h(\mathbb{X}) = x - y, \quad h(P) = 2 - 0 = 2.$$

Symbolickú rovnicu rozpíšeme do súradníc:

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{X} + \frac{h(\mathbb{X})}{h(P)} \cdot (Q - P)$$

$$\Updownarrow$$

$$[x^*, y^*] = [x, y] + \frac{x - y}{2} \cdot (-2,4)$$

$$\Downarrow$$

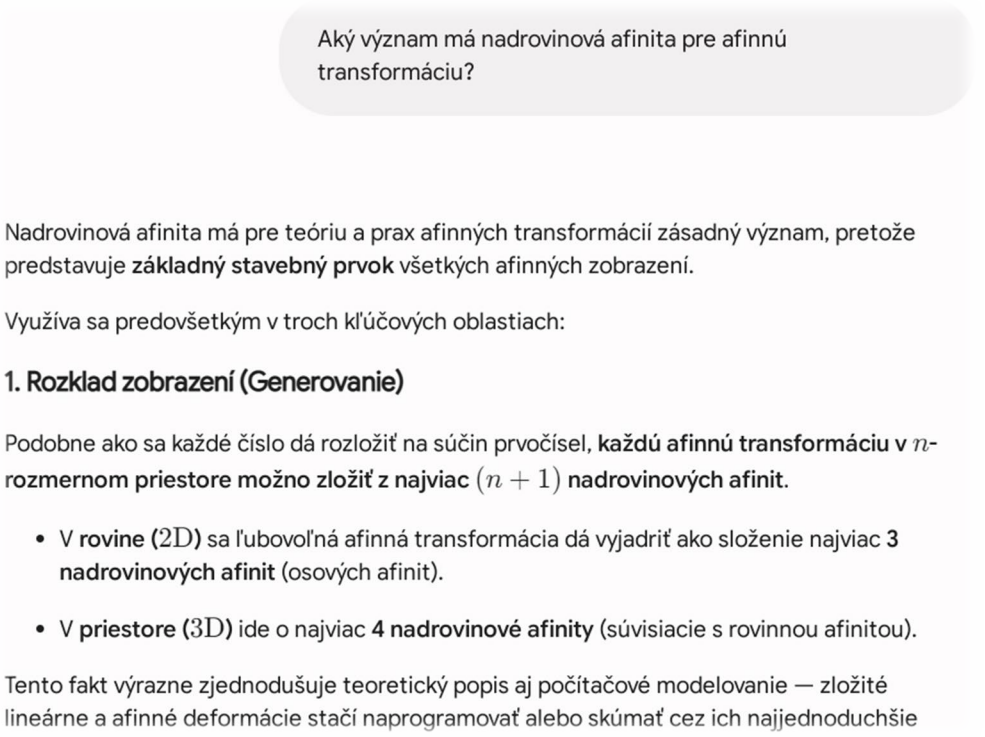
$$x^* = x + \frac{x - y}{2} \cdot (-2) = y$$

$$y^* = y + \frac{x - y}{2} \cdot 4 = 2x - y$$

Porovnajte výsledok s riešením predchádzajúceho príkladu a poznámkou č. 40.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie zistite, aký význam má nadrovinová afinita pre afinnú transformáciu a vyžiadajte si konkrétne ukážky. Výsledok konfrontujte s odbornou literatúrou. Návod nájdete na obr. 2.9.



Obr. 2.9 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 22. augusta 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

2.5 Cvičenia a úlohy

1. Napíšte afinné zobrazenie $g: \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_1^*$, ktoré zobrazuje body $A[0,0] \longrightarrow A^*[1], B[1,0] \longrightarrow B^*[3]$ a $C[0,1] \longrightarrow C^*[-1]$. Zistite obraz bodu $D[2,-3]$ a vzor bodu $M^*[5]$.
2. Určte maticu afinného zobrazenia $g: \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_2^*$, ktoré zobrazí $A[1,1] \longrightarrow A^*[2,4], B[3,1] \longrightarrow B^*[8,2]$ a $C[1,4] \longrightarrow C^*[2,3]$. Určte obraz ťažiska T trojuholníka ABC.

3. Napíšte rovnice afinného zobrazenia $g: \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_2^*$, ktoré zobrazí $A[1,1] \longrightarrow A^*[-1,1], B[1,2] \longrightarrow B^*[-2,1]$ a $C[2,1] \longrightarrow C^*[-1,3]$. Vypočítajte maticu zobrazenia, určte samodružné body a samodružné smery.

4. Pomocou nástroja umelej inteligencie zistite analytické vyjadrenie afinnej transformácie, ktorá zobrazuje

   a) vrcholy A, B, C trojuholníka ABC postupne do vrcholov A_1, B_1, C_1 trojuholníka $A_1B_1C_1$(v uvedenom poradí),

   b) vrcholy A_1, B_1, C_1 trojuholníka $A_1B_1C_1$ postupne do vrcholov A, B, C trojuholníka ABC A_1, B_1, C_1 trojuholníka $A_1B_1C_1$(v uvedenom poradí)

   a určte matice oboch zobrazení. Aký je ich súčin a čo z výsledku vyplýva?

   c) V oboch prípadoch zistite, či existujú samodružné body a samodružné smery odpovedajúcich asociovaných zobrazení. Súradnice príslušných bodov zistite z obr. 2.10.

5. Vypočítajte samodružné body afinného zobrazenia daného rovnicami a určte aj samodružné smery asociovaného zobrazenia:

   a) $g: \mathbb{A}_3 \longrightarrow \mathbb{A}_3; \quad x^* = -x, \quad y^* = y + 3, \quad z^* = z - 1$

   b) $g: \mathbb{A}_3 \longrightarrow \mathbb{A}_3; \quad x^* = x - y + 2z - 7, \quad y^* = y + z - 5, \quad z^* = x - 2y + z + 6$

6. Napíšte rovnice nadrovinovej afinity so samodružnou nadrovinou h a určujúcimi bodmi P, Q, kde $P \longrightarrow Q$:

   a) $h: x - 3y + 1 = 0, \; P[4,0], Q[2,0]$

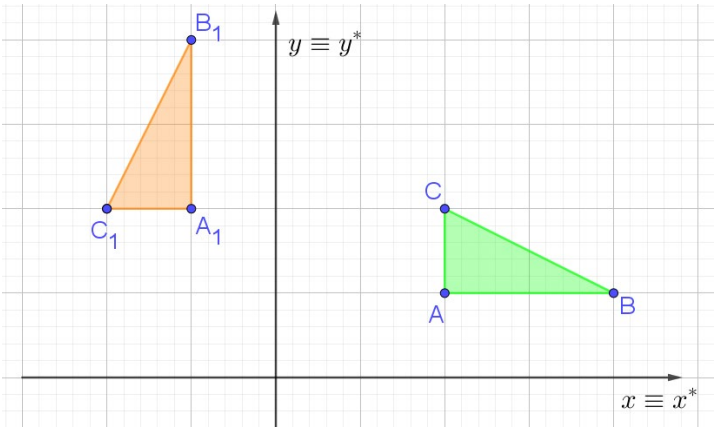
   b) $h: x + y + z - 1 = 0, P[1,1,0], Q[0,0,2]$

7. Napíšte rovnice afinnej transformácie, v ktorej sú oba body $A[1,2], B[2,-1]$ samodružnými bodmi.

8. Pomocou nástroja umelej inteligencie v afinnom zobrazení $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow E_2^*$ s rovnicami

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   nájdite obraz kužeľosečky danej všeobecnou rovnicou $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.



Obr. 2.10

9. Pomocou nástroja umelej inteligencie určte afinné zobrazenie, ktoré v $\mathbb{E}_3$ zobrazí kocku do romboédra (šikmý štvorboký hranol, ktorého steny sú navzájom zhodné kosoštvorce). Určte maticu zobrazenia a jej determinant. Určte vzťah medzi hodnotou determinantu, dĺžkou hrany kocky a hrany romboédra. Aký útvar je obrazom guľovej plochy opísanej kocke?

***Quod discis, tibi discis*.**
(Čo sa učíš, učíš sa pre seba).
Petronius

3 Zhodné zobrazenia

Zhodné zobrazenia sú špeciálnym prípadom afinných zobrazení, ktoré pracujú s bodmi a vektormi euklidovských priestorov.

Definícia (zhodné zobrazenie)

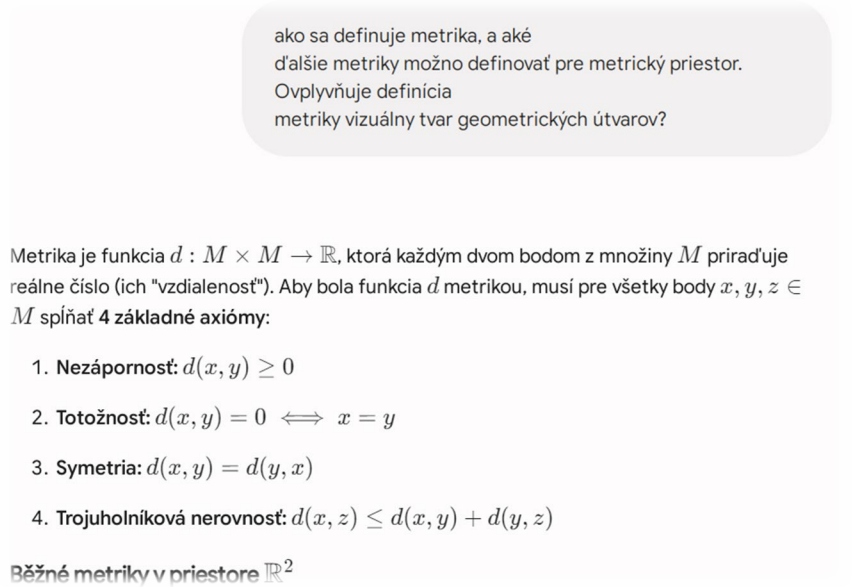
Afinné zobrazenie $g: \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}_m^*$ sa nazýva **zhodným zobrazením**, ak pre ľubovoľné body $X, Y \in \mathbb{E}_n$ a ich obrazy $X^*, Y^* \in \mathbb{E}_m^*$ platí:

$$|X, Y| = |X^*, Y^*|.$$

Zhodné zobrazenie „zachováva vzdialenosť bodov“ (vzdialenosť vzorov sa rovná vzdialenosti ich odpovedajúcich obrazov).[41] To znamená, že je zavedený spôsob, ako určiť vzdialenosť dvoch bodov. Ako sme už uviedli, v učebnici používame **štandardnú euklidovskú metriku** a štandardne definovaný skalárny súčin.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie zistite, ako sa definuje metrika, a aké ďalšie metriky možno definovať pre metrický priestor. Ovplyvňuje definícia metriky vizuálny tvar geometrických útvarov? Návod nájdete na obr. 2.11.



Obr. 2.11 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 22. augusta 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Analogicky (ako pri všeobecne definovaných afinných zobrazeniach) platí, že:

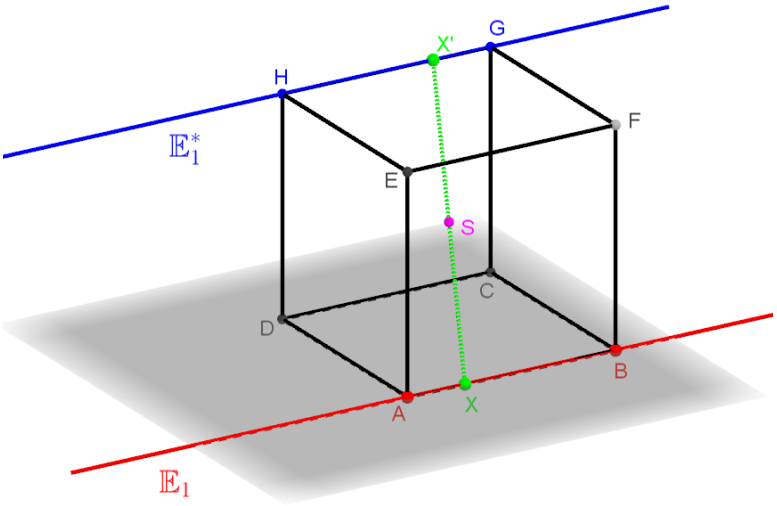
- dimenzie n, m sa nemusia rovnať, napr. $g: \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_2^*$ určené predpisom $g: X[x] \longrightarrow X^*[x, 0]$. Pre $A[a] \longrightarrow A^*[a, 0], B[b] \longrightarrow B^*[b, 0]$ platí: [42]

[41] V odbornej literatúre sa stretneme s formuláciou, že zhodné zobrazenie *„zachováva dĺžky úsečiek“*.
[42] Zápis $|A, B|$ označujeme ako vzdialenosť bodov A, B; zápis $|a - b|$ absolútnu hodnotu rozdielu súradníc.

$$|A,B| = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|, \quad |A^*,B^*| = \sqrt{(a-b)^2+(0-0)^2} = |a-b|.$$

- Podmienka $n = m$ nezaručuje, že euklidovské priestory $\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n^*$ musia byť totožné, napr. pomocou drôteného modelu kocky $ABCDEFGH$ určíme euklidovské priamky AB, GH ako príslušné priestory $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_1^*$. Zhodné zobrazenie $g: \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_1^*$ definujeme: bodu $X \in \mathbb{E}_1$ priradíme obraz $X^* \in \mathbb{E}_1^*$ tak, že $X^* \in SX \cap GH$, kde S je stred danej kocky (obr. 3.1).

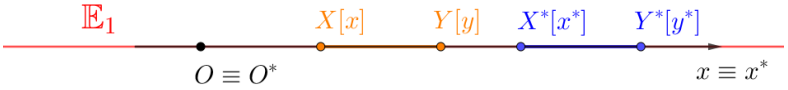
- Ak $\mathbb{E}_n \equiv \mathbb{E}_n^*$, zhodné zobrazenie nazývame **zhodnou transformáciou**, niekedy len stručne **zhodnosťou**. Pre $n = 1$ hovoríme o zhodnosti na (euklidovskej) priamke; pre $n = 2$ zase o zhodnosti v (euklidovskej) rovine; atď.
  Názornú ukážku zhodnosti v rovine sme už mali – bola to osová súmernosť. Intuitívnym príkladom zhodnosti v $\mathbb{E}_3$ môže byť súmernosť podľa roviny; posunutie alebo aj tzv. „skrutkovitý pohyb“ pri zakrúcaní skrutky do dreva, ...



Obr. 3.1

3.1 Zhodnosti na euklidovskej priamke

Analyzujme zhodnosť $g: \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_1^* \equiv \mathbb{E}_1$ danú analytickým vyjadrením[43] $x^* = a_{11}.x + b_1$.



Obr. 3.2

Ak položíme $g: X \longrightarrow X^*, g: Y \longrightarrow Y^*$, kde $X[x], Y[y], X^*[x^*], Y^*[y^*]$, potom platí:

$$|X^*,Y^*| = \sqrt{(x^*-y^*)^2} = |x^*-y^*| =$$

$$= |(a_{11}.x + b_1) - (a_{11}.y + b_1)| = |a_{11}|.|x-y| = |a_{11}|.|X,Y|.$$

Z definície zhodnosti vyplýva, že $|a_{11}| = 1$.

a) Položme $a_{11} = 1$ a skúmajme analytické vyjadrenie $x^* = 1x + b_1$. Rozlíšime dve možnosti pre hodnotu b_1:

$b_1 = 0$	$b_1 \neq 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$

[43] Analogicky použijeme stotožnené súradnicové osi $x \equiv x^*$ a ich začiatky $O \equiv O^*$.

$x^* = x$ • každý bod je samodružný	$x^* = x + b_1$ • neexistuje samodružný bod. Samodružné smery určíme z asociovaného zobrazenia. $u_1^* = \lambda . u_1 = u_1 \Longrightarrow 0 = (1-\lambda)u_1 \Longrightarrow \lambda = 1$ Z homogénnej rovnice $0 = 0 . u_1$ odvodíme: $u_1 = t, t \in R - \{0\}$. Z toho vyplýva, že v tomto zobrazení je každý smer samodružný.

Zobrazenie s analytickým vyjadrením:

- $x^* = x$ nazývame **identita** (na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$), ktorú označíme $\mathcal{I}$.
- $x^* = x + b_1, b_1 \neq 0$ sa nazýva **posunutie** (na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$). Označíme $\mathcal{S}_{\vec{u}}$.

b) Položme $a_{11} = -1$ a skúmajme analytické vyjadrenie $x^* = -x + b_1$. Rozlíšime dve možnosti pre hodnotu b_1:

$b_1 = 0$ $\Downarrow$ $x^* = -x$ • samodružný je len jeden bod $O[0]$.	$b_1 \neq 0$ $\Downarrow$ $x^* = -x + b_1$ • samodružný bod je bod $S\left[\frac{b_1}{2}\right]$.

Oba prípady možno zlúčiť do jedného záveru- existuje jediný samodružný bod $S\left[\frac{b_1}{2}\right], b_1 \in R$.

Samodružné smery určíme z asociovaného zobrazenia.

$$u_1^* = \lambda . u_1 = -u_1 \Longrightarrow 0 = (-1-\lambda)u_1 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Z homogénnej rovnice

$$0 = 0 . u_1$$

odvodíme: $u_1 = s, s \in R - \{0\}$. Z toho vyplýva, že aj v tomto zobrazení je každý smer samodružný, ale vektoru $\vec{u}$ na priamke sa vždy priradí opačný vektor $\overrightarrow{u^*} = -\vec{u}$.

Zobrazenie s analytickým vyjadrením $x^* = -x + b_1, b_1 \neq 0$ sa nazýva **stredová súmernosť** (na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$) so stredom $S\left[\frac{b_1}{2}\right]$. Označíme ju ako $\mathcal{S}_S$. Stredová súmernosť je **nadrovinová afinita** v $\mathbb{E}_1$ (samodružná nadrovina je teraz bod - stred stredovej súmernosti).

Zobrazenia ako identita a posunutie v $\mathbb{E}_1$ sú tzv. **priame zhodnosti** (vektor a jeho obraz sú súhlasne orientované).

Stredová súmernosť v $\mathbb{E}_1$ je tzv. **nepriama zhodnosť**, pretože pre ľubovoľný vektor a jeho a jeho obraz platí, že sú opačné (nesúhlasne orientované) vektory. Navyše, stredová súmernosť je **nadrovinová afinita** v $\mathbb{E}_1$ (samodružná nadrovina je teraz jeden bod - stred stredovej súmernosti).

3.2 Grupa zhodností na $\mathbb{E}_1$

Pokiaľ ide o počet zhodností na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$:

- **identita** $\mathcal{J}$ je **jediná** zhodnosť na (euklidovskej) priamke $\mathbb{E}_1$,

- rôznych posunutí existuje nekonečne veľa, pretože v rovnici $x^* = x + b_1$ môžeme hodnotu $b_1 \in R$ zvoliť ľubovoľne. Analogicky, na $\mathbb{E}_1$ existuje nekonečne veľa (nespočítateľne) stredových súmerností.

Zhodností na $\mathbb{E}_1$ je nekonečne veľa. Zobrazenia možno skladať a môžeme sa spýtať, aký bude výsledok.

Uvažujme o dvoch ľubovoľných zhodnostiach g_1 a g_2 na priamke $\mathbb{E}_1$, ktoré budeme skladať pomocou operácie " $\circ$ ".

Označenie $g_2 \circ g_1 : X \longrightarrow X^{**}$

znamená, že zhodnosť g_1 priradí vzoru X obraz X^* a následne zhodnosť g_2 bodu X^* priradí „konečný obraz“ - bod X^{**}. Rozpísané postupne: $g_1 : X \longrightarrow X^* \ \wedge \ g_2 : X^* \longrightarrow X^{**}$.

Zhodnosti g_1, g_2 môžeme postupne nahradzovať jednotlivými zhodnosťami $\mathbb{E}_1$:

a) $g_1 \equiv \mathcal{I}$, kde $\mathcal{I} : x^* = x$
   - $g_2 \equiv \mathcal{I}$, kde $\mathcal{I} : x^{**} = x^*$
   - $g_2 \equiv \mathcal{S}_{\vec{u}}$, kde $\mathcal{S}_{\vec{u}} : x^{**} = x^* + b_1, b_1 \neq 0$
   - $g_2 \equiv \mathcal{S}_S$, kde $\mathcal{S}_S : x^{**} = -x^* + b_1$

b) $g_1 \equiv \mathcal{S}_{\vec{u}}$, kde $\mathcal{S}_{\vec{u}} : x^* = x + b_1, b_1 \neq 0$
   - $g_2 \equiv \mathcal{I}$, kde $\mathcal{I} : x^{**} = x^*$
   - $g_2 \equiv \mathcal{S}_{\vec{u}}$, kde $\mathcal{S}_{\vec{u}} : x^{**} = x^* + b_1, b_1 \neq 0$
   - $g_2 \equiv \mathcal{S}_S$, kde $\mathcal{S}_S : x^{**} = -x^* + b_1$

c) $g_1 \equiv \mathcal{S}_S$, kde $\mathcal{S}_S : x^* = -x + b_1$
   - $g_2 \equiv \mathcal{I}$, kde $\mathcal{I} : x^{**} = x^*$
   - $g_2 \equiv \mathcal{S}_{\vec{u}}$, kde $\mathcal{S}_{\vec{u}} : x^{**} = x^* + b_1, b_1 \neq 0$
   - $g_2 \equiv \mathcal{S}_S$, kde $\mathcal{S}_S : x^{**} = -x^* + b_1$

Ak uvažujeme všeobecne, potom pri označení:

$$g_1 : x^* = \pm x + b_1, \qquad g_2 : x^{**} = \pm x^* + b_2$$

odvodíme:

$$x^{**} = \pm x^* + b_2 = \pm(\pm x + b_1) + b_2 = \pm x \pm b_1 + b_2.$$

Z výsledku vyplýva:

a) zložením dvoch zhodností je opäť zhodnosť na priamke $\mathbb{E}_1$,

b) skladanie zhodností je asociatívne,

c) v množine všetkých zhodností na priamke $\mathbb{E}_1$ existuje jediné zobrazenie, ktoré má funkciu neutrálneho prvku a je ním identita $\mathcal{I}$,

d) Ku každému zobrazeniu existuje inverzné zobrazenie (identita a stredová súmernosť sú tzv. involutorné zhodnosti[44] ; inverzným zobrazením k posunutiu $g : x^* = x + b_1, b_1 \neq 0$ je zhodnosť: $g^{-1} : x = x^* - b_1$, ktoré je tiež posunutím na $\mathbb{E}_1$).

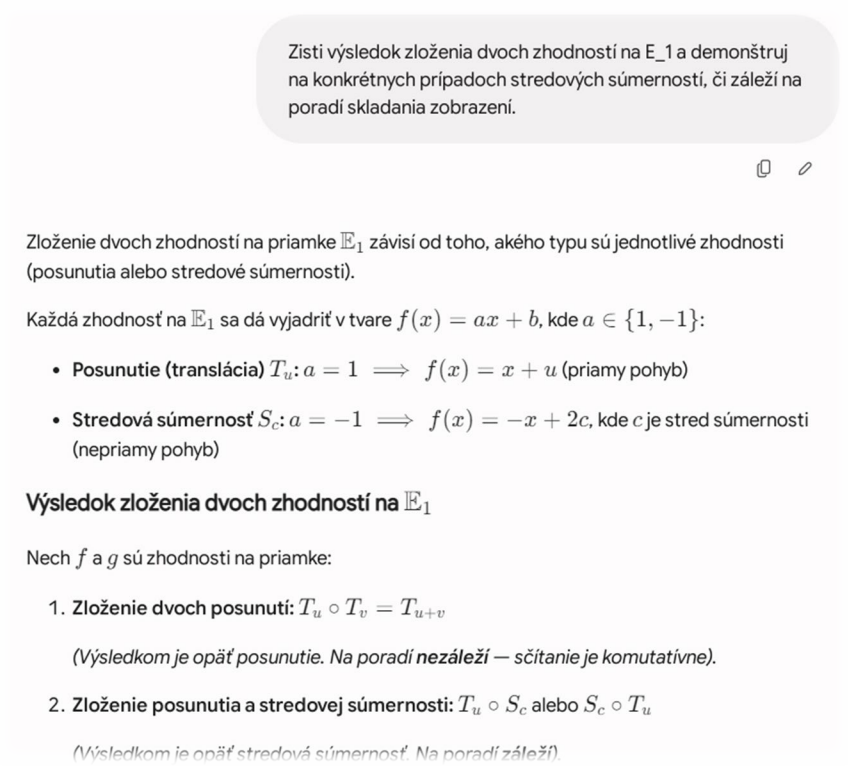
Množina všetkých zhodností na $\mathbb{E}_1$ vzhľadom na operáciu skladania zobrazení je **grupa**. Táto grupa nie je komutatívna.

[44] Hovoríme, že zobrazenie $g : \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_1$ je **involutorné**, ak $\forall X \in \mathbb{E}_1 : g : X \longrightarrow X^*$ a súčasne $g : X^* \longrightarrow X$. Voľne povedané, vzor a obraz v danom zobrazení sú „zameniteľné“.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie zistite výsledok zloženia dvoch zhodností na $\mathbb{E}_1$. Taktiež na konkrétnych prípadoch stredových súmerností preskúmajte, či záleží na poradí skladania zhodností. Existuje v danej grupe nejaká podgrupa?

Návod nájdete na obr. 3.3.



Obr. 3.3 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 23. augusta 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

3.3 Zhodnosti v euklidovskej rovine

Uvažujme všeobecne o zhodnosti $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ s analytickým vyjadrením: $\mathbb{X}^* = \mathbb{A}^T.\mathbb{X} + \mathbb{B}$,

kde $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Určíme podmienky pre prvky matice $\mathbb{A}^T$ tak, aby išlo o zhodnosť v rovine.

Ak $g: X[x_1, x_2] \longrightarrow X^*[x_1^*, x_2^*]$, $g: Y[y_1, y_2] \longrightarrow Y^*[y_1^*, y_2^*]$, potom z podmienky pre zhodnosť platí rovnosť:

$$|X^*, Y^*|^2 = (x_1^* - y_1^*)^2 + (x_2^* - y_2^*)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = |X, Y|^2$$

a súčasne pre body X, X^*:

$$x_1^* = a_{11}x_1 + a_{21}.x_2 + b_1$$

$$x_2^* = a_{12}x_1 + a_{22}.x_2 + b_2.$$

Analogicky pre body Y, Y^*:

$$y_1^* = a_{11}.y_1 + a_{21}y_2 + b_1$$

$$y_2^* = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$$

Dosadíme za $x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*$ do vyššie uvedenej rovnosti a odvodíme:

$$|X^*, Y^*|^2 = (x_1^* - y_1^*)^2 + (x_2^* - y_2^*)^2 = \cdots =$$

$$= (a_{11}^2 + a_{12}^2).(x_1 - y_1)^2 + (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}).2.(x_1 - y_1).(x_2 - y_2) + (a_{21}^2 + a_{22}^2).(x_2 - y_2)^2.$$

Porovnaním koeficientov medzi ľavou a pravou stranou rovnosti, kde

$$1.(x_1 - y_1)^2 + 1.(x_2 - y_2)^2 = |X, Y|^2,$$

dostaneme: $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 = a_{21}^2 + a_{22}^2$ a $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0.$

Ide o riešenie sústavy 3 (nelineárnych) rovníc so 4 neznámymi, preto položíme $a_{11} = t, t \in R$ a platí:

$$a_{12}^2 = 1 - t^2$$
$$a_{11}a_{21} = -a_{12}a_{22} \quad /^2$$
$$a_{11}^2 a_{21}^2 = a_{12}^2 a_{22}^2$$
$$\vdots$$
$$t^2(a_{21}^2 + a_{22}^2) = a_{22}^2 \Leftrightarrow t^2 = a_{22}^2$$
$$\Updownarrow$$
$$a_{11}^2 = a_{22}^2 \quad \Leftrightarrow a_{11} = \pm a_{22}$$

Následne z rovnosti $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 = a_{21}^2 + a_{22}^2$ vyplýva, že $a_{12} = \pm a_{21}$.

Do úvahy tak prichádzajú štyri možnosti pre maticu $\mathbb{A}^T$:

$$\mathbb{A}_1^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_3^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_1^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix},$$

ktorých determinanty sú:

$$\left|\mathbb{A}_1^T\right| = a_{11}^2 - a_{12}^2, \quad \left|\mathbb{A}_2^T\right| = -a_{11}^2 - a_{12}^2, \quad \left|\mathbb{A}_3^T\right| = a_{11}^2 + a_{12}^2, \quad \left|\mathbb{A}_4^T\right| = -a_{11}^2 + a_{12}^2.$$

Hodnotu determinantu pre zhodnosť určíme pomocou asociovaného zobrazenia.

Ak položíme $\overrightarrow{\mathbb{U}^*} = \mathbb{X}^* - \mathbb{Y}^*, \overrightarrow{\mathbb{U}} = \mathbb{X} - \mathbb{Y}$, potom platí:

$$\left|\overrightarrow{\mathbb{U}^*}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathbb{U}^*}.\overrightarrow{\mathbb{U}^*}\right| = |\mathbb{X}^* - \mathbb{Y}^*|^2 = |\mathbb{A}^T.\mathbb{X} + \mathbb{B} - \mathbb{A}^T.\mathbb{Y} - \mathbb{B}|^2 = |\mathbb{A}^T|^2.|\mathbb{X} - \mathbb{Y}|^2 = |\mathbb{A}^T|^2.\left|\overrightarrow{\mathbb{U}}\right|^2$$

Z poslednej rovnosti vyplývajú dve možnosti:

$$|\mathbb{A}^T| = 1 \text{ alebo } |\mathbb{A}^T| = -1.$$

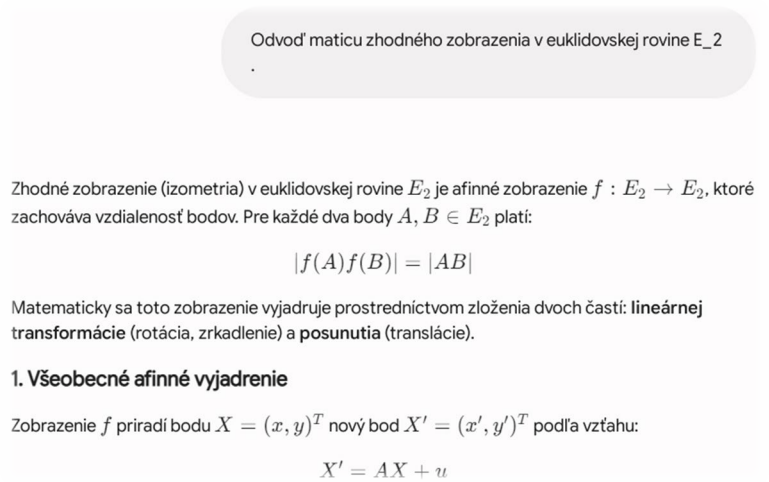
Do úvahy tak prichádzajú len matice:

$$\mathbb{A}_2^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbb{A}_3^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Zhodnosť, kde $|\mathbb{A}^T| = 1$ nazývame priamou zhodnosťou v $\mathbb{E}_2$ (definovaná maticou $\mathbb{A}_3^T$) ; zhodnosť, ktorej $|\mathbb{A}^T| = -1$ nazývame nepriamou zhodnosťou v $\mathbb{E}_2$ (určená maticou $\mathbb{A}_2^T$).

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie zistite, aké podmienky majú spĺňať prvky matice zhodnosti v euklidovskej rovine. Súčasne zistite, koľko zhodností existuje v rovine $\mathbb{E}_2$. Návod nájdete na obr. 3.4.



Obr. 3.4 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 24. augusta 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Ukázali sme, že matica zhodnosti $\mathbb{A}^T$ v rovine $\mathbb{E}_2$ je v tvare:

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Zhodnosť v rovine $\mathbb{E}_2$ je daná analytickým vyjadrením:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Rozborom existencie samodružných bodov a samodružných vektorov asociovaného zobrazenia možno ukázať, že existuje **šesť** zhodností v rovine $\mathbb{E}_2$:

- identita (zapisujeme $\mathcal{I}$),
- posunutie, určené vektorom $\vec{u} \neq \vec{0}$ (zapisujeme $\mathcal{S}_{\vec{u}}$),
- stredová súmernosť so stredom S (zapisujeme $\mathcal{S}_S$),
- otočenie okolo stredu S o uhol α (zapisujeme $\mathcal{S}_{(S,\alpha)}$),
- osová súmernosť s osou súmernosti o (zapisujeme $\mathcal{S}_o$),
- posunutá súmernosť s osou súmernosti o a vektorom $\vec{u}$ (zapisujeme $\mathcal{S}_{(o,\vec{u})}$).

V ďalšom texte detailnejšie analyzujeme jednotlivé zhodnosti, pričom využijeme ich definície (zavedené na strednej škole) a odvodíme ich analytické vyjadrenia.[45]

3.3.1 Identita

Definícia (identita)

Zhodnosť $\mathcal{I}: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ sa nazýva **identita**, ak pre každý bod $X[x, y] \in \mathbb{E}_2$ a jeho obraz $X^*[x^*, y^*] \in \mathbb{E}_2$ platí: $X \equiv X^*$.

V identickom zobrazení každý bod samodružným bodom a maticou zobrazenia je jednotková matica[46]

[45] Tento prístup je didakticky vhodnejší, pretože definície zo strednej školy sú známe a názorné. Analytické vyjadrenia následne použijeme na demonštráciu existencie samodružných bodov a samodružných smerov.
[46] Jednotková matica sa rovná svojej transponovanej matici.

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Samodružný vektor určíme z asociovaného zobrazenia:

$$u_1^* = \lambda . u_1 = u_1 \Leftrightarrow 0 = u_1 . (1 - \lambda)$$
$$u_2^* = \lambda . u_2 = u_2 \Leftrightarrow 0 = u_2 . (1 - \lambda)$$

Pre charakteristickú rovnicu a jej korene odvodíme:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Z toho vyplýva, že

$$0 = u_1 . (1 - \lambda) = 0 . u_1$$
$$0 = u_2 . (1 - \lambda) = 0 . u_2$$

Každý nenulový vektor $\vec{u} = (t, s), t, s \in R, [t, s] \neq [0,0]$ je samodružným vektorom.

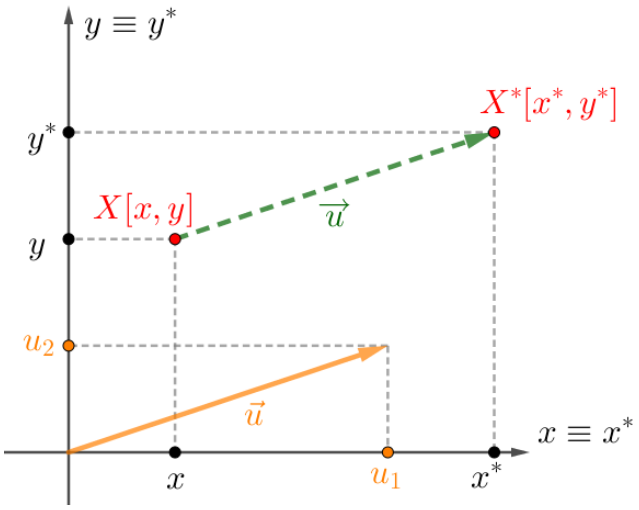
3.3.2 Posunutie

Posunutie definujeme nasledovne:

Definícia (**posunutie**)

Nech je euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ daný vektor $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0,0)$. Zhodnosť $S_{\vec{u}}: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ sa nazýva **posunutie**, ak pre každý bod $X[x, y] \in \mathbb{E}_2$ a jeho obraz $X^*[x^*, y^*] \in \mathbb{E}_2$ platí: $\vec{u} = \overrightarrow{XX^*}$.

Vektor $\vec{u}$ nazývame **vektorom posunutia.** Odvodíme rovnice tejto zhodnosti.



Obr. 3.5

Z definície vyplýva:

$$\vec{u} = \overrightarrow{XX^*} = X^* - X$$
$$(u_1, u_2) = [x^*, y^*] - [x, y]$$
$$\Downarrow$$
$$x^* = x + u_1$$
$$y^* = y + u_2$$

Zapíšeme pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že:

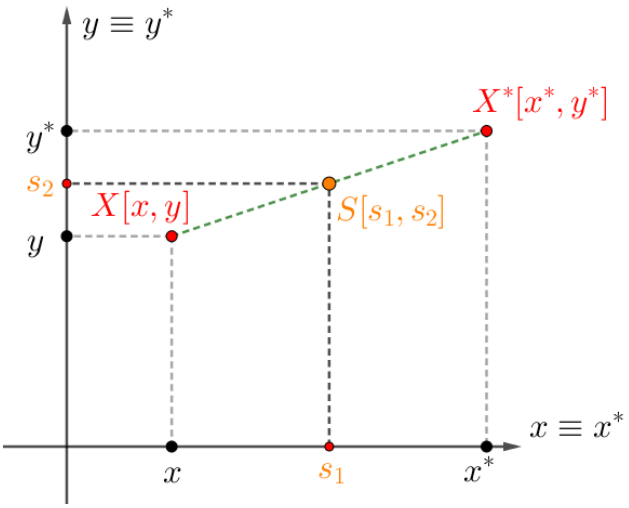
- ako v prípade identity, maticou zobrazenia $\mathbb{A}^T$ je jednotková matica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Matica $\mathbb{B}$, ktorej prvkami sú súradnice vektora $\vec{u}$, je teraz nenulová. Z toho vyplýva, že zobrazenie nemá samodružné body.
- Výsledok výpočtu samodružných vektorov asociovaného zobrazenia bude rovnaký ako pri určovaní samodružných vektorov identity – ľubovoľný vektor $\vec{v}$ z $\mathbb{E}_2$ je v posunutí $\mathcal{S}_{\vec{u}}$ s pevne zvoleným vektorom $\vec{u}$ samodružným vektorom (zobrazí sa do vektora $\overrightarrow{v^*}$ tak, že $\vec{v}, \overrightarrow{v^*}$ majú rovnakú veľkosť a sú súhlasne orientované).
- Identita a posunutie sú priame zhodnosti.

3.3.3 Stredová súmernosť

Definícia (**stredová súmernosť**)

Nech je euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ daný bod $S[s_1, s_2]$. Zhodnosť $\mathcal{S}_S: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ sa nazýva **stredová súmernosť**, ak pre každý bod $X[x, y] \in \mathbb{E}_2$ a jeho obraz $X^*[x^*, y^*] \in \mathbb{E}_2$ platí, že bod S je stredom úsečky XX^*.

Bod S nazývame **stredom** (stredovej) súmernosti**.** Odvodíme rovnice.



Obr. 3.6

Z definície vyplýva:

$$S = \frac{X^* + X}{2}$$

$$(s_1, s_2) = \frac{[x^*, y^*] + [x, y]}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x^* = -x + 2s_1$$

$$y^* = -y + 2s_2$$

Zapíšeme pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s_1 \\ 2s_2 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že:

- maticou zobrazenia $\mathbb{A}^T$ je $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ktorej determinant sa rovná 1. Stredová súmernosť v $\mathbb{E}_2$ je priama zhodnosť.[47]
- Prvky matice $\mathbb{B}$ sú dvojnásobné súradnice stredu S. Z toho vyplýva, že zobrazenie má jediný samodružný bod a tým je stred S. Z analytického vyjadrenia totiž odvodíme:

$$x = -x + 2s_1 \Longrightarrow 2x = 2s_1 \Leftrightarrow x = s_1$$
$$y = -y + 2s_2 \Longrightarrow 2y = 2s_2 \Leftrightarrow y = s_2$$

- Asociované zobrazenie má analytické vyjadrenie:

$$u_1^* = \lambda . u_1 = -u_1 \Leftrightarrow 0 = u_1 . (-1 - \lambda)$$
$$u_2^* = \lambda . u_2 = -u_2 \Leftrightarrow 0 = u_2 . (-1 - \lambda)$$

Determinantom zistíme charakteristické korene λ.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1$$

a odvodíme:

$$0 = u_1 . (-1 - \lambda_{1,2}) = u_1 . 0 \Longrightarrow u_1 = t,$$
$$0 = u_2 . (-1 - \lambda_{1,2}) = u_2 . 0 \Longrightarrow u_2 = s,$$

kde $t, s \in T, [t, s] \neq [0,0]$.

Ľubovoľný nenulový vektor $\vec{v}$ z $\mathbb{E}_2$ je v stredovej súmernosti $\mathcal{S}_s$ s pevne zvoleným stredom S samodružným vektorom (zobrazí sa do vektora $\overrightarrow{v^*}$ tak, že $\vec{v}, \overrightarrow{v^*}$ majú rovnakú veľkosť a sú nesúhlasne orientované).

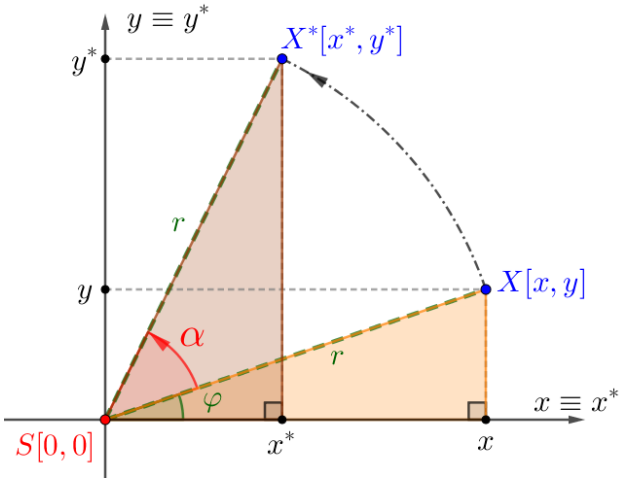
3.3.4 Otočenie

Odvodíme konkrétne analytické vyjadrenie otočenia, pričom vychádzame zo stredoškolskej definície.

Definícia (**otočenie**)
Nech je daný bod $S[s_1, s_2] \in \mathbb{E}_2$ a orientovaný uhol základnej veľkosti $\alpha \neq 0°$ alebo $\alpha \neq 180°$.[48] Zhodnosť $\mathcal{S}_{(S,\alpha)}$, ktorá ľubovoľnému bodu $X[x, y] \in \mathbb{E}_2$ priradí bod $X^*[x^*, y^*]$ tak, že $|SX| = |SX^*|$ a súčasne $\angle X^*SX = \alpha$, nazývame otočením okolo bodu S o uhol α.
Bod S nazývame **stredom otočenia**; uhol α je **uhlom otočenia**.

[47] Porovnajte výsledok s prípadom stredovej súmernosti na $\mathbb{E}_1$. Aký typ zhodnosti by bola stredová súmernosť v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_3$?

[48] Ak pri otáčaní polpriamok- ramien uhla $\angle AVB$ okolo bodu V považujeme rameno VA uhla za počiatočné; rameno VB za koncové, potom pri otáčaní uvedených polpriamok proti smeru rotácie hodinových ručičiek hovoríme, že uhol $\angle AVB = \alpha$ je kladne orientovaný (označíme $+\alpha$). V otáčaní po smere rotácie hodinových ručičiek hovoríme o záporne orientovanom uhle a označujeme $-\alpha$. Hovoríme, že uhol α má základnú veľkosť, ak $\alpha \in \langle 0°, 360° \rangle$.



Obr. 3.7

Najprv položme $S[0,0]$. Z definície otočenia a z pravouhlých trojuholníkov (obr. 3.7) vyplýva:

$$x = |SX|.\cos\varphi = r.\cos\varphi\,, \qquad y = |SX|.\sin\varphi = r.\sin\varphi,$$
$$x^* = |SX^*|.\cos(\varphi+\alpha) = r.\cos(\varphi+\alpha)\,, \qquad y^* = |SX^*|.\sin(\varphi+\alpha) = r.\sin(\varphi+\alpha).$$

Použijeme goniometrické identity[49] a odvodíme:

$$x^* = r.\cos\varphi\,.\cos\alpha - r.\sin\varphi.\sin\alpha$$
$$y^* = r.\sin\varphi.\cos\alpha + r.\cos\varphi.\sin\alpha$$

$$x^* = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha$$
$$y^* = y.\cos\alpha + x.\sin\alpha$$

Maticou otočenia je matica $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, ktorej koeficienty sú vyjadrené ako goniometrické funkcie uhla otočenia α.

Vypočítame súradnice samodružného bodu. Zo všeobecného vyjadrenia dostaneme:

$$x = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha \iff x(\cos\alpha - 1) - y.\sin\alpha = 0$$
$$y = x.\sin\alpha + y.\cos\alpha \iff x.\sin\alpha + y(\cos\alpha - 1) = 0$$

Pre determinant sústavy platí:

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha - 1 & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1\end{vmatrix} = (\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha \ldots = 2.(1-\cos\alpha).$$

Podľa definície je základná veľkosť $\alpha \neq 0° + k.180°, k = 0,1$. Z toho vyplýva, že determinant je rôzny od nuly a matica sústavy rovníc je regulárna (riadky matice sú nezávislé). Jediné riešenie homogénnej sústavy je triviálne riešenie, kde $x = y = 0$. Jediným **samodružným bodom** je **stred otočenia** $S[0,0]$.

Samodružné vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$ by sme počítali z rovníc s parametrom λ:

$$u_1(\cos\alpha - \lambda) - u_2.\sin\alpha = 0$$
$$u_1.\sin\alpha + u_2(\cos\alpha - \lambda) = 0.$$

Charakteristická rovnica je určená determinantom

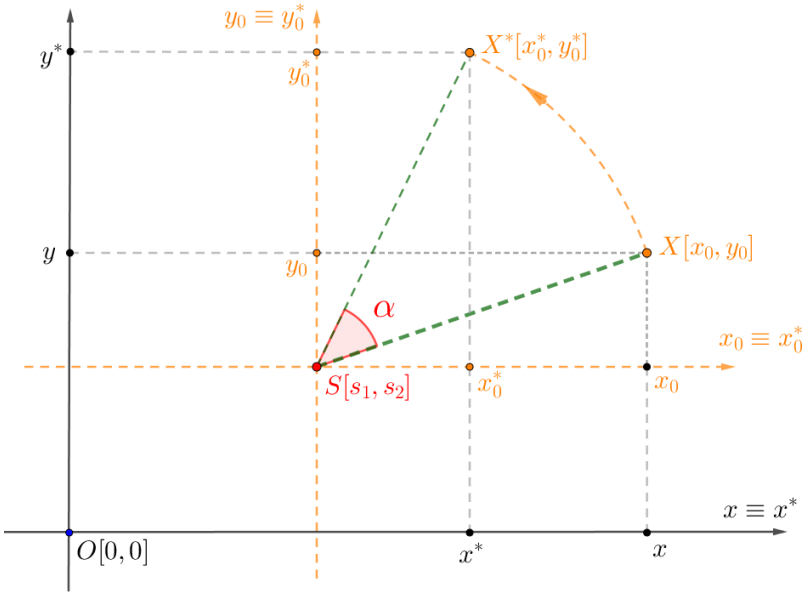
$$\begin{vmatrix}\cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda\end{vmatrix} = \cdots = \lambda^2 - 2\lambda.\cos\alpha + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sin\alpha$$

V oboch prípadoch po dosadení za $\lambda_{1,2}$ do homogénnych rovníc odvodíme: $u_2 = 0 = u_1$.

Otočenie nemá samodružný vektor (nulový vektor nemôže byť vektorom bázy samodružného smeru).

[49] $\cos(\varphi \pm \alpha) = \cos\varphi.\cos\alpha \mp \sin\varphi\,.\sin\alpha\,, \qquad \sin(\varphi \pm \alpha) = \sin\varphi.\cos\alpha \pm \cos\varphi.\sin\alpha\,.$

Teraz položíme stred otočenia do bodu $S[s_1, s_2] \neq O[0,0]$ a použijeme pomocnú súradnicovú sústavu (obr. 3.8).



Obr. 3.8

Platí:

$$x_0^* = x_0.\cos\alpha - y_0.\sin\alpha$$
$$y_0^* = x_0.\sin\alpha + y_0.\cos\alpha,$$

kde $x^* = x_0^* + s_1, \quad x = x_0 + s_1, \quad y^* = y_0^* + s_2, \quad y = y_0 + s_2.$

Po dosadení a odvodíme

$$x^* = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha + s_1.(1 - \cos\alpha) + s_2.\sin\alpha$$
$$y^* = x.\sin\alpha + y.\cos\alpha - s_1.\sin\ \alpha + s_2.(1 - \cos\alpha)$$

Overíme, či stred otočenia $S[s_1, s_2]$ je samodružným bodom. Počítame:

$$x^* = s_1.\cos\alpha - s_2.\sin\alpha + s_1.(1 - \cos\alpha) + s_2.\sin\alpha = s_1$$
$$y^* = s_1.\sin\alpha + s_2.\cos\alpha - s_1.\sin\ \alpha + s_2.(1 - \cos\alpha) = s_2$$

Analogicky možno ukázať, že neexistuje samodružný vektor.

Ak prehľadne zapíšeme pomocou matíc

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

potom:

- determinant $|\mathbb{A}^T| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Otočenie v $\mathbb{E}_2$ je **priama** zhodnosť.
- Asociované zobrazenie má analytické vyjadrenie:

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

z ktorého vyplýva, že otočenie nemá samodružné vektory. [50]

- Z didaktických dôvodov sa neuvažuje o uhle otočenia $\alpha = 180°$ (zhodnosť bola zavedená ako stredová súmernosť).

3.3.5 Osová súmernosť

Analytické vyjadrenie osovej súmernosti teraz odvodíme všeobecne.

Definícia (**osová súmernosť**)

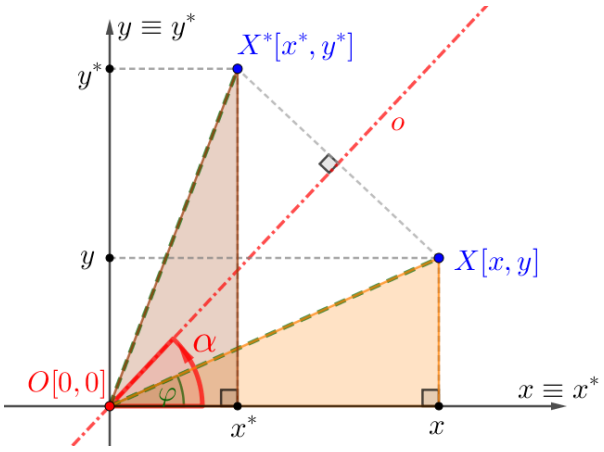
Nech je daná priamka $o \subset \mathbb{E}_2$. Zhodnosť $\mathcal{S}_o$, ktorá ľubovoľnému bodu $X[x,y] \in \mathbb{E}_2$ priradí bod $X^*[x^*,y^*]$ tak, že úsečka XX^* je kolmá na priamku o a súčasne stred S úsečky XX^* leží na priamke o.

Priamku o nazývame **osou súmernosti**.

Nech os súmernosti o má smernicový uhol $\alpha, \alpha \in \langle 0°, 360° \rangle$ a súčasne **os o prechádza začiatkom súradnicovej sústavy $O[0,0]$.**

Z definície osovej súmernosti otočenia a z pravouhlých trojuholníkov (obr. 3.9) vyplýva:

$$x = |SX|.\cos\varphi, \qquad y = |SX|.\sin\varphi,$$
$$x^* = |SX^*|.\cos(2\alpha - \varphi) = |SX|.\cos(2\alpha - \varphi),$$
$$y^* = |SX^*|.\sin(2\alpha - \varphi) = |SX|.\sin(2\alpha - \varphi).$$



Obr. 3.9

Opäť použijeme goniometrické identity (ako pri otočení) a odvodíme:

$$x^* = x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha$$
$$y^* = x.\sin 2\alpha - y.\cos 2\alpha$$

Maticou otočenia je matica $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$, ktorej koeficienty sú vyjadrené ako goniometrické funkcie uhla otočenia 2α a jej determinant $|\mathbb{A}^T|$ sa rovná:

$$|\mathbb{A}^T| = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = -1.$$

Osová súmernosť je **nepriama** zhodnosť.

[50] Pozrite výpočet samodružného vektora pre $S[0,0]$.

Určíme samodružné body. Zo všeobecného vyjadrenia dostaneme:

$$x = x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad -x.(1-\cos 2\alpha) + y.\sin 2\alpha = 0$$
$$y = x.\sin 2\alpha - y.\cos 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad x.\sin 2\alpha - y(1+\cos 2\alpha) = 0$$

Po úprave:[51]

$$-x.2.\sin^2\alpha + y.\sin 2\alpha = 0$$
$$x.\sin 2\alpha - y.2\cos^2\alpha = 0.$$

Ďalej

$$-x.2.\sin^2\alpha + y.2.\sin\alpha.\cos\alpha = 0 \qquad /:2\sin\alpha \neq 0$$
$$x.2.\sin\alpha.\cos\alpha - y.2.\cos^2\alpha = 0 \qquad /:2\cos\alpha \neq 0.$$

a pre $\alpha \neq 0°, \alpha \neq 90°, \alpha \neq 180°, \alpha \neq 270°$ dostaneme:

$$-x.\sin\alpha + y.\cos\alpha = 0$$
$$x.\sin\alpha - y.\cos\alpha = 0.$$

Riešením je teda množina bodov $X[x, y]$, ktorých súradnice vyhovujú rovnici:

$$x.\sin\alpha - y.\cos\alpha = 0.$$

Pri uvedených podmienkach ide o rovnicu osi súmernosti o v smernicovom tvare: $y = \tan\alpha.x$.
Pre zvyšné prípady $\alpha = 0°, \alpha = 90°, \alpha = 180°, \alpha = 270°$ sme rovnice príslušných osových súmerností odvodili v ilustračnom príklade v kapitole 2.3.

Samodružné vektory určíme z rovníc asociovaného zobrazenia nasledovne:

$$-u_1.(\lambda - \cos 2\alpha) + u_2.\sin 2\alpha = 0$$
$$u_1.\sin 2\alpha - u_2(\lambda + \cos 2\alpha) = 0$$

Pomocou determinantu vypočítame charakteristickú rovnicu a platí:

$$\begin{vmatrix} -(\lambda - \cos 2\alpha) & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -(\lambda + \cos 2\alpha) \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Korene sú: $\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1.$

Pre hodnotu $\lambda_1 = 1$ odvodíme:

$$-u_1(1 - \cos 2\alpha) + u_2.\sin 2\alpha = 0$$
$$u_1.\sin 2\alpha - u_2(1 + \cos 2\alpha) = 0.$$

Analogickými úpravami ako pri výpočte samodružných bodov odvodíme:

$$u_1.\sin\alpha - u_2.\cos\alpha = 0.$$

Rovnicu interpretujeme ako skalárny súčin dvoch kolmých vektorov $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{n} = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$. Riešením je **smerový vektor** $\vec{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ **osi súmernosti** o.

Analogicky, pre $\lambda_2 = -1$ dostaneme zase **normálový vektor** $\vec{v} = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$ **osi súmernosti** o.

Necháme na čitateľa, aby uvedené výsledky porovnal s riešením ilustračného príkladu z kap. 2.3.

[51] Použili sme goniometrické identity: $\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$; $\cos^2\alpha = 1 + \cos\alpha$; $\sin 2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha$

Nech os súmernosti o má smernicový uhol $\alpha \neq 90° + k.180°$, kde $k = 0{,}1$, a prechádza bodom $Q[0, q], q \neq 0$. Bod $Q \in o$, preto je samodružným bodom a zo všeobecného analytického vyjadrenia osovej súmernosti $\mathcal{S}_o$

$$x^* = x\,.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha + m$$
$$y^* = x.\sin 2\alpha - y.\cos 2\alpha + n$$

vyplýva:

$$0 = 0.\cos 2\alpha + q.\sin 2\alpha + m$$
$$q = 0.\sin 2\alpha - q.\cos 2\alpha + n.$$

Odtiaľ dostaneme: $m = -q.\sin 2\alpha, \quad n = q.(1 + \cos 2\alpha).$

Výpočtom sa možno presvedčiť, že samodružnými bodmi sú body osi súmernosti o a samodružnými vektormi smerový a normálový vektor priamky o.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie overte rovnice osovej súmernosti v euklidovskej rovine, ktorej os súmernosti má smernicový uhol alfa a neprechádza začiatkom súradnicovej sústavy.

Vypočítajte samodružné body a samodružné vektory vo všeobecnom prípadoch, ak os o prechádza bodom $Q[0, q], q \neq 0$ a $P[p, 0], p \neq 0$. Návod nájdete na obr. 3.10.

napíšte rovnice osovej súmernosti v rovine, ktorej os má smernicový uhol alfa a neprechádza začiatkom súradnicovej sústavy. Odvoďte aj samodružné body a samodružné vektory.

Rovnice osovej súmernosti S_o v rovine Oxy, ktorej os o má smernicový uhol α a neprechádza začiatkom súradnicovej sústavy, možno odvodiť pomocou posunutia a rotácie (alebo cez geometrickú podmienku stredu úsečky a kolmosti).

Nech os o má smernicu $k = \tan\alpha$ a prechádza bodom $P = [0, q]$, resp. má všeobecnú rovnicu $o : aX + bY + c = 0$.

1. Rovnice osovej súmernosti

Pre transformáciu bodu $A[x, y]$ na obraz $A'[x', y']$ okolo osi o so smernicovým uhlom α (kde $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) a úsekom q na osi y ($y = x\tan\alpha + q$) platia rovnice:

$$x' = x\cos(2\alpha) + y\sin(2\alpha) - q\sin(2\alpha)$$
$$y' = x\sin(2\alpha) - y\cos(2\alpha) + q(1 + \cos(2\alpha))$$

Obr. 3.10 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 1. septembra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Príklad

Napíšte rovnice osovej súmernosti s osou, ktorá zviera s kladnou časťou osi x uhol veľkosti $60°$ a prechádza bodom $M[-3, 4]$.

Riešenie

Použijeme odvodené rovnice a dosadíme $\alpha = 60°$:

$$x^* = x\,.\cos 120° + y.\sin 120° + m$$
$$y^* = x.\sin 120° - y.\cos 120° + n.$$

Po výpočte

$$x^* = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + m$$
$$y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + n$$

Bod $M[-3,4]$ je ako bod osi súmernosti samodružný, preto

$$-3 = -\frac{1}{2}.(-3) + \frac{\sqrt{3}}{2}.4 + m$$
$$4 = \frac{\sqrt{3}}{2}.(-3) + \frac{1}{2}.4 + n$$

a vypočítame:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} - 2\sqrt{3} \\ 2 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

3.3.6 Posunutá súmernosť

Posunutá súmernosť je osobitná zhodnosť v rovine, ktorá je definovaná ako zloženie dvoch zhodností – osovej súmernosti a posunutia. Názorný príklad tejto zhodnosti z bežného života predstavujú stopy v snehu, kde ľavá stopa je vzorový útvar a pravá stopa jej obraz (obr. 3.10).



Obr. 3.11 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 1. septembra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Definícia (**posunutá súmernosť**)

Nech je daná priamka $o \subset \mathbb{E}_2$ a jej smerový vektor $\vec{s} = (s_1, s_2)$. Zhodnosť, ktorá je zložením osovej súmernosti s osou o a posunutia s vektorom $\vec{s}$ nazývame **posunutá súmernosť** s **osou** o a **vektorom** $\vec{s}$.

Zapisujeme: $\mathcal{S}_{(o,\vec{s})}$.

Uvažujme analytické vyjadrenia jednotlivých zobrazení, napr. $\mathcal{S}_o: x^* = -x,\ y^* = y$ a $\mathcal{S}_{\vec{s}}: x^{**} = x^* + 0,\ y^{**} = y^* + 1$. Zložením

$$\mathcal{S}_{(o,\vec{s})} = \mathcal{S}_{\vec{s}} \circ \mathcal{S}_o : X \longrightarrow X^* \longrightarrow X^{**}$$

Odvodíme analytické vyjadrenie posunutej súmernosti :

$$x^{**} = -x^{*} = -x + 0$$

$$y^{**} = y^{*} = y + 1$$

Ak skladáme zobrazenia v opačnom poradí, t.j. $\mathcal{S}_o \circ \mathcal{S}_{\vec{s}}: X \longrightarrow X^{*} \longrightarrow X^{**}$, odvodíme

$$x^{**} = x^{*} + 0 = -x + 0$$

$$y^{**} = y^{*} + 1 = y + 1$$

Vidíme, že na poradí **skladania nezáleží**.

Všeobecný dôkaz tejto skutočnosti vyplýva z toho, že vektor $\vec{s} = (s_1, s_2)$ je **smerovým** vektorom osi o.

Uvažujme o osovej súmernosti $\mathcal{S}_o$ s analytickým vyjadrením:

$$x^{*} = x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha$$

$$y^{*} = x.\sin 2\alpha - y.\cos 2\alpha$$

a posunutí $\mathcal{S}_{\vec{s}}$ s jednotkovým smerovým vektorom $\vec{s} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, ktorého analytické vyjadrenie je:

$$x^{**} = x^{*} + \cos\alpha$$

$$y^{**} = y^{*} + \sin\alpha.$$

Zloženie $\mathcal{S}_{\vec{s}} \circ \mathcal{S}_o: X \longrightarrow X^{*} \longrightarrow X^{**}$ má analytické vyjadrenie:

$$x^{**} = x^{*} + \cos\alpha = x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha + \cos\alpha$$

$$y^{**} = y^{*} + \sin\alpha = x.\sin 2\alpha - y.\cos 2\alpha + \sin\alpha.$$

Zloženie zhodností v poradí $\mathcal{S}_o \circ \mathcal{S}_{\vec{s}}$ má zase rovnice:

$$x^{**} = x^{*}.\cos 2\alpha + y^{*}.\sin 2\alpha = (x + \cos\alpha).\cos 2\alpha + (y + \sin\alpha).\sin 2\alpha =$$

$$= x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha + \cos\alpha * \cos 2\alpha + \sin\alpha.\sin 2\alpha =$$

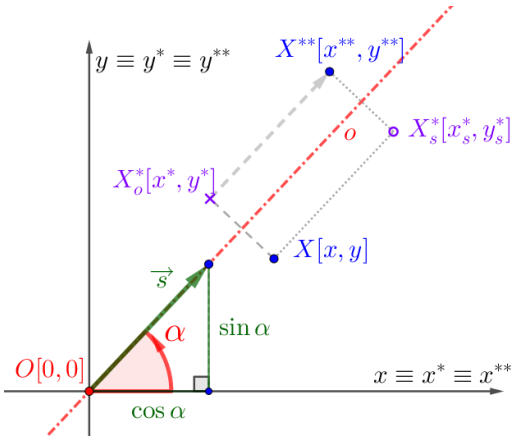
$$= x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha + \cos\alpha.(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin\alpha.2.\sin\alpha.\cos\alpha =$$

$$= x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha + \cos\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =$$

$$= x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha + \cos\alpha$$

Analogicky dokážeme, že platí:

$$y^{**} = x.\sin 2\alpha - y.\cos 2\alpha + \sin\alpha$$



Obr. 3.12

Skladanie zobrazení je komutatívne. Na obr. 3.12 vidíme, že výsledok skladaní:

$\mathcal{S}_{\vec{s}} \circ \mathcal{S}_o : X \longrightarrow X_o^* \longrightarrow X^{**}$ a $\mathcal{S}_o \circ \mathcal{S}_{\vec{s}} : X \longrightarrow X_s^* \longrightarrow X^{**}$ je rovnaký.

Analytické vyjadrenie posunutej súmernosti s osou o: $y = \tan\alpha . x$ a jednotkovým smerovým vektorom $\vec{s}$ v $\mathbb{E}_2$ zapísané pomocou matíc je:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Z uvedeného a definície posunutej súmernosti vyplýva, že **posunutá súmernosť**:

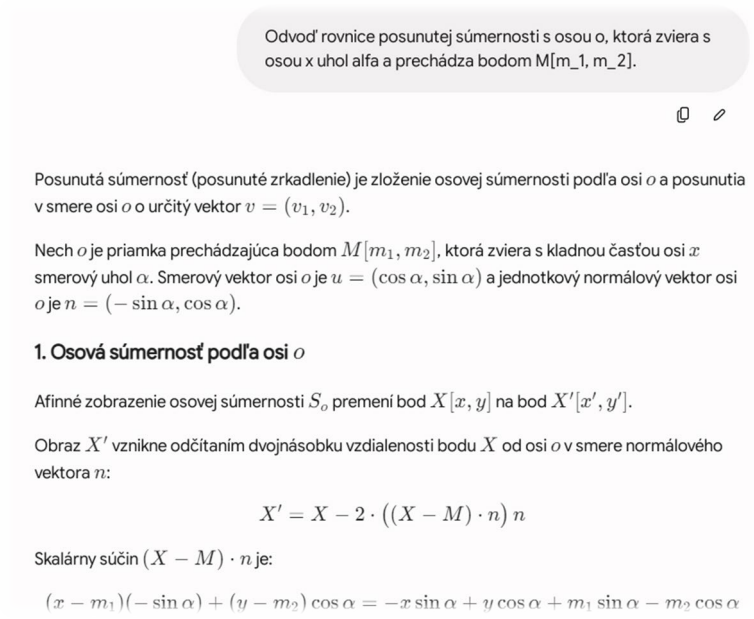
- je nepriama zhodnosť v $\mathbb{E}_2$, kde determinant matice sa rovná -1,
- vektor posunutia $\vec{s}$ je nenulový, a preto nemá samodružné body.
- V osovej súmernosti $\mathcal{S}_o$existujú samodružné vektory (smerový a normálový vektor osi o). V posunutí $\mathcal{S}_{\vec{s}}$ je každý vektor samodružný. Z toho vyplýva, že aj v posunutej súmernosti sú smerový a normálový vektor osi o samodružné vektory.
- Podmienka v definícii posunutej súmernosti zámerne uvádza smerový vektor $\vec{s}$ priamky o. Ak by bol vektor $\vec{s}$ rôznobežný s priamkou o, rozložíme ho na súčet dvoch navzájom kolmých vektorov $\vec{s} = \overrightarrow{s_o} + \overrightarrow{s_n}$, kde $\overrightarrow{s_o}$ by bol smerový vektor priamky o a vektor $\overrightarrow{s_n}$ zase jej normálovým vektorom. Výsledkom $\mathcal{S}_{\vec{s}} \circ \mathcal{S}_o = \left(\mathcal{S}_{\overrightarrow{s_o}} \circ \mathcal{S}_{\overrightarrow{s_n}}\right) \circ \mathcal{S}_o = \mathcal{S}_{\overrightarrow{s_o}} \circ \left(\mathcal{S}_{\overrightarrow{s_n}} \circ \mathcal{S}_o\right)$ je posunutá súmernosť s vektorom $\overrightarrow{s_o}$ a „novou“ osou p; rovnobežnou s priamou o a vzdialenou od priamky o o veľkosť $\frac{|\overrightarrow{s_n}|}{2}$ v smere vektora $\overrightarrow{s_n}$.

Úloha

Pomocou vhodného dynamického softvéru vymodelujte zloženie dvoch zhodností – osovej súmernosti s osou o a posunutia s vektorom $\vec{s}$, ktorého súradnice budú zavedené ako parametre. Overte existenciu priamky p z predchádzajúcej vety pomocou konštrukcií obrazov konkrétne zvolených bodov roviny. Návod nájdete na obr. 3.12.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie odvoďte rovnice posunutej súmernosti v euklidovskej rovine, ktorej os súmernosti má smernicový uhol α a prechádza všeobecným bodom $M[m_1, m_2]$. Ako sa zmení matica zhodnosti, ak smerový vektor $\vec{s}$ nebude jednotkovým vektorom?
Návod nájdete na obr. 3.13.



Obr. 3.13 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 2. septembra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

3.4 Grupa zhodností v $\mathbb{E}_2$

Naznačili sme, že zhodnosti na priamke $\mathbb{E}_1$ vzhľadom na operáciu skladania zobrazení tvoria grupu.

Príklad

Zistite výsledok zloženia dvoch stredových súmerností $\mathcal{S}_{S_1}$ a $\mathcal{S}_{S_2}$ so stredmi S_1 a S_2 v $\mathbb{E}_2$.

Riešenie

Rozlíšime dva prípady.

a) Nech $S_1 \equiv S_2$.

Ak $\mathcal{S}_{S_1}: X \longrightarrow X^*$ a súčasne $\mathcal{S}_{S_1}: X^* \longrightarrow X^{**}$, potom $\mathcal{S}_{S_2} \circ \mathcal{S}_{S_1}: X \longrightarrow X^{**} = X$ je identita $\mathcal{I}$.

Súčasne platí: $\mathcal{S}_{S_2} \circ \mathcal{S}_{S_1} = \mathcal{S}_{S_1} \circ \mathcal{S}_{S_2} = \mathcal{I}$.

Analyticky - pre $S_1[m, n] = S_2[m, n], X[x, y], X^*[x^*, y^*]$ a $X^{**}[x^{**}, y^{**}]$ máme rovnice:

$$\mathcal{S}_{S_1}: \begin{matrix} x^* = -x + 2m \\ y^* = -y + 2n \end{matrix} \qquad \mathcal{S}_{S_2}: \begin{matrix} x^{**} = -x^* + 2m \\ y^{**} = -y^* + 2n \end{matrix}$$

z čoho vyplýva

$$\mathcal{S}_{S_2} \circ \mathcal{S}_{S_1}: \begin{matrix} x^{**} = -x^* + 2m = -(-x + 2m) + 2m = x \\ y^{**} = -y^* + 2n = -(-y + 2n) + 2n = y \end{matrix}$$

b) Nech sú stredy súmerností $S_1[m_1, n_1] \neq S_2[m_2, n_2]$. Analytické vyjadrenia príslušných stredových súmerností sú:

$$\mathcal{S}_{S_1}: \begin{matrix} x^* = -x + 2m_1 \\ y^* = -y + 2n_1 \end{matrix} \qquad \mathcal{S}_{S_2}: \begin{matrix} x^{**} = -x^* + 2m_2 \\ y^{**} = -y^* + 2n_2 \end{matrix}$$

z čoho vyplýva

$$\mathcal{S}_{S_2} \circ \mathcal{S}_{S_1}: \begin{matrix} x^{**} = -x^* + 2m_2 = -(-x + 2m_1) + 2m_2 = x + 2.(m_2 - m_1) \\ y^{**} = -y^* + 2n_2 = -(-y + 2n_1) + 2n_2 = y + 2.(n_2 - n_1) \end{matrix}$$

Pri podmienke rôznych stredov súmerností:

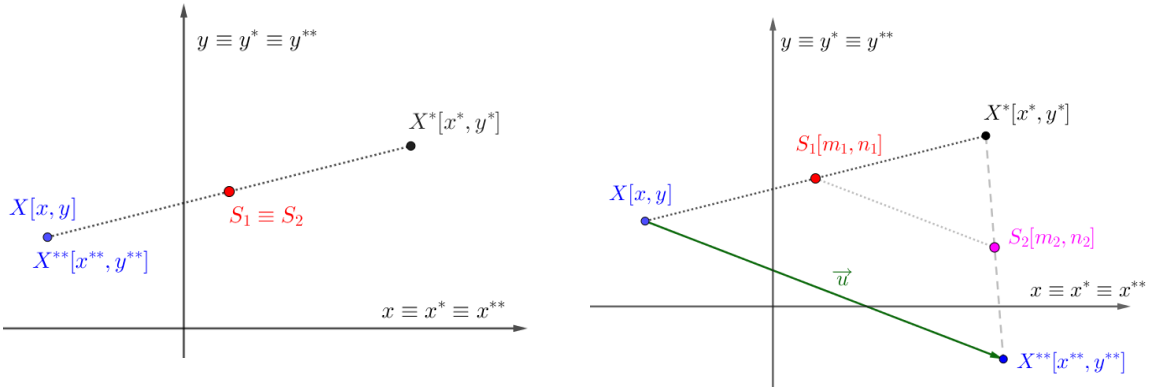
- výsledné zobrazenie nemá samodružné body,
- má jednotkovú matica zobrazenia,
- každý vektor je samodružným vektorom,

- ide o priamu zhodnosť v rovine $\mathbb{E}_2$.

Z uvedených vlastností vyplýva, že ide o posunutie $\mathcal{S}_{\vec{u}}$ s vektorom $\vec{u}$, kde

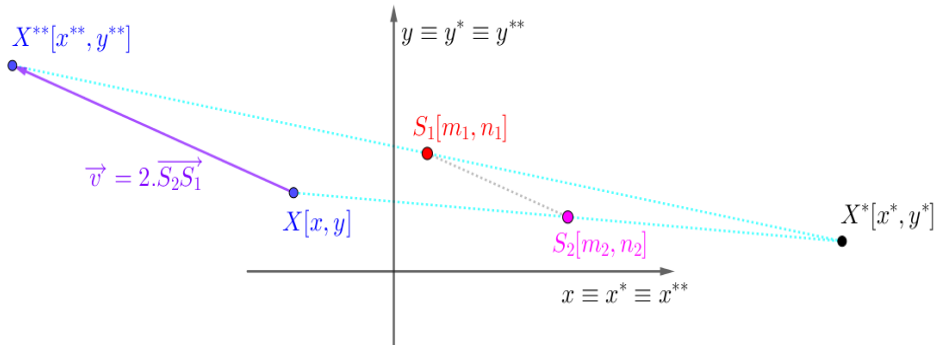
$$\vec{u} = (2.(m_2 - m_1), 2.(n_2 - n_1)) = 2.\overrightarrow{S_1S_2}.$$

Všimnime si, že v trojuholníku $XX^{**}X^*$ je úsečka S_1S_2 strednou priečkou pre ľubovoľnú voľbu bodu $X \in \mathbb{E}_2$.



Obr. 3.14

Zo súradníc vektora $\vec{u}$ je zrejmé, že skladanie nie je komutatívne a platí: $\mathcal{S}_{S_2} \circ \mathcal{S}_{S_1} \neq \mathcal{S}_{S_1} \circ \mathcal{S}_{S_2}$, pretože hoci je $\mathcal{S}_{S_1} \circ \mathcal{S}_{S_2}$ opäť posunutím, vektor posunutia je $\vec{v} = -\vec{u}$.



Obr. 3.15

Úloha

Premyslite si tvrdenie: Ľubovoľné posunutie v rovine $\mathbb{E}_2$ dané pevne zvoleným vektorom $\vec{u} \neq \vec{0}$ možno rozložiť na dve stredové súmernosti s rôznymi stredmi S_1 a S_2. Pomocou vhodného dynamického softvéru to vymodelujte a zistite, či je tento rozklad jednoznačný. Návod nájdete na obr. 3.15.

V euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ existuje šesť zhodností:

- identita $\mathcal{I}$,
- posunutie $\mathcal{S}_{\vec{u}}$ s vektorom $\vec{u}$,
- stredová súmernosť $\mathcal{S}_S$ so stredom S,
- otočenie $\mathcal{S}_{(S,\alpha)}$ so stredom S o uhol (základnej veľkosti) α,
- osová súmernosť $\mathcal{S}_o$ s osou o a
- posunutá súmernosť $\mathcal{S}_{(o,\vec{s})}$ s osou o a smerovým vektorom $\vec{s}$.

Jednotlivé zobrazenia možno medzi sebou skladať a dostaneme ďalšie zobrazenie. Ukážeme, že v prípade zhodností v $\mathbb{E}_2$, výsledkom zloženia bude opäť zhodnosť v $\mathbb{E}_2$. Použijeme symbolický maticový zápis.

Nech $\mathcal{S}_1$ je zhodnosť v $\mathbb{E}_2$ daná analytickým vyjadrením:

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{A}_1^T.\mathbb{X} + \mathbb{B}_1,$$

kde $\mathbb{X}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ reprezentujú body $X[x,y], X^*[x^*,y^*]$ (vzory a ich obrazy v danej zhodnosti) a pre maticu zobrazenia $\mathbb{A}_1$, resp. jej determinant platí: $|\mathbb{A}_1| = |\mathbb{A}_1^T| = \pm 1$.

Analogicky uvažujme o zhodnosti $\mathcal{S}_2$ v $\mathbb{E}_2$ s analytickým vyjadrením:

$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{X}^* + \mathbb{B}_2,$$

kde $\mathbb{X}^{**} = \begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ reprezentujú body $X[x^*,y^*], X^*[x^*,y^*]$ (vzory a ich obrazy v zhodnosti $\mathcal{S}_2$) a pre maticu zobrazenia $\mathbb{A}_2$ a jej determinant platí: $|\mathbb{A}_2| = |\mathbb{A}_2^T| = \pm 1$.

Ak $\mathcal{S}_1 : X \longrightarrow X^*, \mathcal{S}_1 : Y \longrightarrow Y^*$ a následne $\mathcal{S}_2 : X^* \longrightarrow X^{**}, \mathcal{S}_2 : Y^* \longrightarrow Y^{**}$, potom $\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1 : X \longrightarrow X^{**}$ a platí:

$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{X}^* + \mathbb{B}_2 = \mathbb{A}_2^T.(\mathbb{A}_1^T.\mathbb{X} + \mathbb{B}_1) + \mathbb{B}_2 = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.\mathbb{X} + (\mathbb{A}_2^T.\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2)$$

Zložené zobrazenie $\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1 : X \longrightarrow X^{**}$ bude opäť **zhodnosť**, pretože pre determinnat matice zobrazenia odvodíme:

$$|\mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T| = |\mathbb{A}_2^T|.|\mathbb{A}_1^T| = (\pm 1).(\pm 1) = \pm 1.$$

Z výsledku ešte vyplýva:

- záleží na poradí, v akom zhodnosti skladáme, pretože násobenie matíc nie je komutatívne,
- zložením:
  a) dvoch priamych zhodností je priama zhodnosť,
  b) priamej a nepriamej zhodnosti je nepriama zhodnosť,
  c) dvoch nepriamych zhodností je priama zhodnosť.

Množina všetkých zhodností v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ tvorí vzhľadom na operáciu skaldania zobrazení štruktúru – grupu:

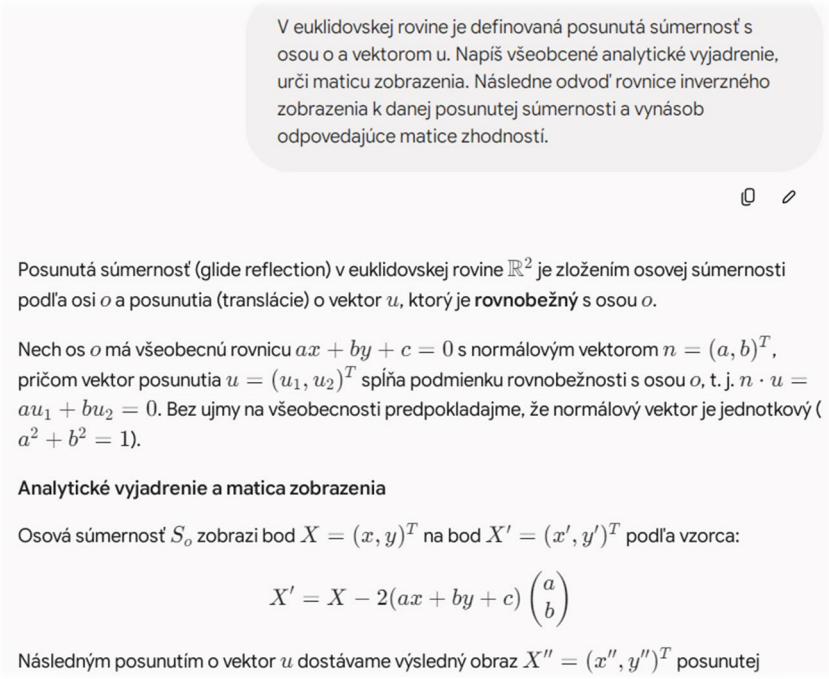
a) zložením dvoch zhodností je zhodnosť,
b) skladanie zobrazení je vo všeobecnosti asociatívne,
c) existuje identita, ktorá je neutrálnym prvkom grupy,
d) ku každej zhodnosti $\mathcal{S}$ existuje inverzná zhodnosť $\mathcal{S}^{-1}$, kde
   - identita $\mathcal{I}$ je involutorné zobrazenie ($\mathcal{I} = \mathcal{I}^{-1}$)
   - stredová súmernosť $\mathcal{S}_S$ so stredom S je tiež involutorné zobrazenie , t.j. $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_S^{-1}$ (viď. predchádzajúci príklad),
   - posunutie $\mathcal{S}_{\vec{u}}$ s vektorom $\vec{u}$ má inverzné zobrazenie tiež posunutie $\mathcal{S}_{-\vec{u}}$ s vektorom $-\vec{u}$,
   - otočenie $\mathcal{S}_{(S,-\varphi)}$ so stredom S o uhol veľkosti $-\varphi$ je inverzným zobrazením k otočeniu $\mathcal{S}_{(S,+\varphi)}$ so stredom S o uhol veľkosti $+\varphi$,
   - osová súmernosť $\mathcal{S}_o$ s osou o je involutorné zobrazenie, t.j. $\mathcal{S}_o = \mathcal{S}_o^{-1}$,

- posunutá súmernosť $\mathcal{S}_{(o,-\vec{u})}$ s osou o a vektorom $-\vec{u}$ je inverzným zobrazením k posunutej súmernosti $\mathcal{S}_{(o,\vec{u})}$ s osou o a vektorom $\vec{u}$.

Ako sme ukázali na predchádzajúcom príklade skladania dvoch stredových súmerností s rôznymi stredmi, skladanie zhodností vo všeobecnosti nie je komutatívne. [52]

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie vygenerujte analytické vyjadrenia jednotlivých typov zhodností v $\mathbb{E}_2$ a určte analytické vyjadrenia ich inverzných zhodností. Presvedčte sa, že súčin matice zobrazenia a matice odpovedajúceho inverzného zobrazenia sa rovná jednotkovej matici. Aký je geometrický význam skutočnosti, že súčin matice danej zhodnosti a matice jej inverzného zobrazenia je komutatívny? Návod nájdete na obr. 3.16.



Obr. 3.16 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 4. septembra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Ukázali sme, že zložením dvoch zhodností v $\mathbb{E}_2$ je zhodnosť a príslušná štruktúra vzhľadom na operáciu skladania zobrazení tvorí grupu.

Uvedená grupa má **vlastnú podgrupu**,[53] ktorú tvoria len priame zhodnosti.
Nie je to však jediná podgrupa, napr. množina všetkých posunutí spolu s identitou vzhľadom na operáciu skladania zobrazení tvorí tiež samostatnú grupu alebo podgrupu tvoria aj všetky zhodnosti, v ktorých je začiatok súradnicovej sústavy samodružným bodom.

Nepriame zhodnosti podgrupu netvoria, pretože zložením dvoch nepriamych zhodností je priama zhodnosť (vyplýva zo súčinu determinantov matíc jednotlivých zhodností).

[52] Jeden konkrétny príklad „ruší“ všeobecnosť tvrdenia. To však nevyplýva, že by neexistovali prípady, kedy skladanie dvoch zobrazení je komutatívne.
[53] Vlastná podgrupa $(H,*)$ grupy $(G,*)$ je taká grupa, ktorá nie je totožná s celou grupou $(G,*)$.

Príklad (Gamowa úloha o stratenom pirátskom poklade) [5]

Starý muž našiel v písomnostiach po svojom starom otcovi pergamen s pokynmi, ako na konkrétnom ostrove nájde ukrytý pirátsky poklad. Písalo sa v ňom: „Na planine ostova nájdeš starý dub, vysokú borovicu a šibenicu. Najprv budeš kráčať od šibenice k dubu a počítať kroky. Pri dube sa otočíš doprava a prejdeš rovnaký počet krokov. Miesto označíš kolíkom. Vrátiš sa k šibenici a budeš kráčať smerom k borovici, pričom opäť počítaš kroky. Pri borovici sa otočíš doľava a prejdeš rovnaký počet krokov, ako si prešiel od šibenice k borovici. Aj toto miesto označíš kolíkom. Poklad je zakopaný v strede úsečky určenej oboma kolíkmi. " Muž prišiel na ostrov a podľa popisu našiel starý dub a aj borovicu. Šibenica sa však nezachovala a nenašiel miesto, kde mohla kedysi stáť. Dokáže nájsť ukrytý poklad?

Riešenie

Matematizujme situáciu a umiestnime do súradnicovej sústavy body $S[0,0], D[d_1, d_2], B[b_1, b_2]$, ktoré reprezentujú polohu šibenice, dubu a borovice.

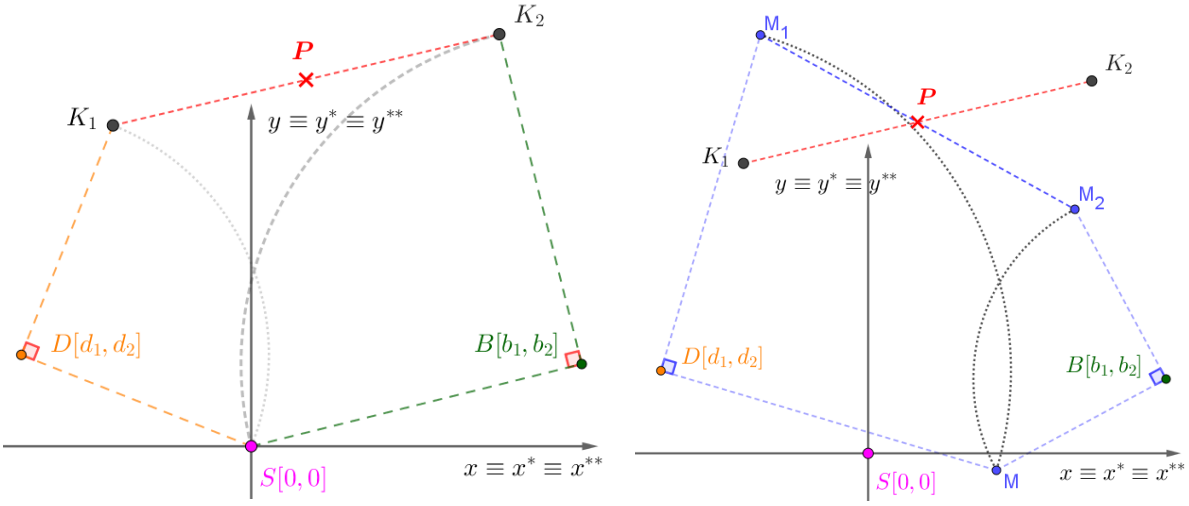
Pozícia jednotlivých kolíkov K_1, K_2 zodpovedá obrazu bodu S v otočeniach $\mathcal{S}_{(D,90°)}$ a $\mathcal{S}_{(B,-90°)}$ a platí:

$$\mathcal{S}_{(D,90°)}: S \longrightarrow K_1, \qquad \mathcal{S}_{(B,-90°)}: S \longrightarrow K_2.$$

Poklad sa nachádza na úsečke AB. Ak ho chceme lokalizovať, potrebujeme sa premiestniť z bodu A do bodu B. To je možné vykonať pomocou zloženého zobrazenia:

$$\mathcal{S}_{(D,90°)} \circ \mathcal{S}^{-1}_{(B,-90°)}: K_2 \longrightarrow S \longrightarrow K_1$$

$$\mathcal{S}_{(D,90°)} \circ \mathcal{S}_{(B,+90°)}: K_2 \longrightarrow K_1$$



Obr. 3.17

Analytické vyjadrenia zhodností sú:

$$\mathcal{S}_{(B,+90°)}: \begin{matrix} x^* = x.\cos 90° - y.\sin 90° + m_1 = -y + m_1 \\ y^* = x.\sin 90° + y.\cos 90° + m_2 = \ \ x + m_2, \end{matrix}$$

kde $m_1 = b_2 + b_1, m_2 = b_2 - b_1$ (stred súmernosti $B[b_1, b_2]$ je samodružný). Analogicky odvodíme:

$$\mathcal{S}_{(D,90°)}: \begin{matrix} x^{**} = x^*.\cos 90° - y^*.\sin 90° + n_1 = -y + d_2 + d_1 \\ y^{**} = x^*.\sin 90° + y^*.\cos 90° + n_2 = \ \ x + d_2 - d_1. \end{matrix}$$

Výsledná zhodnosť je

$$\mathcal{S}_{(D,90°)} \circ \mathcal{S}_{(B,+90°)}: \begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_2 + b_1 \\ b_2 - b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 + d_1 \\ d_2 - d_1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 + d_1 - b_2 + b_1 \\ d_2 - d_1 + b_2 + b_1 \end{pmatrix}.$$

Ide o analytické vyjadrenie stredovej súmernosti $\mathcal{S}_{S_0}$ so stredom $S_0 \left[\frac{d_2+d_1-b_2+b_1}{2}, \frac{d_2-d_1+b_2+b_1}{2}\right]$.

Keďže $\mathcal{S}_{S_0}: K_2 \longrightarrow K_1$, je bod P totožný so stredom S_0. Presnú pozíciu bodu P môžeme teda určiť výpočtom zo súradníc daných bodov $B[b_1, b_2], D[d_1, d_2]$ pri ľubovoľnej voľbe súradnicovej sústavy.

Z výsledku totiž vyplýva, že na pozícii bodu S nezáleží.

Ak by sme za východiskovú pozíciu šibenice zvolili ľubovoľný bod na ostrove a dodržali postup zakladania kolíkov, poklad P bude vždy na rovnakom mieste.

3.4.1 Skladanie osových súmerností v $\mathbb{E}_2$

V tejto kapitole časti ukážeme, že pomocou skladania vhodne zvolených osových súmerností dostaneme všetky typy zhodností v $\mathbb{E}_2$.

Skladanie dvoch osových súmerností $\mathcal{S}_{o_1}, \mathcal{S}_{o_2}$

a) osi súmerností o_1, o_2 sú **totožné** priamky.

Ak analytické vyjadrenie osových súmerností je v tvare:

$$\mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_{o_2}: \quad \begin{aligned} x^* &= \cos 2\alpha \,.\, x + \sin 2\alpha . y + b_1 \\ y^* &= \sin 2\alpha . x - \cos 2\alpha . y + b_2, \end{aligned}$$

potom dostaneme: $\mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_{o_2} = \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{I}$, pretože zo všeobecného vyjadrenia zloženého zobrazenia platí:

$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T . \mathbb{A}_1^T . \mathbb{X} + (\mathbb{A}_2^T . \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha & \cos 2\alpha . \sin 2\alpha - \sin 2\alpha . \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha . \cos 2\alpha - \cos 2\alpha . \sin 2\alpha & \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 . \cos 2\alpha + b_2 . \sin 2\alpha \\ b_1 . \sin 2\alpha - b_2 . \cos 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 . (1 + \cos 2\alpha) + b_2 . \sin 2\alpha \\ b_1 . \sin 2\alpha + b_2 . (1 - \cos 2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Ak os súmernosti o_1 prechádza bodom $Q[0, q]$, bod Q je samodružný a platí: [54]

$$b_1 = -q . \sin 2\alpha, \qquad b_2 = q . (1 + \cos 2\alpha).$$

Z toho vyplýva, že matica

$$\begin{pmatrix} b_1 . (1 + \cos 2\alpha) + b_2 . \sin 2\alpha \\ b_1 . \sin 2\alpha + b_2 . (1 - \cos 2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a výsledne zložené zobrazenie $\mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ je identita $\mathcal{I}$.

Názorne – ak položíme osi súmernosti o_1, o_2 totožné so súradnicovou osou y, t.j.

$$\mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_{o_2}: \quad \begin{aligned} x^* &= -x \\ y^* &= y \end{aligned},$$

potom vypočítame:

[54] Pozrite odvodenie analytického vyjadrenia osovej súmernosti v kap. 3.3.5.

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) osi súmerností o_1, o_2 sú **rovnobežné** priamky a odpovedajúce analytické vyjadrenia osových súmerností sú:

$$\mathcal{S}_{o_1}: \quad \begin{aligned} x^* &= \cos 2\alpha \,.\, x + \sin 2\alpha . y + b_1 \\ y^* &= \sin 2\alpha . x - \cos 2\alpha . y + b_2, \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{o_2}: \quad \begin{aligned} x^{**} &= \cos 2\alpha \,.\, x^* + \sin 2\alpha . y^* + b_3 \\ y^{**} &= \sin 2\alpha . x^* - \cos 2\alpha . y^* + b_4, \end{aligned}$$

kde $[b_1, b_2] \neq [b_3, b_4]$, potom pre zhodnosť $\mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ odvodíme:

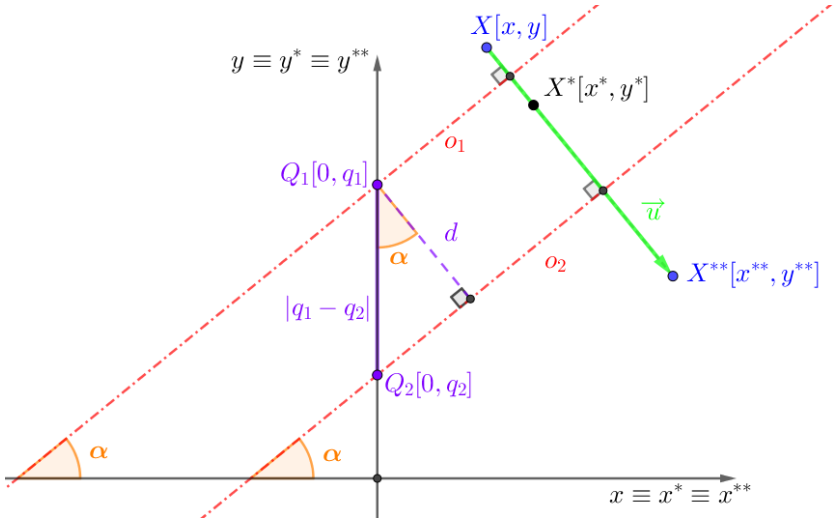
$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T . \mathbb{A}_1^T . \mathbb{X} + (\mathbb{A}_2^T . \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) =$$

$$\vdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 . \cos 2\alpha + b_2 . \sin 2\alpha \\ b_1 . \sin 2\alpha - b_2 . \cos 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 . \cos 2\alpha + b_2 . \sin 2\alpha + b_3 \\ b_1 . \sin 2\alpha - b_2 . \cos 2\alpha + b_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$



Obr. 3. 18

Ak os o_1 prechádza bodom $Q_1[0, q_1]$, os o_2 zase bodom $Q_2[0, q_2]$, kde $q_1 \neq q_2$, potom

$$b_1 = -q_1 . \sin 2\alpha, \quad b_2 = q_1 . (1 + \cos 2\alpha), \quad b_3 = -q_2 . \sin 2\alpha, \quad b_4 = q_2 . (1 + \cos 2\alpha)$$

a platí:

$$u_1 = b_1 . \cos 2\alpha + b_2 . \sin 2\alpha + b_3 = -q_1 . \sin 2\alpha . \cos 2\alpha + q_1 . (1 + \cos 2\alpha) . \sin 2\alpha - q_2 . \sin 2\alpha =$$

$$= (q_1 - q_2) . \sin 2\alpha$$

$$u_2 = b_1 . \sin 2\alpha - b_2 . \cos 2\alpha + b_4 = \cdots = (q_2 - q_1) . (1 + \cos 2\alpha).$$

Odvodili sme, že $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Z toho vyplýva, že zhodnosť $\mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$: $\begin{aligned} x^{**} &= x + u_1 \\ y^{**} &= y + u_2 \end{aligned}$

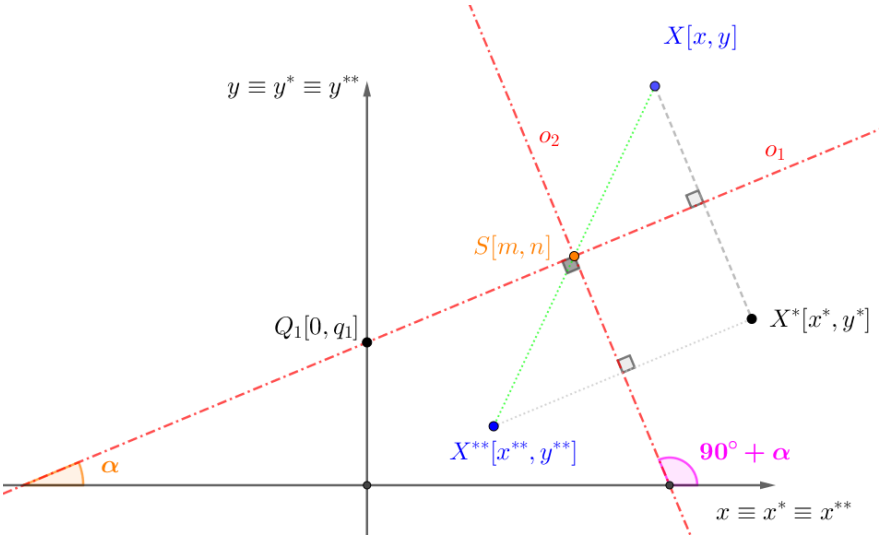
nemá samodružné body a každý vektor je samodružný. Ide o posunutie $\mathcal{S}_{\vec{u}}$ s vektorom $\vec{u} = (u_1, u_2)$,

ktorého veľkosť je dvojnásobná vzdialenosť osí súmernosti:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \cdots = \sqrt{2}.|q_1 - q_2|.\sqrt{1-\cos 2\alpha} = \cdots = 2.\cos\alpha.|q_1 - q_2|.$$

Vzhľadom na definíciu osovej súmernosti a rovnobežnosť osí o_1, o_2, vektor $\vec{u}$ je kolmý na osi súmerností. Navyše, skladanie nie je komutatívne. Ak $\mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_{\vec{u}}$, potom $\mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_{o_2} = \mathcal{S}_{-\vec{u}}$.

c) Osi súmernosti o_1, o_2 sú na seba **kolmé**.



Obr. 3.19

Osové súmernosti majú analytické vyjadrenia:

$$\mathcal{S}_{o_1}: \quad \begin{matrix} x^* = \cos 2\alpha\,.x + \sin 2\alpha.y + b_1 \\ y^* = \sin 2\alpha.x - \cos 2\alpha.y + b_2, \end{matrix}$$

$$\mathcal{S}_{o_2}: \quad \begin{matrix} x^{**} = \cos(180° + 2\alpha)\,.x^* + \sin(180° + 2\alpha).y^* + b_3 = \cdots = -\cos 2\alpha\,.x^* - \sin 2\alpha.y^* + b_3 \\ y^{**} = \sin(180° + 2\alpha).x^* - \cos(180° + 2\alpha).y^* + b_4 = \cdots = -\sin 2\alpha.x^* + \cos 2\alpha.y^* + b_4. \end{matrix}$$

Pre zhodnosť $\mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ odvodíme:

$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.\mathbb{X} + (\mathbb{A}_2^T.\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Vzhľadom k tomu, že priesečník osí $S[m, n]$ je samodružným bodom v oboch zhodnostiach, platí:

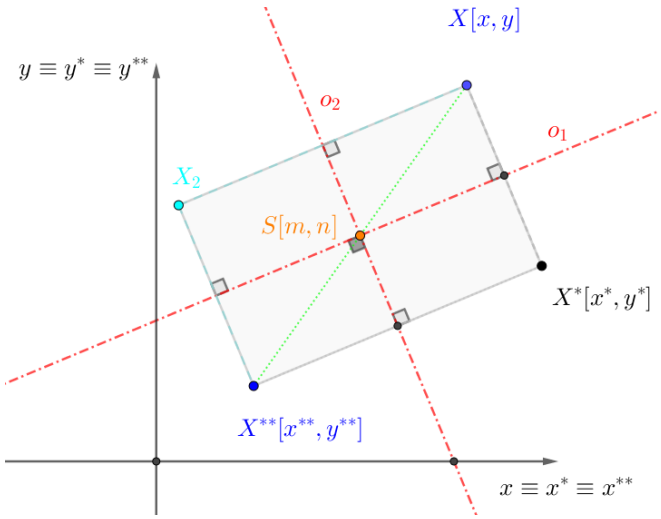
$$\begin{aligned} b_1 &= m.(1 - \cos 2\alpha) - n.\sin 2\alpha \\ b_2 &= -m.\sin 2\alpha + n.(1 + \cos 2\alpha) \\ b_3 &= m.(1 + \cos 2\alpha) + n.\sin 2\alpha \\ b_4 &= m.\sin 2\alpha + n.(1 - \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

Dosadíme za $b_j, j = 1,2,3,4$ do matíc a odvodíme:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m \\ 2n \end{pmatrix}.$$

Výsledkom je priama zhodnosť, ktorá má jediný samodružný bod $S[m,n]$ a súčasne, každý vektor asociovaného zobrazenia je tiež samodružný. Zložením $\mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ je stredová súmernosť $\mathcal{S}_S$ so stredom v priesečníku osí.

Z obr. 3.20 je zrejmé, že $\mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_{o_2} = \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_S$ (štvoruholník $XX^*X^{**}X_2$ je obdĺžnik osovo súmerný podľa priamok o_1, o_2).



Obr. 3.20

d) Osi súmernosti o_1, o_2 **zvierajú uhol** $\varphi \neq 0° + k.90°, k = 0,1,3.$

Osové súmernosti majú analytické vyjadrenia:

$$\mathcal{S}_{o_1}: \begin{matrix} x^* = \cos 2\alpha \,.\, x + \sin 2\alpha . y + b_1 \\ y^* = \sin 2\alpha . x - \cos 2\alpha . y + b_2 \end{matrix}$$

$$\mathcal{S}_{o_2}: \begin{matrix} x^{**} = \cos(2\varphi + 2\alpha) \,.\, x^* + \sin(2\varphi + 2\alpha) . y^* + b_3 \\ y^{**} = \sin(2\varphi + 2\alpha) . x^* - \cos(2\varphi + 2\alpha) . y^* + b_4 \end{matrix}$$

Pre zhodnosť $\mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ odvodíme:

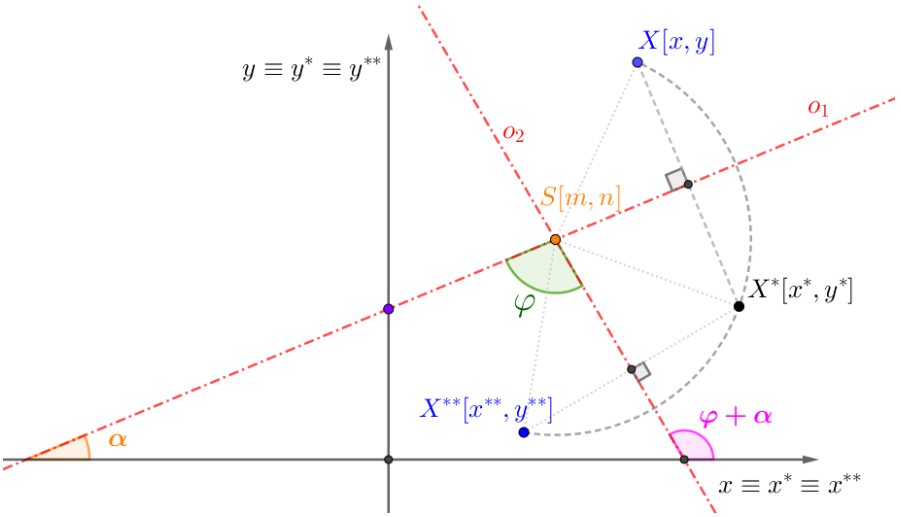
$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T . \mathbb{A}_1^T . \mathbb{X} + (\mathbb{A}_2^T . \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi + 2\alpha) & \sin(2\varphi + 2\alpha) \\ \sin(2\varphi + 2\alpha) & -\cos(2\varphi + 2\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos(2\varphi + 2\alpha) & \sin(2\varphi + 2\alpha) \\ \sin(2\varphi + 2\alpha) & -\cos(2\varphi + 2\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} =$$

$$\vdots$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -sin2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2\varphi + 2\alpha) & \sin(2\varphi + 2\alpha) \\ \sin(2\varphi + 2\alpha) & -\cos(2\varphi + 2\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$



Obr. 3.21

Vzhľadom k tomu, že priesečník osí $S[m,n]$ je samodružným bodom v oboch zhodnostiach, platí:

$$b_1 = m.(1-\cos 2\alpha) - n.\sin 2\alpha$$

$$b_2 = -m.\sin 2\alpha + n.(1+\cos 2\alpha)$$

$$b_3 = m.(1-\cos(2\varphi+2\alpha)) - n.\sin(2\varphi+2\alpha)$$

$$b_4 = -m.\sin(2\varphi+2\alpha) + n.(1+\cos(2\varphi+2\alpha))$$

Dosadíme za $b_j, j = 1,2,3,4$ do matíc a po úpravách odvodíme:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m.(1-\cos 2\varphi) + n.\sin 2\varphi \\ -m.\sin 2\varphi + n.(1-\cos 2\varphi) \end{pmatrix}.$$

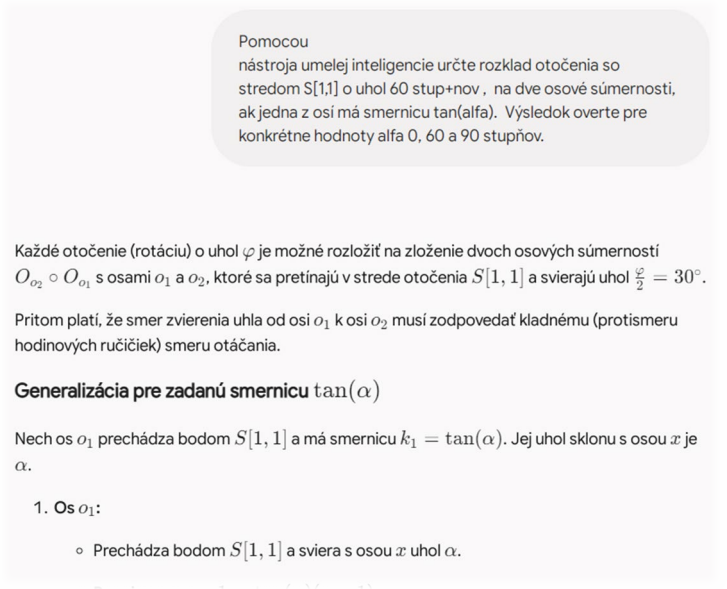
Výsledkom je priama zhodnosť, ktorej analytické vyjadrenie je vyjadrením otočenia $\mathcal{S}_{(S,2\varphi)}$ okolo stredu $S[m,n]$ s uhlom otočenia 2φ, kde φ je uhol uvažovaných osí súmernosti.[55]

Skladanie nie je komutatívne, pretože $\mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_{o_2} = \mathcal{S}_{(S,-2\varphi)}$.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte rozklad otočenia $\mathcal{S}_{(S,60°)}$, kde $S[1,1]$ na dve osové súmernosti, ak jedna z osí má rovnicu $y = \tan\alpha.x$. Výsledok overte pre konkrétne hodnoty $\alpha = 0°, \alpha = 60°$ a $\alpha = 90°$. Návod nájdete na obr. 3.22.

[55] Porovnajte výsledok s odvodenými rovnicami otočenia v kap. 3.3.4.



Obr. 3.22 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 5. septembra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Príklad

Zistite výsledok zloženia $\mathcal{S}_{(S_2,120°)} \circ \mathcal{S}_{(S_1,60°)}$ *dvoch otočení* $\mathcal{S}_{(S_1,60°)}$ *a* $\mathcal{S}_{(S_2,120°)}$ *so stredmi* $S_1[0,0]$ *a* $S_2[2,2]$ *v* $\mathbb{E}_2$.

Riešenie

a) Analytické vyjadrenia otočení sú nasledovné:

$$\mathcal{S}_{(S_1,60°)}: \begin{matrix} x^* = x.\cos 60° - y.\sin 60° + 0 = \frac{1}{2}.x - \frac{\sqrt{3}}{2}.y \\ y^* = x.\sin 60° + y.\cos 60° + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.x + \frac{1}{2}y \end{matrix}$$

$$\mathcal{S}_{(S_2,120°)}: \begin{matrix} x^{**} = x^*.\cos 120° - y^*.\sin 120° + 2.(1 - \cos 120°) + 2.\sin 120° \\ y^{**} = x^*.\sin 120° + y^*.\cos 120° - 2.\sin 120° + 2.(1 - \cos 120°) \end{matrix}$$

$$\mathcal{S}_{(S_2,120°)}: \begin{matrix} x^{**} = -\frac{1}{2}.x^* - \frac{\sqrt{3}}{2}y^* + (3 + \sqrt{3}) \\ y^{**} = \frac{\sqrt{3}}{2}.x^* - \frac{1}{2}.y^* + (3 - \sqrt{3}) \end{matrix}$$

Uvažujme teda $\mathcal{S}_{(S_2,120°)} \circ \mathcal{S}_{(S_1,60°)}$.

$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.\mathbb{X} + (\mathbb{A}_2^T.\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) =$$

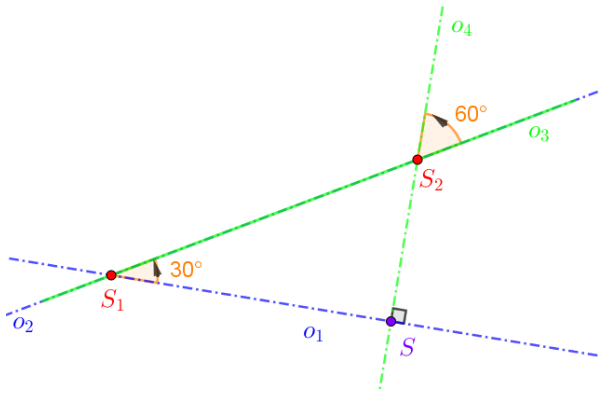
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} \\ 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} \\ 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Výsledná zhodnosť je stredová súmernosť $\mathcal{S}_S$ so stredom $S\left[\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right]$.

b) Použijeme názornú úvahu o rozklade otočenia na dve osové súmernosti.

Rozložíme každé otočenie do dvoch vhodných osových súmerností tak, aby sa príslušné osi súmernosti pretínali v strede danej súmernosti a zvierali polovičný uhol, [56] t.j.
$\mathcal{S}_{(S_1,60°)} = \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$, kde $|\angle(o_1, o_2)| = 30°$ a $\mathcal{S}_{(S_2,120°)} = \mathcal{S}_{o_4} \circ \mathcal{S}_{o_3}$, kde $|\angle(o_3, o_4)| = 60°$, pričom (vzhľadom na nejednoznačnosť rozkladu) môžeme položiť $o_2 \equiv S_1S_2$, $o_2 \equiv o_3$.



Obr. 3.23

Platí:

$$\mathcal{S}_{(S_2,120°)} \circ \mathcal{S}_{(S_1,60°)} = (\mathcal{S}_{o_4} \circ \mathcal{S}_{o_3}) \circ (\mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}) = \mathcal{S}_{o_4} \circ (\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2}) \circ \mathcal{S}_{o_1} =$$
$$= \mathcal{S}_{o_4} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_{o_4} \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_S.$$

Ak skladáme dve súmernosti s totožnými osami, dostaneme identitu $\mathcal{J}$.
Z toho vyplýva, že riešením je stredová súmernosť, keďže osi o_1 a o_4 sú na seba kolmé (obr. 3.23). [57]

Skladanie troch osových súmerností $\mathcal{S}_{o_1}$, $\mathcal{S}_{o_2}$ a $\mathcal{S}_{o_3}$

Pri skladaní troch osových súmerností postupujeme analogicky. Ak analytické vyjadrenia zhodností sú:

$$\mathcal{S}_{o_1}: \quad \begin{aligned} x^* &= \cos 2\alpha \,.\, x + \sin 2\alpha . y + b_1 \\ y^* &= \sin 2\alpha . x - \cos 2\alpha . y + b_2 \end{aligned} \qquad \mathcal{S}_{o_2}: \quad \begin{aligned} x^{**} &= \cos 2\beta \,.\, x^* + \sin 2\beta . y^* + b_3 \\ y^{**} &= \sin 2\beta . x^* - \cos 2\beta . y^* + b_4 \end{aligned}$$

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{A}_1^T . \mathbb{X} + \mathbb{B}_1 \qquad \mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T . \mathbb{X}^* + \mathbb{B}_2$$

$$\mathcal{S}_{o_3}: \quad \begin{aligned} x^{***} &= \cos 2\gamma \,.\, x^{**} + \sin 2\gamma . y^{**} + b_5 \\ y^{***} &= \sin 2\gamma . x^{**} - \cos 2\gamma . y^{**} + b_6 \end{aligned}$$

$$\mathbb{X}^{***} = \mathbb{A}_3^T . \mathbb{X}^{**} + \mathbb{B}_3$$

potom pre zhodnosť $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ všeobecne odvodíme:

$$\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1} : X \longrightarrow X^* \longrightarrow X^{**} \longrightarrow X^{***}$$

$$\mathbb{X}^{***} = \mathbb{A}_3^T \mathbb{A}_2^T . \mathbb{A}_1^T . \mathbb{X} + \mathbb{A}_3^T (\mathbb{A}_2^T . \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) + \mathbb{B}_3 = \mathbb{A}_3^T \mathbb{A}_2^T . \mathbb{A}_1^T . \mathbb{X} + (\mathbb{A}_3^T . \mathbb{A}_2^T . \mathbb{B}_1 + \mathbb{A}_3^T . \mathbb{B}_2 + \mathbb{B}_3).$$

Kvôli **názornosti** analyzovaných prípadov **zvolíme osobitné umiestnenie** osí súmernosti do súradnicovej sústavy.

[56] Uhol otočenia má dvojnásobnú veľkosť, než je veľkosť uhla daných osí.
[57] Obe riešenia a), a aj b), majú svoje opodstatnenie. Analytický prístupom sme vypočítali súradnice stredu S súmernosti a lokalizovali jeho pozíciu. Tento prístup je však menej názorný než riešenie b), kde aplikujeme vetu o súčte veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka S_1S_2S.

a) Osi súmernosti o_1, o_2, o_3 sú navzájom **rovnobežné** (a navzájom rôzne) priamky umiestnené do súradnicovej sústavy podľa obr. 3.24. Pre zhodnosti máme analytické vyjadrenia:

$$\mathcal{S}_{o_1}: \begin{matrix} x^* = -x \\ y^* = y \end{matrix}, \qquad \mathcal{S}_{o_2}: \begin{matrix} x^{**} = -x^* + 2m \\ y^{**} = y^* \end{matrix}, \qquad \mathcal{S}_{o_3}: \begin{matrix} x^{***} = -x^{**} + 2n \\ y^{***} = y^{**} \end{matrix}$$

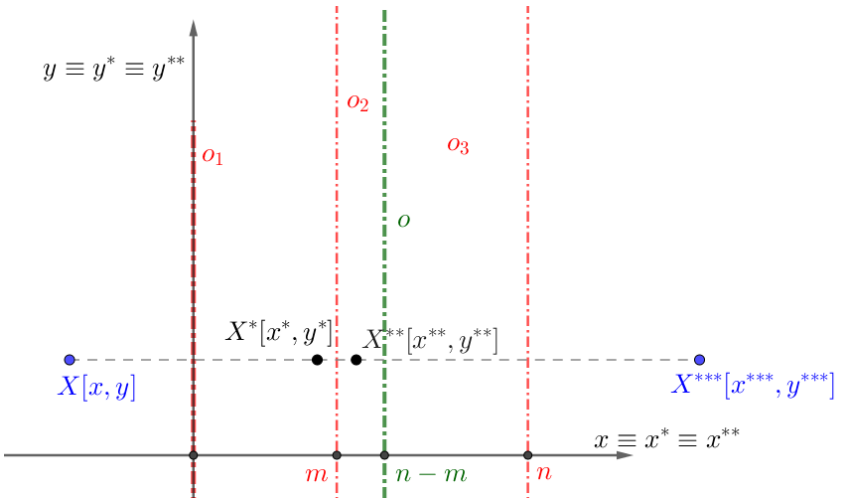
kde $m \neq n, m, n \in R - \{0\}$.

Pre výslednú zhodnosť $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ platí:

$$x^{***} = -x^{**} + 2n = -(-x^* + 2m) + 2n = x^* + 2(n-m) = -x + 2(n-m)$$
$$y^{***} = y^{**} = y^* = y$$

$$\mathcal{S}_o: \quad \begin{pmatrix} x^{***} \\ y^{***} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(n-m) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ide o analytické vyjadrenie osovej súmernosti $\mathcal{S}_o$ s osou kolmou na súradnicovú os x a prechádzajúcu bodom $O[n-m, 0]$.



Obr. 3.24

b) Osi súmernosti o_1, o_2 sú navzájom **rovnobežné** a os o_3 je **kolmá** na o_1. Priamky sú umiestnené do súradnicovej sústavy podľa obr. 3.25. Pre jednotlivé zhodnosti máme analytické vyjadrenia:

$$\mathcal{S}_{o_1}: \begin{matrix} x^* = -x \\ y^* = y \end{matrix}, \qquad \mathcal{S}_{o_2}: \begin{matrix} x^{**} = -x^* + 2m \\ y^{**} = y^* \end{matrix}, \qquad \mathcal{S}_{o_3}: \begin{matrix} x^{***} = x^{**} \\ y^{***} = -y^{**} + 2n \end{matrix}$$

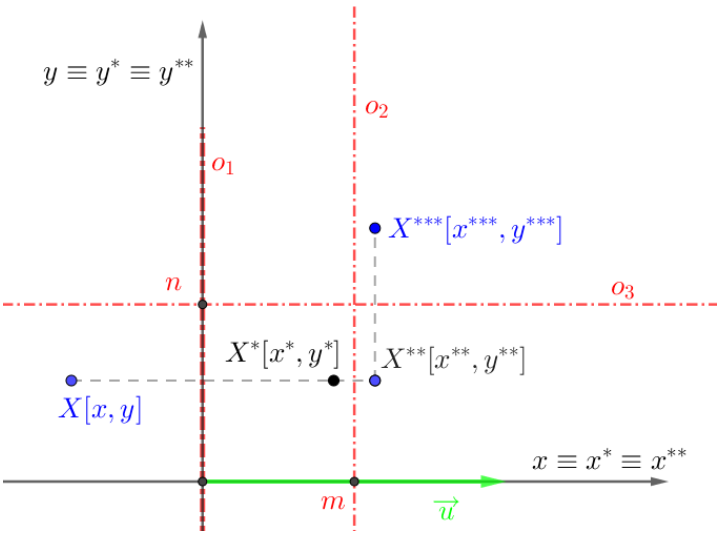
kde $m \neq 0, m, n \in R$.

Pre výslednú zhodnosť $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ platí:

$$x^{***} = x^{**} = -x^* + 2m = -x^* + 2m = x + 2m$$
$$y^{***} = -y^{**} + 2n = -y^* + 2n = -y + 2n$$

$$\mathcal{S}_o: \quad \begin{pmatrix} x^{***} \\ y^{***} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m \\ 2n \end{pmatrix}$$

Determinant matice zhodnosti $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)$ a ide o nepriamu zhodnosť. Ako vyplýva z analytického vyjadrenia, táto zhodnosť nemá samodružné body, preto ide o posunutú súmernosť s osou o_3 a vektorom $\vec{u}$, kolmým na os o_1, resp. o_2. Výsledok skladania vyplýva aj z toho, že $\mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_{\vec{u}}$, kde $|\vec{u}| = 2|o_1, o_2| = 2|m|$ a súčasne $\vec{u} \parallel o_3$.



Obr. 3.25

c) Nech os súmernosti o_1 prechádza bodom $O[0,0]$ a má smernicový uhol $\alpha \neq 0° + k.90°, k = 0,1,2,3$. Súčasne, nech osi súmernosti o_2, o_3 sú navzájom **rovnobežné.** Priamky sú umiestnené do súradnicovej sústavy podľa obr. 3.26. Pre jednotlivé zhodnosti máme analytické vyjadrenia:

$$\mathcal{S}_{o_1}: \begin{matrix} x^* = x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha \\ y^* = x.\sin 2\alpha - y.\cos 2\alpha \end{matrix} \qquad \mathcal{S}_{o_2}: \begin{matrix} x^{**} = -x^* + 2m \\ y^{**} = y^* \end{matrix}$$

$$\mathcal{S}_{o_3}: \begin{matrix} x^{***} = -x^{**} + 2n \\ y^{***} = y^{**} \end{matrix}$$

kde $m \neq 0, m, n \in R, \alpha \neq 0° + k.90°, k = 0,1,2,3.$

Pre výslednú zhodnosť $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ platí:

$$x^{***} = -x^{**} + 2n = -(-x^* + 2m) + 2n = x^* + 2.(n - m) = x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha + 2.(n - m)$$
$$y^{***} = y^{**} = y^* = x.\sin 2\alpha - y.\cos 2\alpha$$

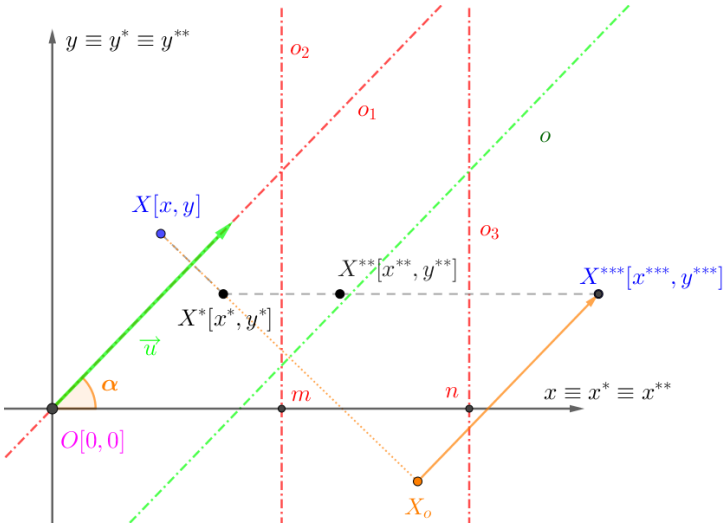
$$\mathcal{S}_o: \begin{pmatrix} x^{***} \\ y^{***} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.(n-m) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinant matice zhodnosti $\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{vmatrix} = (-1)$ a ide o nepriamu zhodnosť.

Vypočítame samodružné body, ak existujú. Počítame:

$$x = x.\cos 2\alpha + y.\sin 2\alpha + 2(n - m)$$
$$y = x.\sin 2\alpha - y.\cos 2\alpha$$
$$\vdots$$
$$m - n = -x.\sin\alpha + y.\cos\alpha$$
$$0 = x.\sin\alpha - y.\cos\alpha$$

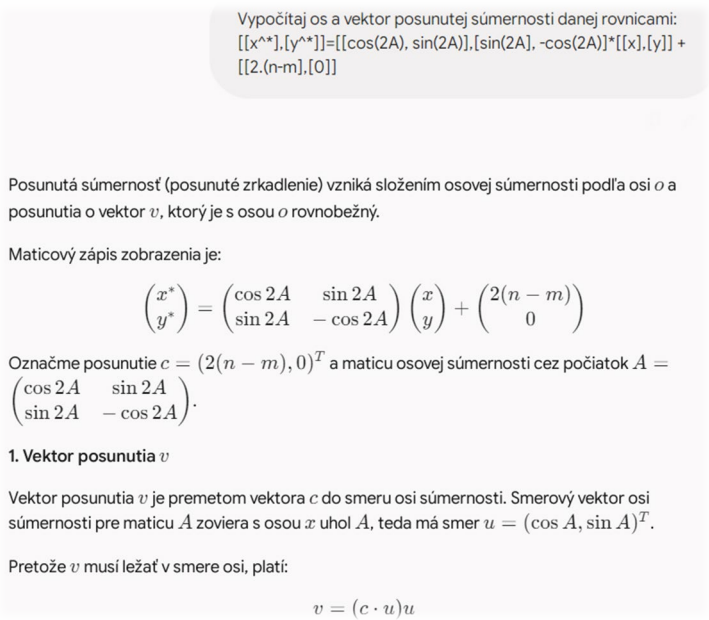
Pri podmienke $m \neq n$, sústava nemá riešenie. Samodružné body neexistujú. Výsledná zhodnosť $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ je posunutá súmernosť.



Obr. 3.26

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie sa presvedčte, že os posunutej súmernosti je rovnobežná s osou o_1. Určte aj vektor posunutej súmernosti. Návod je na obr. 3.26.



Vypočítaj os a vektor posunutej súmernosti danej rovnicami: [[x^*],[y^*]]=[[cos(2A), sin(2A)],[sin(2A], -cos(2A)]*[[x],[y]] + [[2.(n-m],[0]]

Posunutá súmernosť (posunuté zrkadlenie) vzniká složením osovej súmernosti podľa osi o a posunutia o vektor v, ktorý je s osou o rovnobežný.

Maticový zápis zobrazenia je:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2A & \sin 2A \\ \sin 2A & -\cos 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(n-m) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Označme posunutie $c = (2(n-m), 0)^T$ a maticu osovej súmernosti cez počiatok $A = \begin{pmatrix} \cos 2A & \sin 2A \\ \sin 2A & -\cos 2A \end{pmatrix}$.

1. Vektor posunutia v

Vektor posunutia v je premetom vektora c do smeru osi súmernosti. Smerový vektor osi súmernosti pre maticu A zoviera s osou x uhol A, teda má smer $u = (\cos A, \sin A)^T$.

Pretože v musí ležať v smere osi, platí:

$$v = (c \cdot u)u$$

Obr. 3.27 Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 10. septembra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Úloha

Porovnajte získaný výsledok s poznámkou o smerovom vektore osi súmernosti, ktorá je uvedená na konci kapitoly 3.3.6.

Úloha

Vo vhodnom dynamickom softvéri vymodelujte skladanie troch osových súmerností podľa obr. 3.26.

a) Overte grafický výsledok skladania $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1} : X \longrightarrow X^* \longrightarrow X^{**} \longrightarrow X^{***}$ s odvodeným analytickým vyjadrením tak, že súradnice bodu X^{***} vypočítate zo súradníc bodu X.

b) Konštrukčne zostrojte os posunutej súmernosti o tak, že zostrojíte pomocný obdĺžnik s uhlopriečkou XX^{***}. Zdôvodnite, prečo leží stred obdĺžnika na osi posunutej súmernosti.

d) Osi súmernosti o_1, o_2, o_3 prechádzajú **spoločným priesečníkom** $O[0,0]$.
Priamky sú umiestnené do súradnicovej sústavy podľa obr. 3.28 a pre jednotlivé zhodnosti máme analytické vyjadrenia:

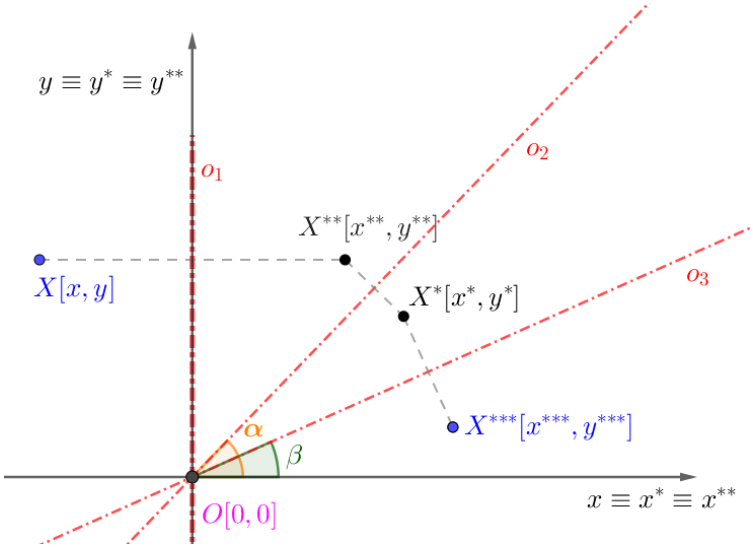
$$\mathcal{S}_{o_1}: \quad \begin{matrix} x^* = -x \\ y^* = y \end{matrix} \qquad \mathcal{S}_{o_2}: \quad \begin{matrix} x^{**} = x^*.\cos 2\alpha + y^*.\sin 2\alpha \\ y^{**} = x^*.\sin 2\alpha - y^*.\cos 2\alpha \end{matrix}$$

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{A}_1^T.\mathbb{X} \qquad \mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{X}^*$$

$$\mathcal{S}_{o_3}: \quad \begin{matrix} x^{***} = x^{**}.\cos 2\beta + y^{**}.\sin 2\beta \\ y^{***} = x^{**}.\sin 2\beta - y^{**}.\cos 2\beta \end{matrix}$$

$$\mathbb{X}^{***} = \mathbb{A}_3^T.\mathbb{X}^{**}$$

kde $\alpha \neq \beta, \alpha \neq 90° + k.90°, k = 0,1,2,3.$



Obr. 3.28

Pre odvodenie výslednej zhodnosti $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ použijeme prehľadnejší maticový zápis. Platí:

$$\mathbb{X}^{***} = \mathbb{A}_3^T.\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_3^T.\mathbb{A}_2^T.\mathbb{X}^* = \mathbb{A}_3^T.\mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.\mathbb{X} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{matrix} x^{***} = -x.\cos(2\beta - 2\alpha) - y.\sin(2\beta - 2\alpha) \\ y^{***} = -x.\sin(2\beta - 2\alpha) + y.\cos(2\beta - 2\alpha) \end{matrix}$$

Ak označíme $\beta - \alpha = \varphi$, potom

$$\begin{matrix} x^{***} = -x.\cos 2\varphi - y.\sin 2\varphi \\ y^{***} = -x.\sin 2\varphi + y.\cos 2\varphi \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{***} \\ y^{***} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

je analytickým vyjadrením osovej súmernosti.[58] Navyše, osou posunutej súmernosti je priamka, ktorej rovnica je: $y = -\frac{1}{\tan\varphi}.x.$

Úloha

Použite analytické vyjadrenia v predchádzajúceho prípadu a pomocou nástroja umelej inteligencie zistite typ zhodnosti $\mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_3}$. Stanovte samodružné body a samodružné vektory, ak existujú. Aký výsledok je v prípade skladania $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_{o_2}$?

e) Osi súmernosti o_1, o_2 sú navzájom **rôznobežné** a os o_3 neprechádza spoločným priesečníkom S priamok o_1, o_2. Priamky sú umiestnené do súradnicovej sústavy podľa obr. 3.29 (kvôli názornosti $S[0,0]$. Pre jednotlivé zhodnosti máme analytické vyjadrenia:

$$\mathcal{S}_{o_1}: \begin{matrix} x^* = -x \\ y^* = y \end{matrix}, \qquad \mathcal{S}_{o_2}: \begin{matrix} x^{**} = x^*.\cos 2\alpha + y^*.\sin 2\alpha \\ y^{**} = x^*.\sin 2\alpha - y^*.\cos 2\alpha \end{matrix}$$

$$\mathcal{S}_{o_3}: \begin{matrix} x^{***} = x^{**}.\cos 2\beta + y^{**}.\sin 2\beta + b_1 \\ y^{***} = x^{**}.\sin 2\beta - y^{**}.\cos 2\beta + b_2 \end{matrix}$$

kde $\alpha \neq \beta, [b_1, b_2] \neq [0,0]$.

Pre výslednú zhodnosť $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}$ platí:

$$\begin{aligned} x^{***} &= \cdots = -x.\cos(2\alpha - 2\beta) + y.\sin(2\alpha - 2\beta) + b_1 \\ y^{***} &= \cdots = -x.\sin(2\alpha - 2\beta) + y.\cos(2\alpha - 2\beta) + b_2 \end{aligned}$$

Ak označíme uhol osí o_2, o_3 ako $\varphi = \beta - \alpha$, potom

$$\cos(2\alpha - 2\beta) = \cos 2\varphi \qquad \text{a} \qquad \sin(2\alpha - 2\beta) = -\sin 2\varphi.$$

Analytické vyjadrenie má tvar:

$$\mathcal{S}: \quad \begin{pmatrix} x^{***} \\ y^{***} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

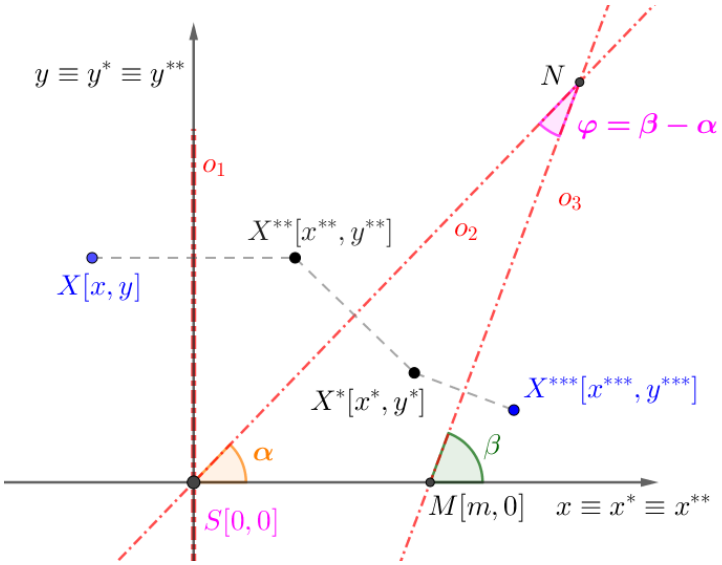
Determinant matice zhodnosti $\begin{vmatrix} -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{vmatrix} = (-1)$ a ide o **nepriamu** zhodnosť.

Vypočítame samodružné body, ak existujú.

$$\begin{aligned} x &= -x.\cos 2\varphi + y.\sin 2\varphi + b_1 \\ y &= -x.\sin 2\varphi + y.\cos 2\varphi + b_2 \\ &\vdots \\ b_1 &= x.2\cos^2\varphi + y.\sin 2\varphi \\ b_2 &= x.\sin 2\varphi + y.2.\sin^2\varphi \\ &\vdots \\ \frac{b_1}{2\cos\varphi} &= x.\cos\varphi + y.\sin\varphi \\ \frac{b_2}{2\sin\varphi} &= x.\cos\varphi + y.\sin\varphi \end{aligned}$$

[58] Odôvodnenie, že ide o osovú súmernosť vyplýva aj zo skutočnosti, že determinant matice zhodnosti sa rovná (-1) a bod $O[0,0]$ je samodružný (posunutá súmernosť nemá samodružné body).

pod podmienkou $\varphi \neq 90° + k.180°, k = 0{,}1$ (osi o_2, o_3 nie sú kolmé) a $\varphi \neq 0° + k.180°$ (osi o_2, o_3 nie sú rovnobežné a ani totožné).



Obr. 3.29

Rozlíšime 2 možnosti:

- Ak $\frac{b_1}{2\cos\varphi} = \frac{b_2}{2\sin\varphi} \Leftrightarrow \tan\varphi = \frac{b_2}{b_1}$, potom samodružné body sú bodmi priamky so všeobecnou rovnicou $\frac{b_1}{2\cos\varphi} = x.\cos\varphi + y.\sin\varphi$

  Ak bod $M[m, 0] \in o_3$ je **samodružný**, potom

  $$b_1 = m.(1 - \cos 2\beta) = m.2\sin^2\beta$$
  $$b_2 = -m.\sin 2\beta$$

  a odvodíme:

  $$\tan\varphi = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-m.\sin 2\beta}{m.2\sin^2\beta} = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = -cotan\,\beta = -\tan(90° - \beta) = \tan(\beta - 90°)$$

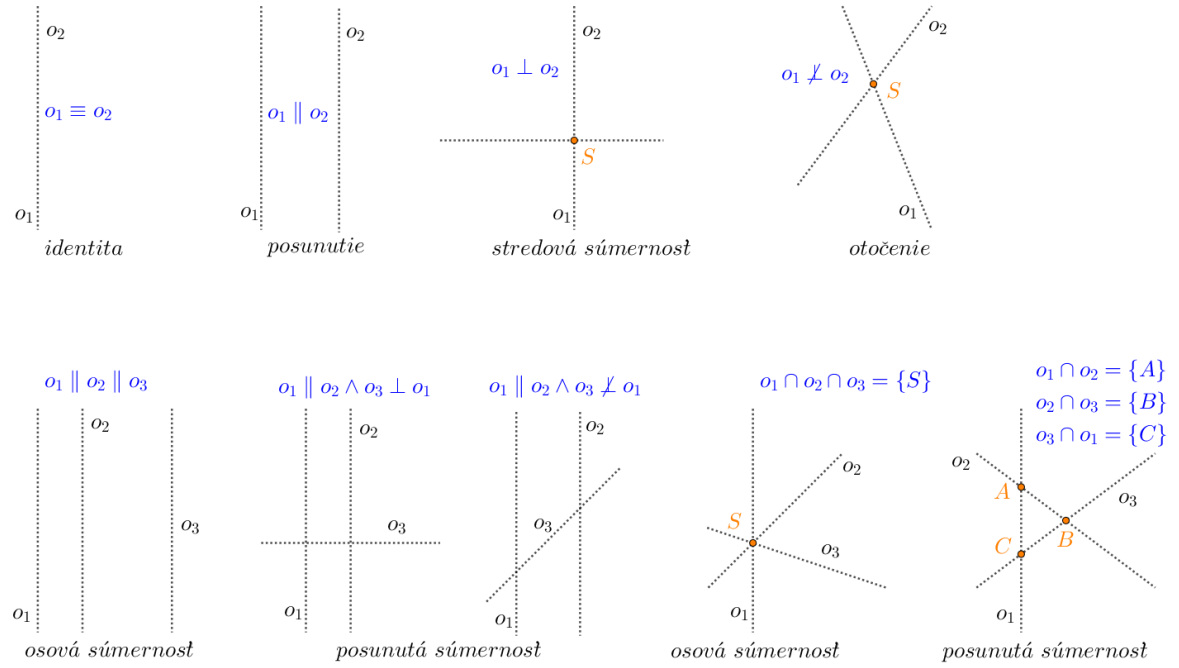
  Z toho vyplýva, že: $\varphi = \beta - \alpha = \beta - 90° \Leftrightarrow \alpha = 90°$

  Tento prípad sme podmienkami vylúčili (os súmernosti o_2 by bola totožná s osou o_1).

- Zostáva teda možnosť, kde $\frac{b_1}{2\cos\varphi} \neq \frac{b_2}{2\sin\varphi}$. Z toho vyplýva, že samodružné body neexistujú. Výsledná zhodnosť je **posunutá súmernosť** s analytickým vyjadrením:

$$\mathcal{S}: \quad \begin{pmatrix} x^{***} \\ y^{***} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m.\sin^2\beta \\ -m.\sin 2\beta \end{pmatrix}.$$

Na obr. 3.30 je znázornený prehľad získaných výsledkov skladaní dvoch, resp. troch osových súmerností.



Obr. 3.30

Ukážeme, že skladať väčší počet osových súmerností už neprinesie nový výsledok.

Uvažujme o štyroch osových súmernostiach.

Nech sú dané štyri osové súmernosti $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c$ a $\mathcal{S}_d$ s osami súmernosti a, b, c a d. Rozlíšime tri základné prípady:

- $a \cap b = \{A\}, c \cap d = \{B\}, A \neq B$. Ak označíme $m \equiv AB$, potom platí:

$$\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ (\mathcal{I}) \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ (\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a =$$
$$= \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_m) \circ (\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a) =$$
$$= (\mathcal{S}_p) \circ (\mathcal{S}_q) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$$

  Dôvod: priamky m, c, d sú osi súmerností, ktoré prechádzajú jedným bodom A. Výsledkom $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_m$ je teda osová súmernosť $\mathcal{S}_p$ s osou p. Pre priamky a, b, m je situácia analogická.

- $a \cap b = \{A\}, c \parallel d$. Ak bodom A zostrojíme priamku m, ktorá bude rovnobežná s priamkou c, potom platí:

$$\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ (\mathcal{I}) \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ (\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a =$$
$$= (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_m) \circ (\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q,$$

  kde výsledkom $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_m$ je osová súmernosť $\mathcal{S}_p$, lebo $c \parallel d \parallel m$. Výsledkom $\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ je opäť osová súmernosť $\mathcal{S}_q$, pretože $a \cap b \cap m = \{A\}$.

- $a \parallel b \wedge c \parallel d$, kde $a \nparallel c$. Ak označíme priesečník $b \cap c = \{Q\}$ a zostrojíme ním takú priamku m, ktorá pretne priamku a v bode P, potom platí:

$$\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d \circ (\mathcal{I}) \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d \circ (\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a =$$

$$= (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_m) \circ (\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a),$$

kde $b \cap c \cap m = \{Q\}$. Z toho vyplýva, že $\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b$ je osová súmernosť s $\mathcal{S}_e$ „novou" osou e prechádzajúcou tiež bodom Q a môžeme zapísať:

$$(\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_m) \circ (\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a) = (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_m) \circ (\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_a).$$

Opäť ide o zloženie štyroch osových súmerností, kde $m \cap a = \{P\}$ a $d \parallel e$ alebo existuje bod R taký, že $d \cap e = \{R\}$. Obe možnosti sú však už predchádzajúcimi prípadmi. Platí teda:

$$\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_f \circ \mathcal{S}_g,$$

kde $\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_g$ sú vhodné osové súmernosti s osami f a g.

Význam skladania štyroch osových súmerností je v **algoritme** pre skladanie $n, n \geq 4, n \in N$ osových súmerností:

a) Pomocou (v grupe zhodností platného) asociatívneho zákona *„postupne v zápise osové súmernosti uzátvorkujeme"* po štvoriciach, t.j.

$$(\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_{n-1} \circ \mathcal{S}_{n-2} \circ \mathcal{S}_{n-3}) \circ (\mathcal{S}_{n-4} \circ \mathcal{S}_{n-5} \circ \mathcal{S}_{n-6} \circ \mathcal{S}_{n-7}) \circ \ldots \circ \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1.$$

b) Ak je $n = 4k + z, k \in N, z \in \{0,1,2,3\}$, výsledkom skladania je $2k + z$ osových súmerností

(z každej zátvorky „dostaneme najviac dve osové súmernosti"), čím sa zredukoval ich celkový počet.

c) Postup s *„uzátvorkovaním"* opäť zopakujeme, čím postupne znižujeme počet osových súmerností, až ich zostane najviac štyri.

d) Na záver dostaneme:

- práve štyri osové súmernosti. Podľa predchádzajúcich úvah ich vieme nahradiť najviac 2 osovými súmernosťami.
- Ak zostanú tri osové súmernosti, výsledkom ich skladania bude osová súmernosť alebo posunutá súmernosť.
- Ak zostanú dve osové súmernosti alebo len jedna osová súmernosť, tak algoritmus „prirodzene" skončil.

Z vyššie uvedených úvah vyplýva veta:

Veta (o redukcii počtu osových súmerností)

*Zložením ľubovoľného **párneho** počtu osových súmerností sa rovná zloženiu **dvoch** osových súmerností a výsledkom je **priama** zhodnosť.*

*Zloženie **nepárneho** počtu osových súmerností sa rovná zloženiu **troch** osových súmerností alebo **jednej** osovej súmernosti a výsledná zhodnosť je **nepriamou** zhodnosťou.*

Úloha

Pomocou vhodného dynamického softvéru vymodelujte skladanie štyroch osových súmerností tak, aby ste preverili všetky možnosti vzájomnej polohy štyroch osí súmernosti. Začnite prípadom štyroch

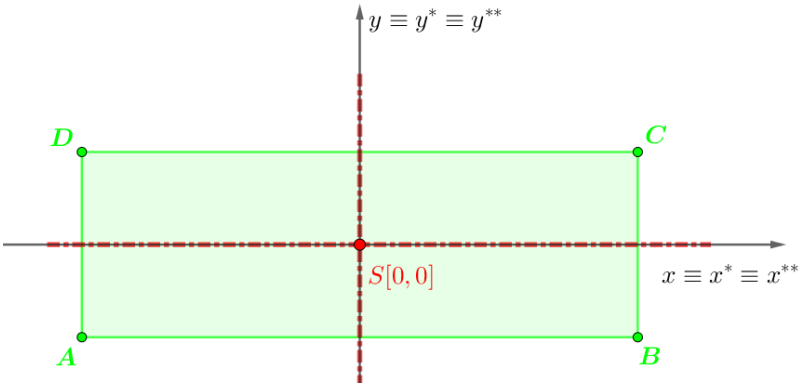
navzájom totožných osí, následne štyroch navzájom rôznych rovnobežných osí atď. Postupujte systematicky.

Príklad

Určte všetky zhodnosti v $\mathbb{E}_2$, ktoré zobrazia vrcholy obdĺžnika $ABCD$ zase do vrcholov daného obdĺžnika. Tvoria tieto zhodnosti vzhľadom na operáciu skladania zhodností grupu? Ak áno, napíšte Cayleyho tabuľku?

Riešenie

Vhodne umiestnime obdĺžnik $ABCD$ do súradnicovej sústavy (obr. 3.31). Existujú štyri zhodnosti – identita $\mathcal{I}$, súmernosť $\mathcal{S}_x$ podľa súradnicovej osi x, súmernosť $\mathcal{S}_x$ podľa súradnicovej osi y a stredová súmernosť $\mathcal{S}_S$ so stredom $S[0,0]$, ktoré zobrazujú vrcholy obdĺžnika tak, že tento štvoruholník ako útvar nezmení polohu. [59]



Obr. 3.31

Platí:

$$\mathcal{I}: \begin{matrix} A \longrightarrow A \\ B \longrightarrow B \\ C \longrightarrow C \\ D \longrightarrow D \end{matrix} \qquad \mathcal{S}_x: \begin{matrix} A \longrightarrow D \\ B \longrightarrow C \\ C \longrightarrow B \\ D \longrightarrow A \end{matrix} \qquad \mathcal{S}_y: \begin{matrix} A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow A \\ C \longrightarrow D \\ D \longrightarrow C \end{matrix} \qquad \mathcal{S}_S: \begin{matrix} A \longrightarrow C \\ B \longrightarrow D \\ C \longrightarrow A \\ D \longrightarrow B \end{matrix}$$

Z príslušných vlastností uvedených zhodnosti vyplýva, že sú involutorné, t.j.

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^{-1}, \quad \mathcal{S}_x = \mathcal{S}_x^{-1}, \quad \mathcal{S}_y = \mathcal{S}_y^{-1} \text{ a } \mathcal{S}_S = \mathcal{S}_S^{-1}.$$

Vzhľadom na operáciu skladania zhodností tvoria grupu. Necháme na čitateľa, aby overil, že Cayleyho tabuľka grupy reprodukujúcej obdĺžnik je nasledovná: [60]

$\circ$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{S}_x$	$\mathcal{S}_y$	$\mathcal{S}_S$
$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{S}_x$	$\mathcal{S}_y$	$\mathcal{S}_S$
$\mathcal{S}_x$	$\mathcal{S}_x$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{S}_S$	$\mathcal{S}_y$
$\mathcal{S}_y$	$\mathcal{S}_y$	$\mathcal{S}_S$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{S}_x$
$\mathcal{S}_S$	$\mathcal{S}_S$	$\mathcal{S}_y$	$\mathcal{S}_x$	$\mathcal{I}$

[59] Hovoríme, že príslušné zhodnosti **reprodukujú** obdĺžnik. Analytické vyjadrenia uvedených zhodností sme už odvodili.

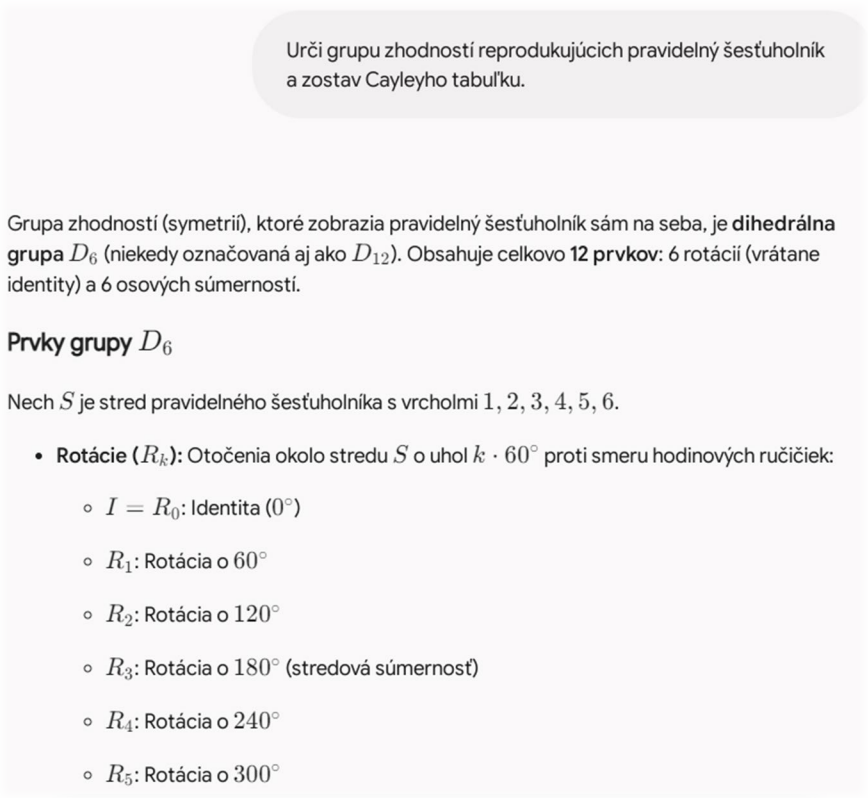
[60] V tabuľke uvažujeme zobrazenia v zápise „ stĺpec ∘ riadok“.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte grupu zhodností reprodukujúcich pravidelný šesťuholník a zostavte Cayleyho tabuľku. Zistite, ako sa táto grupa nazýva, označuje, koľko má grupa prvkov, či je komutatívna, a či má podgrupu?

Aký výsledok možno očakávať pre analogickú úlohu, v ktorej sa určujú zhodností reprodukujúce pravidelný $n-$ uholník, $n \geq 4$.

Konkrétne porovnajte grupu reprodukujúcu štvorec a grupu reprodukujúcu obdĺžnik. Ako sa nazýva a označuje grupa reprodukujúcu obdĺžnik. Návod je na obr. 3.32.



Obr. 3.32. Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 12. septembra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

3.5 Poznámka k zhodnostiam v $\mathbb{E}_3$

Analogicky, ako pri zhodnostiach na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$ alebo v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ možno aj euklidovskom trojrozmernom priestore $\mathbb{E}_3$ zaviesť niektoré pojmy a odvodiť základné vzťahy, napr. determinant matice zobrazenia sa rovná ± 1 podľa toho, či ide o priamu alebo nepriamu zhodnosť.

Konkrétne - ak uvažujeme zhodnosť danú analytickým vyjadrením:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

potom ide o **stredovú súmernosť** $\mathcal{S}_O$ so stredom v bode $O[0,0,0]$.

Posunutie $\mathcal{S}_{\vec{u}}$ v $\mathbb{E}_3$ dané vektorom $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq (0,0,0)$ má analytické vyjadrenie:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Odvodenia analytických vyjadrení v oboch prípadoch je analogické postupu v $\mathbb{E}_2$.

Naproti tomu, analytické vyjadrenie:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

je vyjadrením **otočenia okolo** súradnicovej **osi** z o uhol veľkosti φ.

Pre **skrutkovitý pohyb** – zhodnosť zloženú z otočenia (okolo pevne zvolenej priamky) a posunutia s nenulovým vektorom $\vec{u} = (0,0,u_3)$, by sme odvodili:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Na vyjadrenie rovinovej súmernosti by sme použili vzťah, ktorý bol odvodený pre analytické vyjadrenie nadrovinovej afinity. Taktiež sa možno dokázať- ak rovina súmernosti α má rovnicu:

$$\alpha: \quad ax + by + cz + d = 0, \qquad [a,b,c] \neq [0,0,0], a,b,c \in R$$

potom pre rovinovú súmernosť $\mathcal{S}_\alpha$ platí:

$$x^* = x - 2a.\frac{ax + bz + cy + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$y^* = y - 2b.\frac{ax + bz + cy + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$z^* = z - 2c.\frac{ax + bz + cy + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Príklad

Napíšte analytické vyjadrenie rovinovej súmernosti s rovinou $\alpha: x + z - 1 = 0$ a zistite obraz kocky $ABCDEFGH$, kde $A[1,0,0], C[0,1,0]$.

Riešenie

Použijeme vyššie uvedené vzorce a odvodíme:

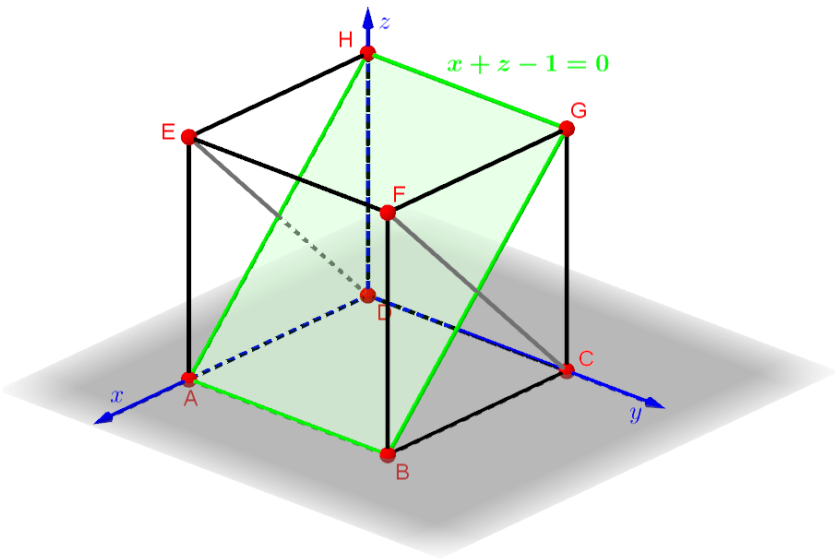
$$x^* = x - 2.1.\frac{x + z - 1}{1^2 + 0^2 + 1^2} = \cdots = -z + 1$$

$$y^* = y - 2.0.\frac{x + z - 1}{1^2 + 0^2 + 1^2} = y$$

$$z^* = z - 2.1.\frac{x + z - 1}{1^2 + 0^2 + 1^2} = \cdots = -x + 1$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rovinová súmernosť je **nepriama** zhodnosť, pretože determinant matice zobrazenia sa rovná (-1).



Obr. 3.33

Ak kocka má podstavnú uhlopriečku AC, potom zvyšné vrcholy majú súradnice: $B[1,1,0], D[0,0,0], E[1,0,1], F[1,1,1], G[0,1,1]$ a $H[0,0,1]$. Rovina súmernosti α je rovinou, ktorá obsahuje samodružné body $A, B, G. H$ a platí:

$$\mathcal{S}_\alpha: \begin{matrix} C \longrightarrow F \\ D \longrightarrow E \\ E \longrightarrow D \\ F \longrightarrow C \end{matrix}$$

Rovinová súmernosť $\mathcal{S}_\alpha$ reprodukuje kocku $ABCDEFGH$.

Celkovo, z analytického vyjadrenia zhodnosti v $\mathbb{E}_3$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

pomocou určovania samodružných bodov a samodružných vektorov asociovaného zobrazenia možno ukázať, že v $\mathbb{E}_3$ existujú tieto zhodnosti [6, str. 56-69]:

a) priame zhodnosti: identita, posunutie, otočenie okolo osi, skrutkovitý pohyb
b) nepriame zhodnosti: súmernosť podľa roviny, posunutá súmernosť, otočená súmernosť.

Zhodnosti v $\mathbb{E}_3$ vzhľadom na operáciu skladania zobrazení tvoria tiež grupu. Vlastnosti tejto grupy a jej prvkov sa výhodne aplikujú v rôznych vedných odboroch, napr. v kryštalografii alebo v chémii (molekulové bodové grupy). [7, str. 727 -739]. [61]

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte grupu zhodností reprodukujúcich kocku.

[61] S ohľadom na učebné tézy predmetu, ako aj didaktické dôvody im nemôžeme venovať viac pozornosti a odkazujeme čitateľa na príslušnú literatúru.

3.6 Cvičenia a úlohy

1. Napíšte rovnice stredovej súmernosti na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$ so stredom $S[-2]$.
2. Nájdite analytické vyjadrenie zhodnosti na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$, ktorá bude mať samodružný bod $M[-1]$.
3. Určte analytické vyjadrenie zhodnosti na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$, ktorá je zložením dvoch stredových súmerností so stredmi $S_1[3], S_2[-9]$. Platí $\mathcal{S}_{S_1} \circ \mathcal{S}_{S_2} = \mathcal{S}_{S_2} \circ \mathcal{S}_{S_1}$?
4. Určte analytické vyjadrenie posunutia v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ s vektorom posunutia $\vec{a} = (-1,5)$. Aký obraz má bod $M[0,2]$? Aký je vzor bodu $N^*[-1,5]$?
5. Analytické vyjadrenie stredovej súmernosti v $\mathbb{E}_2$ je: $x^* = -x + 10, y^* = -y - 10$. Určte stred súmernosti a obraz ťažiska trojuholníka ABC, ak $A[0,1], B[8,8], C[-2,0]$.
6. Určte analytické vyjadrenie otočenia v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$, ktoré má stred $S[3,2]$ a uhol otočenia má veľkosť $-90°$.
7. Napíšte analytické vyjadrenie otočenia v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ so stredom $S[1,2]$ o uhol veľkosti $-90°$ a zistite vzor stredu úsečky A^*B^*, ak $A^*[-1,-1], B^*\left[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.
8. Určte zhodnosť, ktorá zobrazí body $A[5,1], B[7,1], C[5,2]$ postupne do bodov $A^*[2,0], B^*[2,-2], C^*[3,0]$.
9. Napíšte analytické vyjadrenie osovej súmernosti s osou, ktorej rovnica je $2x + 3y - 6 = 0$.
10. Analytické vyjadrenie osovej súmernosti v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ je: $x^* = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1, y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1$. Určte samodružné body danej zhodnosti a samodružné vektory asociovaného zobrazenia.
11. Napíšte analytické vyjadrenie posunutej súmernosti s osou $x + y = 0$ a vektorom $\vec{u} = (-1,1)$.
12. Vrcholy trojuholníka ABC, kde $A[5,1], B[7,1], C[5,2]$ určujú priamky $c \equiv AB, b \equiv CA, a \equiv BC$. Napíšte analytické vyjadrenie posunutej súmernosti $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$.
13. Priamky $a: y = \frac{\sqrt{3}}{3}.x, b: y = \sqrt{3}.x$ a $c: x = 0$ sú osami súmerností $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b$ a $\mathcal{S}_c$. Určte zhodnosť $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$, vypočítajte determinant matice tejto zhodnosti a určte samodružné body.
14. Určte analytické vyjadrenia zhodností, ktoré vzniknú zložením otočenia so stredom $S[0,0]$ o uhol veľkosti $-270°$ a osovej súmernosti s osou $p: x - y = 0$. Platí $\mathcal{S}_{(S,-270°)} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{(S,-270°)}$?
15. Napíšte Cayleyho tabuľku grupy reprodukujúcej kosoštvorec. Porovnajte výsledok Cayleyho tabuľkou pre grupu reprodukujúcu obdĺžnik.
16. Kocka $ABCDEFGH$ je umiestnená do súradnicovej sústavy tak, že $A[1,1,0], C[3,3,0]$. Napíšte analytické vyjadrenie rovinovej súmernosti, ktorej rovina je určená vrcholmi E, B a G.
17. Rovina $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ je samodružná v stredovej súmernosti $\mathcal{S}_S$ so stredom $S[0, ?, ?]$. Určte zvyšné súradnice stredu S. Akej množine bodov patrí bod S?

18. Vypočítajte samodružné body a samodružné vektory asociovaného zobrazenia, ktorého analytické vyjadrenie je v tvare:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $[b_1, b_2] \neq [0,0]$.

19. Vo vhodnom dynamickom softvéri nastavte parametre pre príslušné zhodnosti v $\mathbb{E}_2$ a vymodelujte obrazy úsečky, kružnice a trojuholníka:

a) v otočení $\mathcal{O}_{(S,\varphi)}$ okolo bodu $S[s_1, s_2]$ o uhol veľkosti $\varphi, \varphi \in (0°, 180°)$,

b) posunutej súmernosti $\mathcal{S}_{(o,\vec{u})}$ s osou $o: ax + by + c = 0$.

20. Vo vhodnom dynamickom softvéri vymodelujte skladanie zobrazení z úlohy 19* tak, že aplikujete rozklady na osové súmernosti. Rozlíšte poradie skladania zhodností a konštrukčne určte výslednú zhodnosť.

21. * Pomocou vhodného nástroja umelej inteligencie určte vrcholy hyperkocky v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_4$ a určte analytické vyjadrenia aspoň dvoch nadrovinových súmerností, ktoré reprodukujú hyperkocku. Aký je prienik týchto nadrovinových súmerností vo všeobecnom prípade?

22. ** Dokáže nástroj umelej inteligencie nakresliť hypeguľovú plochu opísanú hyperkocke v $\mathbb{E}_4$?

4 Podobné zobrazenia

Zhodné zobrazenia sú afinné zobrazenia, ktoré sú definované nasledovne:

Definícia (podobné zobrazenie)
Afinné zobrazenie $g: \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}_m^*$ sa nazýva **podobným zobrazením**, ak pre ľubovoľné body $X, Y \in \mathbb{E}_n$ a ich obrazy $X^*, Y^* \in \mathbb{E}_m^*$ platí:

$$|X^*, Y^*| = k.|X, Y|,$$

kde k je kladné reálne číslo.

Číslo k nazývame koeficient podobného zobrazenia a rozoznávame tri možnosti:

a) ak $0 < k < 1$, potom podobné zobrazenie nazývame **zmenšením.**

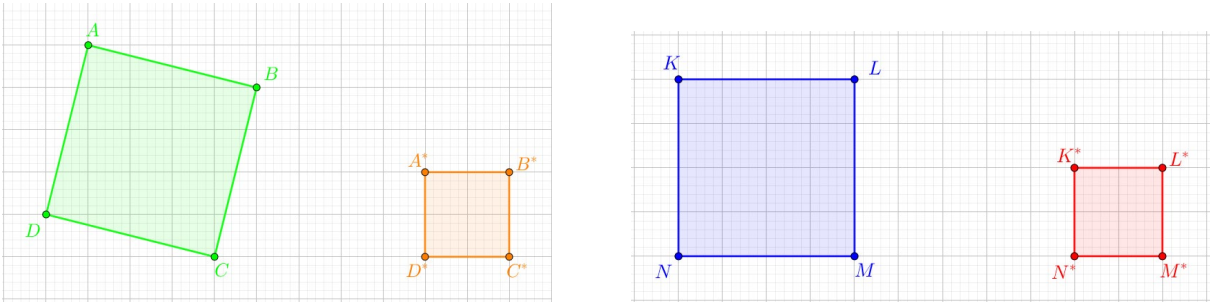
b) Ak $k > 1$, potom sa podobné zobrazenie sa nazýva **zväčšením**.

c) Ak $k = 1$, potom ide o zhodné zobrazenie.

Podobné zobrazenie s koeficientom $k \neq 1$ sa zvykne nazývať **vlastné** podobné zobrazenie.

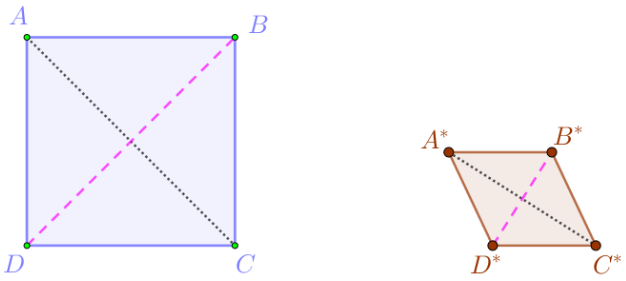
Podľa definície podobné zobrazenie zachováva pomer dĺžok úsečiek. Ak útvar $\mathcal{U}$ ako vzor zobrazíme do jeho obrazu - útvaru $\mathcal{U}^*$ v podobnom zobrazení g, zapíšeme štandardne: $g: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}^*$ a hovoríme, že útvary sú **podobné**.
Ak o útvaroch vieme, že sú podobné a zobrazenie g nie je určené (známe), stručne zapisujeme $\mathcal{U} \sim \mathcal{U}^*$.

Ak sú útvary $\mathcal{U}, \mathcal{U}^*$ mnohouholníky, zápisom $\mathcal{U} \sim \mathcal{U}^*$ predurčujeme, aby jednotlivé vrcholy boli zapísané v poradí, v akom si navzájom odpovedajú. Napr. na obr. 4.1a je $ABCD \sim A^*B^*C^*D^*$, ktorých odpovedajúce si strany nie sú rovnobežné. Zápisom **naznačujeme**, že $A \longrightarrow A^*, B \longrightarrow B^*, C \longrightarrow C^*$ a $D \longrightarrow D^*$. Analogicky $KLMN \sim K^*L^*M^*N^*$ na obr. 4.1b, kde $KL \parallel K^*L^*$. Podobnosti medzi uvažovanými štvorcami na obr. 4.1a a obr. 4.1b sú rôzne.



Obr. 4.1 a, b

Nie je však podobný štvorec a kosoštvorec, pretože pomer dĺžok odpovedajúcich si strán je konštantný, nie je však rovný pomeru dĺžok odpovedajúcich si uhlopriečok (definícia vyžaduje, aby bol koeficient podobného zobrazenia zachovaný pre ľubovoľnú odpovedajúcu dvojicu bodov).



Obr. 4.2

Príklad

Podľa medzinárodného štandardu ISO 216 má papier formátu A3 rozmery $297\ x\ 420\ mm$*; formát A4 zase* $210\ x\ 297mm$*. Sú tieto formáty papiera podobné v zmysle definície?*

Riešenie

Ak uvažujeme o formáte A3 ako o modeli obdĺžnika $ABCD$, kde $AB = 420mm$; formát A4 zase ako model obdĺžnika $A^*B^*C^*D^*$, kde $|A^*B^*| = 297mm$, potom platí:

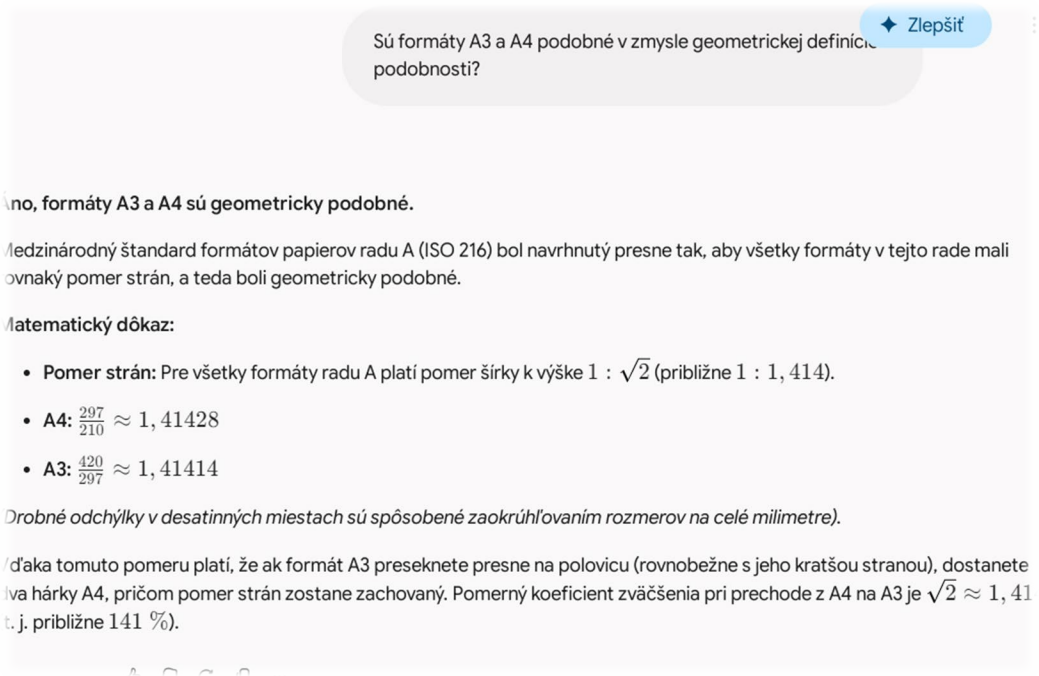
$$\frac{|A^*B^*|}{|AB|} = \frac{297}{420} \approx 0{,}707142,$$

$$\frac{|B^*C^*|}{|BC|} = \frac{210}{297} \approx 0,\overline{70}.$$

Formáty papiera A4 a A3 nie sú podobné v zmysle definície.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie zistite, či sú formáty papiera A3 a A4 podobné v zmysle definície a z výsledku vyvoďte príslušný záver. Návod je na obr. 4.3.



Obr. 4.3. Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 18. septembra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Analogicky (ako pri zhodných zobrazeniach) platí, že:

- dimenzie n, m sa nemusia rovnať, napr. $g: \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_2^*$ určené predpisom $g: X[x] \longrightarrow X^*[x, 0]$. Pre $A[a] \longrightarrow A^*[a, 0], B[b] \longrightarrow B^*[b, 0]$ platí:
  $k.|A, B| = k.\sqrt{(a-b)^2} = k.|a-b|, \quad |A^*, B^*| = \sqrt{(k.a - k.b)^2 + (0-0)^2} = k.|a-b|.$
- Ak $\mathbb{E}_n \equiv \mathbb{E}_n^*$, potom podobné zobrazenie nazývame **podobnou transformáciou**, niekedy len stručne **podobnosťou**. Pre $n = 1$ hovoríme o podobnosti na (euklidovskej) priamke $\mathbb{E}_1$; pre $n = 2$ zase o podobnosti v (euklidovskej) rovine $\mathbb{E}_2$, atď.

4.1 Podobnosti na euklidovskej priamke

Analyzujme podobnosť $g: \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_1^* \equiv \mathbb{E}_1$ danú analytickým vyjadrením: $x^* = a_1.x + b_1$.
Ak sa vzor $A[a]$ zobrazí do obrazu $A^*[a^*]$, analogicky $g: B[b] \longrightarrow B^*[b^*]$, potom podľa definície podobnosti platí:

$$|A^*B^*| = |b^* - a^*| = |(a_1.b + b_1) - (a_1.a + b_1)| = |a_1|.|b-a| = |a_1|.|AB|.$$

Odvodili sme, že pre podobnosť na priamke $\mathbb{E}_1$ je koeficient podobnosti $k = |a_1|$ a predstavuje determinant matice zobrazenia.

- Ak $k = a_1$, potom hovoríme o **priamej podobnosti**.
- Ak $k = -a_1$, nazývame podobnosť **nepriamou podobnosťou**.

Pre $k = |a_1| = 1$ existujú podobnosti: identita, stredová súmernosť a posunutie (odvodili sme v kap. 3.1 ako zhodnosti na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$).

Uvažujme ďalej len o **vlastných podobnostiach** na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$, t.j. pre $a_1 \neq \pm 1$.

Vypočítame samodružné body:

$$x = a_1.x + b_1 \Leftrightarrow b = x.(1 - a_1) \Longrightarrow x = \frac{b_1}{1 - a_1}$$

Z výsledku vyplýva, že **každá vlastná podobnosť** na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$ má **práve jeden** samodružný bod.

Pre samodružné vektory odvodíme: $0 = u_1.(\lambda - a_1)$ pre $\lambda \neq 0$. Charakteristický koreň určíme pomocou determinantu $|\lambda - a_1| = 0$ a platí: $\lambda = a_1$.

Ak $\lambda =$, rovnica je splnená pre ľubovoľné $u_1 \in R, u_1 \neq 0$ (nulový vektor nie je samodružným vektorom). **Každý nenulový** vektor **je** samodružným vektorom **vlastnej podobnosti.**

Vlastnú podobnosť na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$ (s uvedenými vlastnosťami) nazývame **rovnoľahlosť** $\mathcal{H}$ (z gréckeho „*homo*"- rovnaký, „*thetos*"- umiestnený).

Samodružný bod nazývame **stred rovnoľahlosti** a číslo a_{11} **koeficient rovnoľahlosti.** Rozlišujeme dva typy rovnoľahlostí:

- Ak $\lambda = a_1 > 0$, potom rovnoľahlosť je **priama** podobnosť. Body - vzor a jeho obraz - ležia na spoločnej polpriamke. Pre ľubovoľný vektor a jeho obraz platí, že sú súhlasne orientované.
- Ak $\lambda = a_1 < 0$, potom rovnoľahlosť je **nepriama** podobnosť. Body - vzor a jeho obraz - ležia na navzájom opačných polpriamke so začiatkom v strede rovnoľahlosti. Pre ľubovoľný vektor a jeho obraz platí, že sú nesúhlasne orientované.

Príklad

Napíšte analytické vyjadrenie podobnosti $g: \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_1$, ktorá zobrazuje:

a) $A[0] \longrightarrow A^*[3], B[5] \longrightarrow B^*[8]$.

b) $A[3] \longrightarrow A^*[3], B[5] \longrightarrow B^*[8]$.

c) $A[0] \longrightarrow A^*[3], B[5] \longrightarrow B^*[-8]$.

Riešenie

a) Dosadíme príslušné súradnice do analytického vyjadrenia $x^* = a_1.x + b_1$ a počítame:

$$3 = a_1.0 + b_1$$
$$8 = a_1.5 + b_1$$
$$\vdots$$
$$a_1 = 1, b_1 = 3$$

Ide o podobnosť, ktorá je zhodnosťou – posunutím $S_{\vec{u}}$ s vektorom $\vec{u} = (3)$ (nemá samodružné body) .

b) Opäť dosadíme príslušné súradnice odpovedajúcich si bodov:

$$3 = a_1.3 + b_1$$
$$8 = a_1.5 + b_1$$
$$\vdots$$
$$a_1 = \frac{5}{2}, b_1 = -\frac{9}{2}$$

Ide o priamu rovnoľahlosť so stredom $S[3] \equiv A[3]$ a koeficientom $k = \frac{5}{2} > 1$, t.j. ide o podobnosť, ktorá je **zväčšením**.

c) Po dosadení príslušných súradníc do analytického vyjadrenia počítame:

$$3 = a_1.0 + b_1$$
$$-8 = a_1.5 + b_1$$
$$\vdots$$
$$a_1 = \frac{-11}{5}, b_1 = 3$$

Ide o nepriamu rovnoľahlosť so stredom $S\left[\frac{15}{16}\right]$ a koeficientom $k = -\frac{11}{5}$, t.j. ide o podobnosť, ktorá je **zväčšením** ($k = \left|-\frac{11}{5}\right| = \frac{11}{5} > 1$.

4.2 Skladanie podobností na $\mathbb{E}_1$

Ukázali sme, že zložením dvoch zhodností na priamke je opäť zhodnosť. Úvahy teda ešte doplníme ešte skladanie **dvoch vlastných podobností** na $\mathbb{E}_1$ a skladanie **zhodnosti s rovnoľahlosťou**.

a) Ak rovnoľahlosť $\mathcal{H}_1: X \longrightarrow X^*$ má analytické vyjadrenie $x^* = a_1.x + b_1$ a pre rovnoľahlosť $\mathcal{H}_2: X^* \longrightarrow X^{**}$ zase máme vyjadrenie v tvare: $x^{**} = c_1.x^* + d_1$, potom pre $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ platí:

$$\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1: \; x^{**} = c_1.x^* + d_1 = c_1.(a_1.x + b_1) + d_1 = c_1.a_1.x + c_1.b_1 + d_1.$$

Ak $|c_1.a_1| = 1$, ide o zhodnosť na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$, ktorá:

- má samodružný bod $S\left[\frac{c_1.b_1+d_1}{2}\right]$, ak platí: $c_1.a_1 = (-1)$. Ide o stredovú súmernosť so stredom S.
- Nemá samodružný bod, ak $c_1.a_1 = 1$. V tom prípade rozlíšime dva prípady.

Ak $[b_1, d_1] \neq [0,0]$, ide o posunutie s vektorom $\vec{u} = (c_1.b_1 + d_1)$.

Ak $[b_1, d_1] = [0,0]$, výsledkom je identita.

Ak $|c_1.a_1| \neq 1$, ide o rovnoľahlosť priamke $\mathbb{E}_1$.

b) Ak rovnoľahlosť $\mathcal{H}_1: X \longrightarrow X^*$ má analytické vyjadrenie $x^* = a_1.x + b_1$ a zhodnosť na euklidovskej priamke $\mathcal{S}: X^* \longrightarrow X^{**}$ má vyjadrenie v tvare: $x^{**} = \pm 1.x^* + c_1$, potom pre $\mathcal{S} \circ \mathcal{H}_1$ platí:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{H}_1: \; x^{**} = \pm x^* + c_1 = \pm\,(a_1.x + b_1) + c_1 = \pm a_1.x \pm b_1 + c_1.$$

Ak $a_1 = \pm 1$, potom ide o zhodnosť.

- Pre $a_1 = -1$ máme stredovú súmernosť so stredom $S\left[\frac{c_1 \pm b_1}{2}\right]$.
- Ak $a_1 = 1$ a súčasne $b_1 \pm c_1 \neq 0$, potom výsledkom skladania je posunutie s vektorom $\vec{u} = (b_1 \pm c_1)$.
- Ak $a_1 = 1$ a súčasne $b_1 \pm c_1 = 0$, potom výsledkom skladania je identita.

Ak $a_1 \neq \pm 1$, potom výsledkom skladania je vlastná podobnosť (priama alebo nepriama).

Z uvedeného vyplýva, že:

1) skladanie podobností na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$ je uzavreté vzhľadom na operáciu skladania zobrazení,
2) skladanie zobrazení je vo všeobecnosti asociatívne,
3) vzhľadom na operáciu skladania zobrazení existuje jediný neutrálny prvok – identita,
4) Každá podobnosť má inverznú podobnosť. Pre jednotlivé zhodnosti na $\mathbb{E}_1$ sme určili inverzné zobrazenia v kap. 3.2. Inverzná rovnoľahlosť k danej rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom k je tiež rovnoľahlosť s rovnakým stredom S, ale koeficientom $\frac{1}{k}$.

Množina podobností na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$ tvorí (vzhľadom na operáciu skladania zobrazení) **grupu**, ktorá má vlastné podgrupy, napr. grupu zhodností, grupu rovnoľahlostí so spoločným stredom, grupu priamych rovnoľahlostí, ...

4.3 Podobnosti v euklidovskej rovine

Uvažujme o podobnosti $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ so všeobecne daným analytickým vyjadrením:

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{A}^T.\mathbb{X} + \mathbb{B},$$

kde matica zobrazenia $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Ak podobnosť g s koeficientom podobnosti k zobrazí bod $X[x_1, x_2]$ do bodu $X^*[x_1^*, x_2^*]$ a bod $Y[y_1, y_2]$ do bodu $Y^*[y_1^*, y_2^*]$, potom platí:

$$x_1^* = a_{11}.x_1 + a_{21}.x_2 + b_1 \qquad y_1^* = a_{11}.y_1 + a_{21}.y_2 + b_1$$
$$x_2^* = a_{12}.x_1 + a_{22}.x_2 + b_2 \qquad y_2^* = a_{12}.y_1 + a_{22}.y_2 + b_2$$

a podľa definície podobnosti: $|X^*Y^*| = k.|XY|$.

Z uvedenej rovnosti vyplýva:

$$|X^*Y^*|^2 = k^2.|XY|^2$$

$$(x_1^* - y_1^*)^2 + (x_2^* - y_2^*)^2 = k^2.((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)$$

Dosadíme do ľavej strany rovnosti:

$$(x_1^* - y_1^*)^2 + (x_2^* - y_2^*)^2 =$$

$$(a_{11}.x_1 + a_{21}.x_2 + b_1 - a_{11}.y_1 - a_{21}.y_2 - b_1)^2 + (a_{12}.x_1 + a_{22}.x_2 + b_2 - a_{12}.y_1 - a_{22}.y_2 - b_2)^2 =$$

$$\vdots$$

$$(a_{11}^2 + a_{12}^2).(x_1 - y_1)^2 + 2.(a_{11}.a_{21} + a_{12}.a_{22}).(x_1 - y_1).(x_2 - y_2) + (a_{21}^2 + a_{22}^2).(x_2 - y_2)^2.$$

Pre pravú stranu rovnosti platí:

$$k^2.|XY|^2 = k^2.(x_1 - y_1)^2 + 0.k^2.(x_1 - y_1).(x_2 - y_2) + k^2.(x_2 - y_2)^2.$$

Porovnaním oboch strán odvodíme vzťahy medzi koeficientmi matice zobrazenia:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = k^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2$$

$$0 = a_{11}.a_{21} + a_{12}.a_{22}$$

Ide o tri rovnice s neznámymi a_{11}, a_{12}, a_{21} a a_{22}, kde koeficient podobnosti $k \in R^+$ je parameter. Vypočítame rovnice.

Nech $a_{11} = t$, kde $t \in R$, potom $a_{12}^2 = k^2 - t^2$. Ďalej počítame:

$$0 = a_{11}.a_{21} + a_{12}.a_{22}$$

$$a_{11}.a_{21} = -a_{12}.a_{22} \quad /^2$$

$$a_{11}^2.a_{21}^2 = a_{12}^2.a_{22}^2$$

$$t^2.a_{21}^2 = (k^2 - t^2).a_{22}^2$$

$$\vdots$$

$$t^2.(a_{21}^2 + a_{22}^2) = k^2.a_{22}^2$$

$$t^2.k^2 = k^2.a_{22}^2 \quad /: k \neq 0$$

$$\pm t = a_{22}$$

Ďalej z rovností

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = k^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2$$

vyplýva, že

$$a_{11}^2 - a_{22}^2 + a_{12}^2 - a_{21}^2 = 0$$

$$t^2 - t^2 + a_{12}^2 - a_{21}^2 = 0$$

$$a_{12}^2 = a_{21}^2$$

$$a_{12} = \pm a_{21}$$

Do úvahy tak prichádzajú štyri možnosti pre koeficienty matice $\mathbb{A}^T$:

$$\mathbb{A}_1^T = \begin{pmatrix} +a_{11} & +a_{12} \\ +a_{12} & +a_{11} \end{pmatrix} \quad \mathbb{A}_2^T = \begin{pmatrix} +a_{11} & +a_{12} \\ +a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} \quad \mathbb{A}_3^T = \begin{pmatrix} +a_{11} & +a_{12} \\ -a_{12} & +a_{11} \end{pmatrix} \quad \mathbb{A}_4^T = \begin{pmatrix} +a_{11} & +a_{12} \\ -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}$$

Pomocou všeobecnej podmienky $0 = a_{11}.a_{21} + a_{12}.a_{22}$ vytriedime matice.

- Uvažujme najprv o matici $\mathbb{A}_1^T = \begin{pmatrix} +a_{11} & +a_{12} \\ +a_{12} & +a_{11} \end{pmatrix}$. Počítame:

$$0 = a_{11}.a_{21} + a_{21}.a_{11} = 2.a_{11}.a_{21}.$$

Z toho vyplýva, že $a_{11} = 0$ alebo $a_{21} = 0$, čo zase implikuje $a_{12} = 0 = a_{22}$. Matica zobrazenia nemôže byť nulová a možnosť, že by $\mathbb{A}_1^T$ bola maticou podobnosti v rovine, **vylúčime**.

- Analogicky **nie je vhodná** ani možnosť $\mathbb{A}_4^T$.
- Matica podobnosti v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ môže byť

$$\mathbb{A}_2^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} \qquad \text{alebo} \qquad \mathbb{A}_3^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

(v znamienku sa líšia prvky hlavnej diagonály alebo prvky vedľajšej diagonály).

Ich determinanty sú:

$$\left|\mathbb{A}_2^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{vmatrix} = -a_{11}^2 - a_{12}^2 = -k^2, \qquad \left|\mathbb{A}_3^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}^2 + a_{12}^2 = +k^2.$$

Všimnime si, že determinant matice podobnosti s koeficientom k je hodnota $\pm k^2$.

Matica $\mathbb{A}_2^T$ je maticou nepriamej podobnosti; matica $\mathbb{A}_3^T$ zase maticou priamej podobnosti. [62]

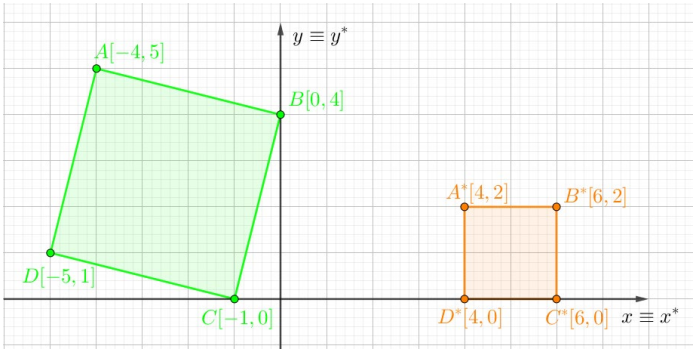
Príklad

Napíšte analytické vyjadrenie podobností dvoch štvorcov, ktorých umiestnenie je podľa obr. 4.1a, b.

Riešenie

a) Umiestnime štvorce z obr. 4.1a do vhodne zvolenej súradnicovej sústavy a určíme súradnice odpovedajúcich si bodov (obr. 4.4) tak, aby $ABCD \sim A^*B^*C^*D^*$. Súradnice dosadíme do všeobecného analytického vyjadrenia podobnosti

$$x_1^* = a_{11}.x_1 + a_{21}.x_2 + b_1$$
$$x_2^* = a_{12}.x_1 + a_{22}.x_2 + b_2$$



Obr. 4.4

Dosadením troch dvojíc odpovedajúcich si bodov $A, A^*;\ B, B^*;\ C, C^*$ dostaneme šesť rovníc so šiestimi neznámymi[63]

[62] Porovnajte výsledok so závermi pre maticou zhodnosti v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$.

[63] Všimnime si, že rovnice zapísané v hornom riadku (zelenou farbou) neobsahujú premenné z dolného riadku. Nie je nutné riešiť sústavu 6 rovníc so 6 neznámymi, ale môžeme postup „rozdeliť " a riešiť dve sústavy 3 rovníc s tromi neznámymi. Je to výpočtovo jednoduchšie.

$4 = a_{11}.(-4) + a_{21}.5 + b_1$ $\quad 6 = a_{11}.0 + a_{21}.4 + b_1$ $\quad 6 = a_{11}.(-1) + a_{21}.0 + b_1$
$2 = a_{12}.(-4) + a_{22}.5 + b_2$ $\quad 2 = a_{12}.0 + a_{22}.4 + b_2$ $\quad 0 = a_{12}.(-1) + a_{22}.0 + b_2$

Vypočítame:

$$a_{11} = \frac{8}{17}, a_{21} = -\frac{2}{17}, b_1 = \frac{110}{17}$$
$$a_{12} = \frac{2}{17}, a_{22} = \frac{8}{17}, b_2 = \frac{2}{17}$$

Analytické vyjadrenie podobnosti je:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{17} & -\frac{2}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{110}{17} \\ \frac{2}{17} \end{pmatrix}.$$

Ide **o priamu vlastnú podobnosť** s koeficientom $k = \sqrt{\left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{2}{17}\right)^2} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$.

Urobíme skúšku správnosti dosadením súradníc bodov D, D^*. Platí:

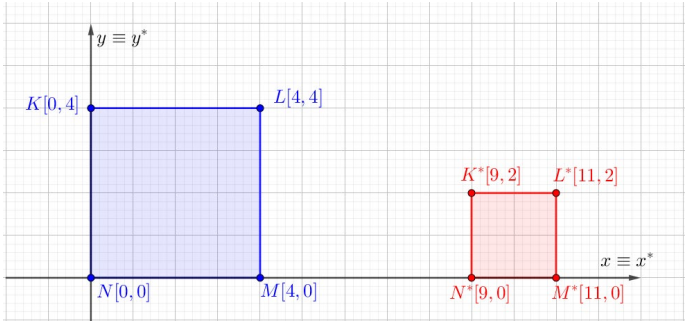
$$x^* = \frac{8}{17}.(-5) - \frac{2}{17}.1 + \frac{110}{17} = \frac{68}{17} = 4 = x_D^*$$
$$y^* = \frac{2}{17}.(-5) + \frac{8}{17}.1 + \frac{2}{17} = 0$$

Necháme na čitateľa, aby sa výpočtom presvedčil, že:

- samodružný bod je $S\left[\frac{58}{5}, \frac{14}{5}\right]$,
- asociované zobrazenie nemá samodružné vektory.

b) Analogicky umiestnime štvorce z obr. 4.1b do vhodne zvolenej súradnicovej sústavy a určíme súradnice odpovedajúcich si bodov (obr. 4.5) tak, aby $KLMN \sim K^*L^*M^*N^*$. Súradnice dosadíme do všeobecného analytického vyjadrenia podobnosti

$$x_1^* = a_{11}.x_1 + a_{21}.x_2 + b_1$$
$$x_2^* = a_{12}.x_1 + a_{22}.x_2 + b_2$$



Obr. 4.5

Dosadením troch dvojíc odpovedajúcich si bodov $K, K^*;\ N, N^*;\ M, M^*$ dostaneme šesť rovníc so šiestimi neznámymi

$9 = a_{11}.0 + a_{21}.4 + b_1$ $\quad 9 = a_{11}.0 + a_{21}.0 + b_1$ $\quad 11 = a_{11}.4 + a_{21}.0 + b_1$
$2 = a_{12}.0 + a_{22}.4 + b_2$ $\quad 0 = a_{12}.0 + a_{22}.0 + b_2$ $\quad 0 = a_{12}.4 + a_{22}.0 + b_2$

Vypočítame:

$$a_{11} = \frac{1}{2} = a_{22}, \quad a_{12} = 0 = a_{21}, \quad b_1 = 9, \quad b_2 = 0.$$

Analytické vyjadrenie podobnosti je:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ide o **priamu vlastnú podobnosť** s koeficientom $k = \frac{1}{2}$.

Urobíme skúšku správnosti dosadením súradníc bodov L, L^*. Platí:

$$x^* = \frac{1}{2}.4 + 9 = 11 = x_L^*$$

$$y^* = \frac{1}{2}.4 + 0 = 2 = y_{L^*}$$

Necháme na čitateľa, aby sa výpočtom presvedčil, že:

- samodružný bod je $S[18,0]$,
- v asociovanom zobrazení je každý nenulový vektor samodružný.

c) Uvažujme o podobnosti, kde $KLMN \sim N^*M^*L^*K^*$. Opäť použijeme všeobecné analytické vyjadrenia podobnosti a dosadíme súradnice odpovedajúcich si dvojíc bodov $K, N^*; L, M^*$ a M, L^* (podľa obr. 4.5).

$9 = a_{11}.0 + a_{21}.4 + b_1$ $\quad$ $11 = a_{11}.4 + a_{21}.4 + b_1$ $\quad$ $11 = a_{11}.4 + a_{21}.0 + b_1$

$0 = a_{12}.0 + a_{22}.4 + b_2$ $\quad$ $0 = a_{12}.4 + a_{22}.4 + b_2$ $\quad$ $2 = a_{12}.4 + a_{22}.0 + b_2$

Vypočítame:

$$a_{11} = \frac{1}{2}, \quad a_{22} = -\frac{1}{2}, \quad a_{12} = 0 = a_{21}, \quad b_1 = 9, \quad b_2 = 2.$$

Analytické vyjadrenie podobnosti je:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ide o **nepriamu vlastnú podobnosť** s koeficientom $k = -\frac{1}{2}$.

Urobíme skúšku správnosti dosadením súradníc bodov N, K^*. Platí:

$$x^* = \frac{1}{2}.0 + 9 = 9 = x_N^*$$

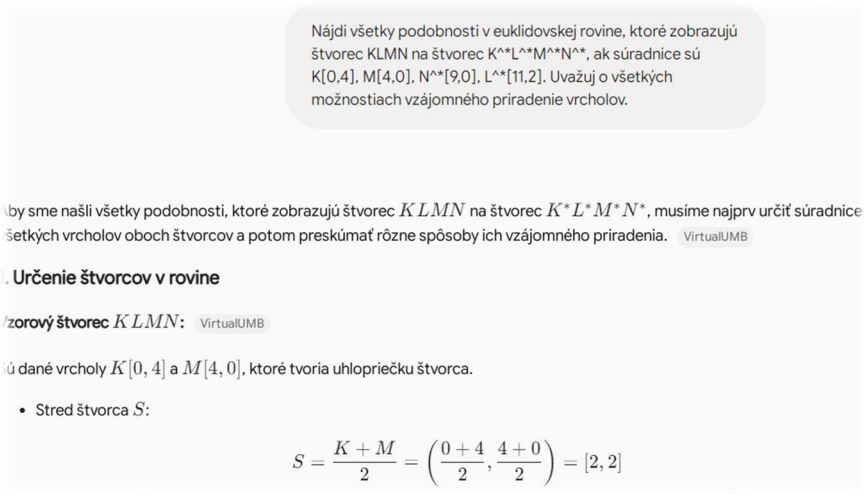
$$y^* = -\frac{1}{2}.0 + 2 = 2 = y_{N^*}$$

Necháme na čitateľa, aby sa výpočtom presvedčil, že:

- samodružný bod je $S\left[18, \frac{4}{3}\right]$,
- v asociovanom zobrazení existujú dva samodružné vektory, $\vec{u} = (t, 0), t \in R - \{0\}$ a $\vec{v} = (0, s), s \in R - \{0\}$.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte všetky podobnosti v $\mathbb{E}_2$, ktoré zobrazia štvorec $KLMN$ na štvorec $K^*L^*M^*N^*$(použite súradnice vrcholov podľa predchádzajúceho príkladu). Uvažujte o všetkých možnostiach vzájomného priradenia odpovedajúcich si vrcholov. Návod je na obr. 4.6.



Obr. 4.6. Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 19. septembra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

4.3.1 Samodružné elementy priamej podobnosti v $\mathbb{E}_2$

Uvažujme vlastnú priamu podobnosť s koeficientom k a s analytickým vyjadrením

$$\begin{aligned} x^* &= a_{11}.x + a_{12}.y + b_1 \\ y^* &= -a_{12}.x + a_{11}.y + b_2 \end{aligned}.$$

Vypočítame samodružný bod, ak existuje.

$$\begin{aligned} x &= a_{11}.x + a_{12}.y + b_1 \\ y &= -a_{12}.x + a_{11}.y + b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -b_1 &= (a_{11}-1).x + a_{12}.y \\ -b_2 &= -a_{12}.x + (a_{11}-1).y \end{aligned}$$

Použijeme Cramerovo pravidlo a odvodíme:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ -b_2 & a_{11}-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11}-1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ -b_2 & a_{11}-1 \end{vmatrix}}{(a_{11}-1)^2 + a_{12}^2} = \frac{b_2.a_{12} - b_1.(a_{11}-1)}{(a_{11}-1)^2 + a_{12}^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}-1 & -b_1 \\ -a_{12} & -b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11}-1 \end{vmatrix}} = \cdots = -\frac{b_2.(a_{11}-1) + b_1.a_{12}}{(a_{11}-1)^2 + a_{12}^2}$$

Vlastná priama podobnosť s koeficientom k má **jediný** samodružný bod

$$S\left[\frac{b_2.a_{12}-b_1.(a_{11}-1)}{(a_{11}-1)^2+a_{12}^2}, -\frac{b_2.(a_{11}-1)+b_1.a_{12}}{(a_{11}-1)^2+a_{12}^2}\right].$$

Samodružné vektory asociovaného zobrazenia odvodíme z rovníc:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_{11}-\lambda).u_1 + a_{12}.u_2 \\ 0 &= -a_{12}.u_1 + (a_{11}-\lambda).u_2 \end{aligned}$$

a charakteristická rovnica $(a_{11}-\lambda)^2+a_{12}^2=0$ nemá pre $a_{12}\neq 0$ riešenie v množine R. Takúto podobnosť nazývame **centrálno-podobná rotácia** (v skratke CPR) so stredom S a koeficientom k.

Ak $a_{12}=0$, potom $\lambda_{1,2}=a_{11}$ a počítame:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_{11}-a_{11}).u_1+a_{12}.u_2=0.u_1+0.u_2\\ 0 &= -a_{12}.u_1+(a_{11}-a_{11}).u_2=0.u_1+0.u_2 \end{aligned}.$$

Z rovníc vyplýva, že každý nenulový vektor je samodružným vektorom. [64] Podobnosť, ktorá má analytické vyjadrenie:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

nazývame **rovnoľahlosťou** so stredom S a koeficientom k a označujeme: $\mathcal{H}[S,k]$.

4.3.2 Samodružné elementy nepriamej podobnosti v $\mathbb{E}_2$

Uvažujme **vlastnú nepriamu podobnosť** s koeficientom $(-k)$ a s analytickým vyjadrením

$$\begin{aligned} x^* &= a_{11}.x+a_{12}.y+b_1\\ y^* &= a_{12}.x-a_{11}.y+b_2 \end{aligned}.$$

Vypočítame samodružný bod, ak existuje.

$$\begin{aligned} x &= a_{11}.x+a_{12}.y+b_1\\ y &= a_{12}.x-a_{11}.y+b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -b_1 &= (a_{11}-1).x+a_{12}.y\\ -b_2 &= a_{12}.x-(a_{11}+1).y \end{aligned}$$

Použijeme Cramerovo pravidlo a odvodíme:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ -b_2 & -(a_{11}+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{12} & -(a_{11}+1) \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ -b_2 & -(a_{11}+1) \end{vmatrix}}{-a_{11}^2+1-a_{12}^2}=\cdots=\frac{b_1.(a_{11}+1)+b_2.a_{12}}{1-k^2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11}-1 & -b_1 \\ a_{12} & -b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{12} & -(a_{11}+1) \end{vmatrix}}=\cdots=\frac{-b_2.(a_{11}-1)+b_1.a_{12}}{1-k^2}$$

Vlastná priama podobnosť s koeficientom k má **jediný** samodružný bod

$$S\left[\frac{b_1.(a_{11}+1)+b_2.a_{12}}{1-k^2},\frac{-b_2.(a_{11}-1)+b_1.a_{12}}{1-k^2}\right].$$

Analogicky, pre samodružné vektory asociovaného zobrazenia platí:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_{11}-\lambda).u_1+a_{12}.u_2\\ 0 &= a_{12}.u_1-(a_{11}+\lambda).u_2 \end{aligned}$$

[64] Riešeniu rovnice vyhovujú ľubovoľné hodnoty $u_1,u_2\in R$. Nulový vektor však nemôže byť smerovým vektorom priamky.

a charakteristická rovnica $-a_{11}^2 + \lambda^2 - a_{12}^2 = \lambda^2 - k^2 = 0.$

Charakteristické čísla sú $\lambda_1 = k$ a $\lambda_2 = -k.$

Pre $\lambda_{1,2} = \pm k$ dostaneme homogénne sústavy, ktorých determinant sa rovná 0. Rovnice v každej sústave sú teda závislé a pre každú hodnotu $\lambda_{1,2}$ postačuje uvažovať len o jednej rovnici z danej sústavy, napr. v tvare:

$$0 = (a_{11} \pm k).u_1 + a_{12}.u_2.$$

- Triviálnym riešením je vektor $\vec{u} = (u_1, u_2) = (0,0)$. Nulový vektor však nie je samodružným vektorom, a preto túto možnosť vylúčime.
- Ak položíme[65] $u_1 = -a_{12}$ a $u_2 = a_{11} \pm k$, kde $[a_{12}, a_{11} \pm k] \neq [0,0]$, potom riešením sú dva samodružné vektory

$$\vec{u} = (-a_{12}, a_{11} + k) \quad \text{a} \quad \vec{v} = (-a_{12}, a_{11} - k).$$

Túto nepriamu podobnosť nazývame **centrálno-podobná symetria** (v skratke CPS) so stredom S a koeficientom k.

N uvedených poznatkov vyplýva:

- každá vlastná podobnosť v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ má **práve jeden** samodružný bod,
- v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ existuje **9 podobností** – šesť zhodností a tri vlastné podobnosti: **CPR, CPS** a **rovnoľahlosť**,
- matica rovnoľahlosti je charakteristická tým, že prvky hlavnej diagonály sa rovnajú $\pm k$ a vedľajšia diagonála má nulové prvky.

4.3.3 Rovnoľahlosť v $\mathbb{E}_2$

Pri odvodení analytických vyjadrení zhodností v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ sme vychádzali z definícií známych zo strednej školy. V prípade rovnoľahlosti ukážeme, že stredoškolská definícia vyhovuje zavedeniu rovnoľahlosti pomocou analytického vyjadrenia.

Príklad (dôležitý)

V euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ je daný bod $S[m,n]$ a dané je reálne číslo k, kde $k \neq 0, k \neq \pm 1$.
Zobrazenie $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$, ktoré ľubovoľnému bodu $X \in \mathbb{E}_2$ priradí bod $X^* \in \mathbb{E}_2$ tak, že $|SX^*| = |k|.|SX|$ a súčasne

- *bod X^* leží na polpriamke SX, ak $k > 0$*
  alebo
- *ak $k < 0$, potom bod X^* leží na opačnej polpriamke k SX.*

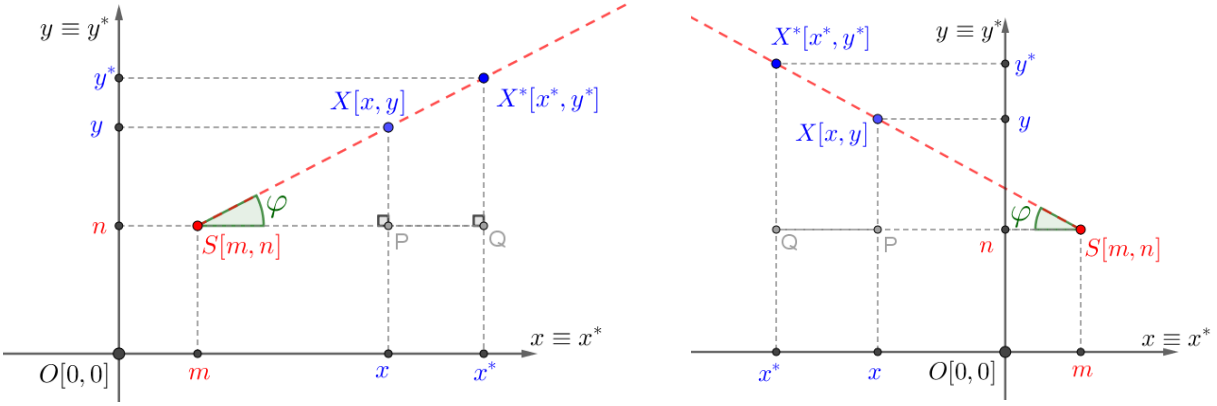
Ukážte, že zobrazenie je rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom k.

Riešenie

Ak položíme $X \equiv S$, potom $|SX^*| = |k|.|SS| = k.0 = 0$. To znamená, že $X^* \equiv S$. Daný bod S je zobrazení g samodružným bodom. Uvažujme ďalej o bode $X \in \mathbb{E}_2$, ktorý je rôzny od S.

[65] Každú z rovníc $0 = (a_{11} \pm k).u_1 + a_{12}.u_2$ môžeme interpretovať ako skalárny súčin dvoch kolmých vektorov, t.j. $(a_{11} \pm k, a_{12}).(u_1, u_2) = 0$.

a) Nech $k > 0$. Podľa zadania ležia body X, X^* na polpriamke so začiatkom S (obr. 4.7) a pre súradnice platí: $(m < x \text{ a } m < x^*)$ alebo $(x < m \text{ a } x^* < m)$. [66]



Obr. 4.7

Z pravouhlých trojuholníkov SXP, SX^*Q vyplýva:

$$\cos\varphi = \frac{|SP|}{|SX|} = \frac{|SQ|}{|SX^*|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|x-m|}{|SX|} = \frac{|x^*-m|}{|SX^*|}$$

$$\frac{|x-m|}{|SX|} = \frac{|x^*-m|}{|k|.|SX|} \quad \Rightarrow \quad |x^*-m| = |k|.|x-m|$$

Ak sú body X, X^* z 1. a 4. kvadrantu, potom platí:

$$|x^*-m| = x^*-m, \quad |x-m| = x-m.$$

Ak body X, X^* ležia v 2.a 3. kvadrante, potom platí:

$$|x^*-m| = -(x^*-m), \quad |x-m| = -(x-m).$$

Z uvedených rovností vyplýva:

$$x^*-m = k.(x-m)$$
$$x^* = k.x + m.(1-k)$$

Analogicky (pomocou funkcie $\sin\varphi$) odvodíme:

$$y^* = k.y + n.(1-k)$$

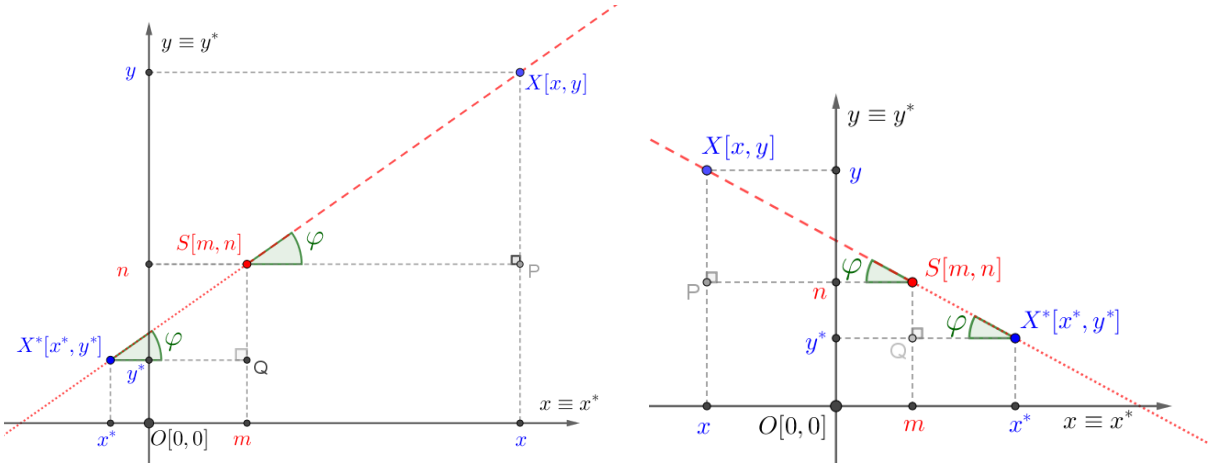
Zobrazenie $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ má analytické vyjadrenie v tvare:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m.(1-k) \\ n.(1-k) \end{pmatrix},$$

ktoré je vyjadrením rovnoľahlosti.

b) Nech $k < 0$. Podľa zadania ležia body X, X^* na opačnej polpriamke k polpriamke so začiatkom S (obr. 4.8) a pre súradnice platí: $x < m < x^*$ alebo $x^* < m < x$.

[66] Uvažujeme situáciu podľa obr. 4.7, kde sú body S, X, X^* v 1. alebo v 2. kvadrante. Necháme na čitateľa, aby si ostatné možnosti vzájomného rozmiestnenia bodov nakreslil osobitne.



Obr. 4.8

Analogicky, z pravouhlých trojuholníkov SXP, SX^*Q vyplýva:

$$\cos\varphi = \frac{|SP|}{|SX|} = \frac{|SQ|}{|SX^*|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|x-m|}{|SX|} = \frac{|x^*-m|}{|SX^*|}$$

$$\vdots$$

$$|x^*-m| = |k|.|x-m|$$

Keďže bod S leží medzi bodmi X, X^*, platí:

$$|x^*-m| = -(x^*-m), \quad |x-m| = (x-m).$$

alebo

$$|x^*-m| = x^*-m, \quad |x-m| = -(x-m),$$

kde $|k| = -k$, pretože $k < 0, k \neq -1$. Z toho vyplýva:

$$x^*-m = -|k|.(x-m)$$

$$x^* = k.x + m.(1-k)$$

Analogicky (pomocou funkcie $\sin\varphi$) odvodíme:

$$y^* = k.y + n.(1-k)$$

Zobrazenie $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ má analytické vyjadrenie v tvare:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m.(1-k) \\ n.(1-k) \end{pmatrix},$$

ktoré je vyjadrením rovnoľahlosti.

Ukázali sme, že rovnoľahlosť $\mathcal{H}[S,k], k \neq 0$ má analytické vyjadrenie:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Rovnoľahlosť je priama podobnosť a jej základné vlastnosti vyjadrujú nasledovné vety.

Veta

Obrazom priamky p v rovnoľahlosti $\mathcal{H}[S,k], k \neq 0$ je priamka p^*, ktorá je s priamkou p rovnobežná.

Dôkaz. Uvažujme priamku p v rovine $\mathbb{E}_2$, ktorej všeobecná rovnica je:

$$ax + by + c = 0, [a, b] \neq [0,0].$$

Z analytického vyjadrenia rovnoľahlosti odvodíme:

$$x = \frac{x^* - b_1}{k}, \qquad y = \frac{y^* - b_2}{k}.$$

Po dosadení do rovnice priamky p dostaneme:

$$ax + by + c = a.\frac{x^* - b_1}{k} + b.\frac{y^* - b_2}{k} + c = 0$$

$$\vdots$$

$$ax^* + by^* + k.c - a.b_1 - b.b_2 = 0.$$

Ide o všeobecnú rovnicu priamky p^*. Priamka p^* má rovnaký normálový vektor a je rovnobežná s priamkou p. ■[67]

Veta

Obrazom kružnice m so stredom M a polomerom r v rovnoľahlosti $\mathcal{H}[S, k], k \neq 0$ je opäť kružnica m^*, ktorej polomer sa rovná $r^* = |k|.r$ a jej stred M^* je obrazom stredu kružnice M.

Dôkaz. Uvažujme kružnicu m v rovine $\mathbb{E}_2$, ktorej všeobecná rovnica je:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Z rovnice (úpravou „na štvorce“) odvodíme: $M[-a, -b]$ a $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Z analytického vyjadrenia rovnoľahlosti pre obraz bodu $M[-a, -b]$ vypočítame $M^*[-ka + b_1, -kb + b_2]$. Ďalej z analytického vyjadrenia rovnoľahlosti odvodíme:

$$x = \frac{x^* - b_1}{k}, \qquad y = \frac{y^* - b_2}{k}.$$

a dosadíme do rovnice kružnice m:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = \left(\frac{x^* - b_1}{k}\right)^2 + \left(\frac{y^* - b_2}{k}\right)^2 + 2a.\frac{x^* - b_1}{k} + 2b.\frac{y^* - b_2}{k} + c = 0$$

$$\vdots$$

$$(x^*)^2 + (y^*)^2 + 2A.x^* + 2B.y^* + C = 0,$$

kde $A = ak - b_1, \quad B = bk - b_2, \quad C = b_1^2 + b_2^2 - 2akb_1 + 2bkb_2 + ck^2.$

Ide o rovnicu kružnice m^*, ktorej stred

$$M^*[-A, -B] = M^*[-(ak - b_1), -(bk - b_2)] = M^*[(k.(-a) + b_1), (k.(-b) + b_2)]$$

a pre polomer r^* platí:

$$(r^*)^2 = k^2.(a^2 + b^2 - c).$$

■

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie overte platnosť odvodených výsledkov v dôkaze predchádzajúcej vety.

[67] Znak ■ indikuje koniec dôkazu.

Veta

Dve rôzne kružnice $h(O,r_h)$ a $m(P,r_m)$, kde $r_h \neq r_m$, sú rovnoľahlé v dvoch rôznych rovnoľahlostiach $\mathcal{H}_e(S_e,k_e)$, $\mathcal{H}_i(S_i,k_i)$, ktorých stredy ležia na priamke OP a koeficienty sú $k_e = \frac{r_m}{r_h}, k_i = -\frac{r_m}{r_h}$, ak kružnica h je ako vzor a kružnica m jej obraz.

Dôkaz. Nech je zavedená súradnicová sústava. Umiestnime kružnice h,m tak, že $O[0,0], P[p,0]$. Uvažujme všeobecné analytické vyjadrenie rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S,k)$ v tvare:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Podľa predchádzajúcej vety je obrazom stredu $O[0,0]$ kružnice h zase stred $P[p,0]$ kružnice m a platí:

$$p = k.0 + b_1 \iff b_1 = p$$
$$0 = k.0 + b_2 \iff b_2 = 0$$

Pre polomery r_h, r_m zase podľa predchádzajúcej vety platí: $r_m = |k|.r_h \Longrightarrow k_{e,i} = \begin{matrix} \nearrow k_e = +\frac{r_m}{r_h} \\ \searrow k_i = -\frac{r_m}{r_h} \end{matrix}$.

Ďalej sme ukázali, že vlastná priama podobnosť s koeficientom k má **jediný** samodružný bod

$$S\left[\frac{b_2.a_{12}-b_1.(a_{11}-1)}{(a_{11}-1)^2+a_{12}^2}, -\frac{b_2.(a_{11}-1)+b_1.a_{12}}{(a_{11}-1)^2+a_{12}^2}\right].$$

Pre $k_e = +\frac{r_m}{r_h}$ je matica zobrazenia $A_e^T = \begin{pmatrix} \frac{r_m}{r_h} & 0 \\ 0 & \frac{r_m}{r_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$ a samodružným bodom je bod

$$S_e\left[\frac{0.0 - p.\left(\frac{r_m}{r_h}-1\right)}{\left(\frac{r_m}{r_h}-1\right)^2+0}, \frac{0.\left(\frac{r_m}{r_h}-1\right)-p.0}{\left(\frac{r_m}{r_h}-1\right)^2+0}\right] = S_e\left[-\frac{p}{\frac{r_m}{r_h}-1}, 0\right].$$

Analogicky pre $k_i = -\frac{r_m}{r_h}$ odvodíme:

$$S_i\left[\frac{0.0 - p.\left(-\frac{r_m}{r_h}-1\right)}{\left(-\frac{r_m}{r_h}-1\right)^2+0}, \frac{0.\left(-\frac{r_m}{r_h}-1\right)-p.0}{\left(-\frac{r_m}{r_h}-1\right)^2+0}\right] = S_i\left[\frac{p}{\frac{r_m}{r_h}+1}, 0\right]$$

■

V oboch prípadoch sú stredy rovnoľahlostí S_e, S_i body, ktoré ležia na priamke OP (na osi x).

Stred S_e rovnoľahlosti $\mathcal{H}_e\left(S_e, \frac{r_m}{r_h}\right)$ nazývame vonkajším stredom[68] rovnoľahlosti kružníc h,m. Stred S_i rovnoľahlosti $\mathcal{H}_i\left(S_i, -\frac{r_m}{r_h}\right)$ nazývame vnútorným stredom rovnoľahlosti kružníc h a m.

Dôsledky vety

a) Ak $p = 0$, potom $S_e \equiv S_i \equiv O \equiv P$ a kružnice h,m sú sústredné. To však neovplyvňuje skutočnosť, že rovnoľahlosti $\mathcal{H}_e\left(O, \frac{r_m}{r_h}\right), \mathcal{H}_i\left(O, -\frac{r_m}{r_h}\right)$ sú dve.

[68] Vonkajší stred rovnoľahlostí S_e kružníc h,m sa nazýva aj **externým** stredom, preto index „e“ . Obdobne, S_i býva označovaný ako **interný** stred rovnoľahlosti dvoch kružníc h,m (leží na úsečke OP).

b) Ak $r_h = r_m$, potom bod S_e neexistuje. Dve kružnice rovnakých polomerov sú rovnoľahlé len v jednej rovnoľahlosti $\mathcal{H}_i(S_i, -1)$, ktorá je stredovou súmernosťou so stredom $S_i\left[\frac{p}{2}, 0\right]$.

Dôkaz. Ak $r_h \to r_m$ alebo $r_m \to r_h$, potom $\frac{r_m}{r_h} \to 1$ a pre súradnicu bodu S_e vypočítame limitu:

$$\lim_{\frac{r_m}{r_h} \to 1} \frac{p}{\frac{r_m}{r_h} - 1} = \infty.$$

Pre $r_h = r_m$ súradnice bodu S_i vypočítame:

$$S_i\left[\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} + 1}, 0\right] = S_i\left[\frac{p}{1+1}, 0\right] = S_i\left[\frac{p}{2}, 0\right].$$

■

c) Ak $p = 0$ a súčasne $r_h = r_m$, potom $\mathcal{H}_e(O, k_e = 1)$ je identitou a $\mathcal{H}_i(O, k_i = -1)$ stredovou súmernosťou.

d) Ak $r_m = 0$ a $r_h \neq 0,\ p \neq 0$, potom body S_e a S_i sú totožné. [69] Platí:

$$S_e \equiv S_i \equiv P[p, 0]\,, \qquad k_e = k_i = 0.$$

Dôkaz. Počítame:

$$S_e\left[-\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} - 1}, 0\right] = S_e\left[-\frac{p}{\frac{0}{r_h} - 1}, 0\right] = S_e\left[-\frac{p}{0-1}, 0\right] = S_e[p, 0] = P[p, 0].$$

$$S_i\left[\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} + 1}, 0\right] = S_i\left[\frac{p}{\frac{0}{r_h} + 1}, 0\right] = S_i\left[\frac{p}{0+1}, 0\right] = P[p, 0].$$

■

e) Ak $r_h \to 0^+$ a $r_m \neq 0,\ p \neq 0$, potom body S_e a S_i sú totožné. Platí: [70]

$$S_e \equiv S_i \equiv O[0,0], \qquad k_e \to \infty, \qquad k_i \to (-\infty).$$

Dôkaz. Ak $r_h \to 0^+$ potom $\frac{r_m}{r_h} \to +\infty$ a platí:

$$\pm \lim_{\frac{r_m}{r_h} \to \infty} \left(\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} \pm 1}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S_e[0,0] = S_i[0,0] = O[0,0].$$

■

Úloha

Pomocou vhodného dynamického softvéru vymodelujte dve kružnice h, m v rovine $\mathbb{E}_2$ a podľa dôsledkov d) a e) zostrojte stredov rovnoľahlostí $\mathcal{H}_e(S_e, k_e)$, $\mathcal{H}_i(S_i, k_i)$ tak, aby bolo možné zmeniť pozíciu bodu P a polomery r_h, r_m. Vizualizujte jednotlivé prípady uvedené v dôsledkoch a) - e).

---

[69] Ak $r_m = 0$, resp. $r_m \to 0^+$ ide o limitný prípad kružnice so stredom $P[p, 0]$ a nulovým polomerom, t.j. výsledok limity je bod P. Analogicky pre $r_h \to 0^+$.

[70] Totožnosť bodov O, S_e, S_i je pre $r_h \to 0^+$ je na základe analógie s predchádzajúcim prípadom očakávaná. Hodnoty k_e a k_i sú však nenulové z dôvodu, že kružnica $h(O, r_h)$ je v príslušnej rovnoľahlosti vzorom kružnici $m(P, r_m)$.

Definícia (spoločná dotyčnica)

Priamka, ktorá sa súčasne dotýka dvoch daných kružníc, sa nazýva **spoločnou dotyčnicou**.

Ak spoločná dotyčnica prechádza vonkajším stredom rovnoľahlostí daných kružníc, nazýva sa **vonkajšou** (**spoločnou**) **dotyčnicou**; ak vnútorným stredom rovnoľahlosti, nazýva sa **vnútornou** (**spoločnou**) **dotyčnicou**.

Veta

Spoločná dotyčnica kružníc $h(O,r_h), m(P,r_m)$ prechádza niektorým zo stredov S_e alebo S_i rovnoľahlostí $\mathcal{H}_e(S_e,k_e)$, $\mathcal{H}_i(S_i,k_i)$.

Dôkaz. Do zavedenej súradnicovej sústavy umiestnime stredy kružníc h,m ako v dôkaze predchádzajúcej vety, t.j. $O[0,0]$, $P[p,0]$ a nech $p \neq 0$. [71]

Uvažujme všeobecnú rovnicu spoločnej dotyčnice t v tvare: $ax + by + c = 0$.

Ak priamka t je spoločnou dotyčnicou kružnic h,m potom sa vzdialenosť stredu kružnice od priamky t rovná polomeru danej kružnice a platí:

$$r_h = \frac{|a.0 + b.0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad r_m = \frac{|a.p + b.0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dostali sme dve rovnice s tromi neznámymi a, b, c. Ak položíme[72] $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, potom odvodíme:

$$r_h = |c|, \qquad r_m = |a.p + c|$$

a platí:

$$c = \pm r_h, \qquad a.p + c = \pm r_m.$$

- Ak $c = +r_h$, $\quad a.p + c = +r_m$, potom $a = \frac{r_m - r_h}{p}$ a pre rovnicu dotyčnice t odvodíme:

$$\frac{r_m - r_h}{p}.x + \sqrt{1 - a^2}.y + r_h = 0.$$

Keďže $S_e\left[-\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} - 1}, 0\right]$, platí:

$$\frac{r_m - r_h}{p}.x_{S_e} + \sqrt{1 - a^2}.y_{S_e} + r_h = 0$$

$$\frac{r_m - r_h}{p}.\left(-\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} - 1}\right) + \sqrt{1 - a^2}.0 + r_h = 0$$

$$\vdots$$

$$r_h - r_h = 0$$

Bod S_e leží na spoločnej dotyčnici t. Spoločná dotyčnica t s rovnicou

$$\frac{r_m - r_h}{p}.x + \sqrt{1 - \left(\frac{r_m - r_h}{p}\right)^2}.y + r_h = 0$$

je **vonkajšou** dotyčnicou kružníc $h(O,r_h)$ a $m(P,r_m)$, pre $O[0,0]$ a $P[p,0], p \neq 0$.

---

[71] Necháme na čitateľa, aby si premyslel špeciálne prípady podľa dôsledkov predchádzajúcej vety.

[72] Takúto sústavu rovníc štandardne riešime tak, že jednu z premenných považujeme za parameter. Ide o jednu dodatočnú podmienku. Aj v tom prípade použijeme jednu podmienku, avšak v inej forme. Ak je veľkosť normálového vektora dotyčnice jednotková, z hodnôt a, b len jedna je nastaviteľná ako parameter.

Ak uvažujeme o bode $S_i\left[\frac{p}{\frac{r_m}{r_h}+1},0\right]$, potom vypočítame:

$$\frac{r_m-r_h}{p}.\frac{p}{\frac{r_m}{r_h}+1}+\sqrt{1-a^2}.0+r_h=\cdots=r_h.\left(\frac{r_m-r_h}{r_m+r_h}+1\right)=\cdots=2.\frac{r_h.r_m}{r_m+r_h}\neq 0$$

Bod S_i **neleží** na **vonkajšej** dotyčnici t.

- Ak $c=+r_h$, $a.p+c=-r_m$, potom $a=\frac{-r_m-r_h}{p}$ a pre rovnicu dotyčnice t odvodíme:

$$-\frac{r_m+r_h}{p}.x+\sqrt{1-a^2}.y+r_h=0$$

a pre $S_i\left[\frac{p}{\frac{r_m}{r_h}+1},0\right]$ platí:

$$-\frac{r_m+r_h}{p}.\frac{p}{\frac{r_m}{r_h}+1}+\sqrt{1-a^2}.0+r_h=-r_h-r_h=0$$

Dotyčnica t so všeobecnou rovnicou

$$-\frac{r_m+r_h}{p}.x+\sqrt{1-\left(\frac{r_m+r_h}{p}\right)^2}.y+r_h=0$$

je **vnútornou** dotyčnicou kružníc $h(O,r_h)$ a $m(P,r_m)$, pre $O[0,0]$ a $P[p,0], p\neq 0$.

- Ak $c=-r_h$, $a.p+c=+r_m$, potom $a=\frac{r_m+r_h}{p}$ a pre rovnicu dotyčnice t odvodíme:

$$\frac{r_m+r_h}{p}.x+\sqrt{1-a^2}.y-r_h=0$$

a pre $S_i\left[\frac{p}{\frac{r_m}{r_h}+1},0\right]$ platí:

$$\frac{r_m+r_h}{p}.\frac{p}{\frac{r_m}{r_h}+1}+\sqrt{1-a^2}.0-r_h=-r_h-r_h=0$$

Dotyčnica t so všeobecnou rovnicou

$$\frac{r_m+r_h}{p}.x+\sqrt{1-\left(\frac{r_m+r_h}{p}\right)^2}.y-r_h=0$$

je tiež **vnútornou** dotyčnicou kružníc $h(O,r_h)$ a $m(P,r_m)$, pre $O[0,0]$ a $P[p,0], p\neq 0$.

- Ak $c=-r_h$, $a.p+c=-r_m$, potom $a=\frac{-r_m+r_h}{p}=\frac{r_h-r_m}{p}$ a pre rovnicu dotyčnice t odvodíme:

$$\frac{r_h-r_m}{p}.x+\sqrt{1-a^2}.y-r_h=0.$$

Keďže $S_e\left[-\frac{p}{\frac{r_m}{r_h}-1},0\right]$, platí:

$$\frac{r_h - r_m}{p}.x_{S_e} + \sqrt{1-a^2}.y_{S_e} - r_h =$$

$$= \frac{r_h - r_m}{p}.\left(-\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} - 1}\right) + \sqrt{1-a^2}.0 - r_h = r_h - r_h = 0.$$

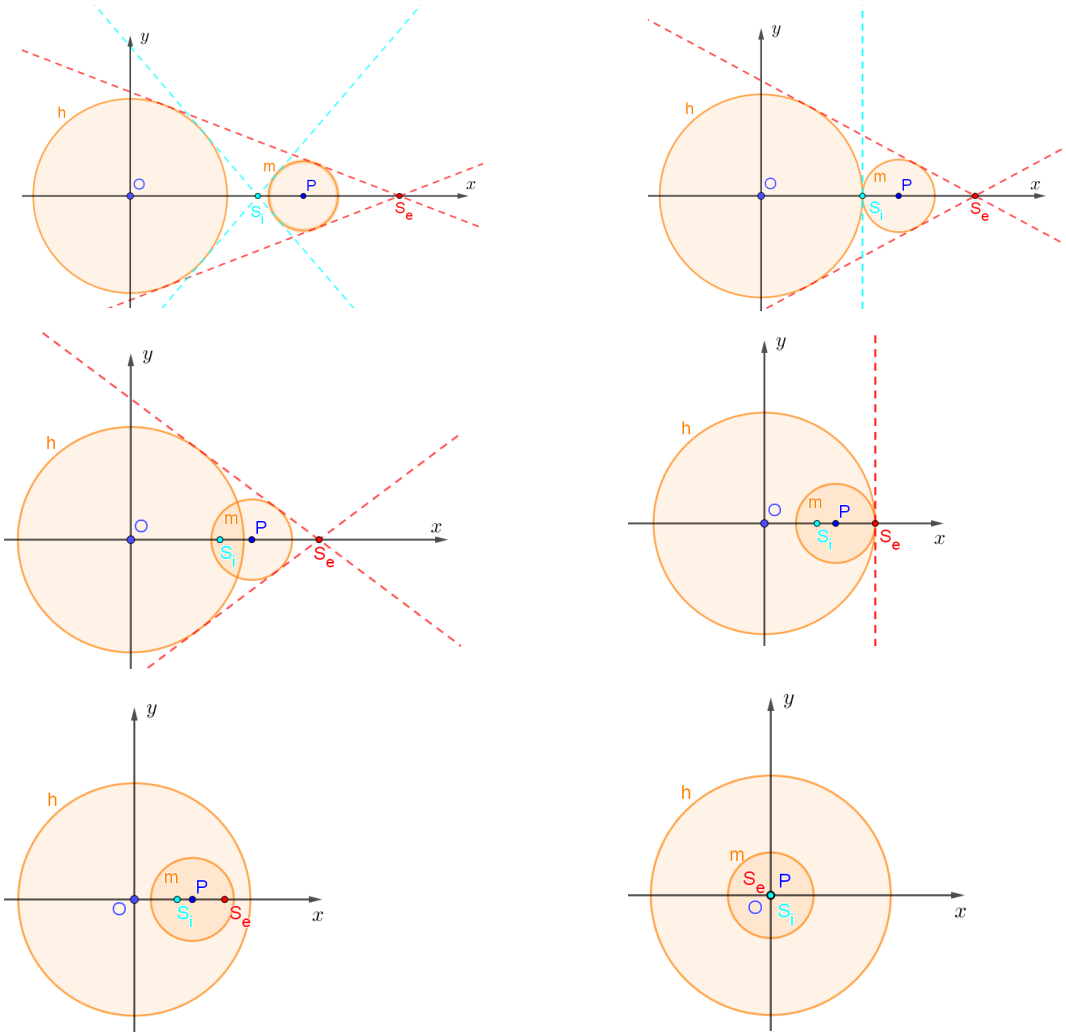
Bod S_e leží na vonkajšej dotyčnici t kružníc $h(O, r_h)$ a $m(P, r_m)$, pre $O[0,0]$ a $P[p,0], p \neq 0$ a všeobecná rovnica dotyčnice je:

$$\frac{r_h - r_m}{p}.x + \sqrt{1-\left(\frac{r_h - r_m}{p}\right)^2}.y - r_h = 0.$$

■

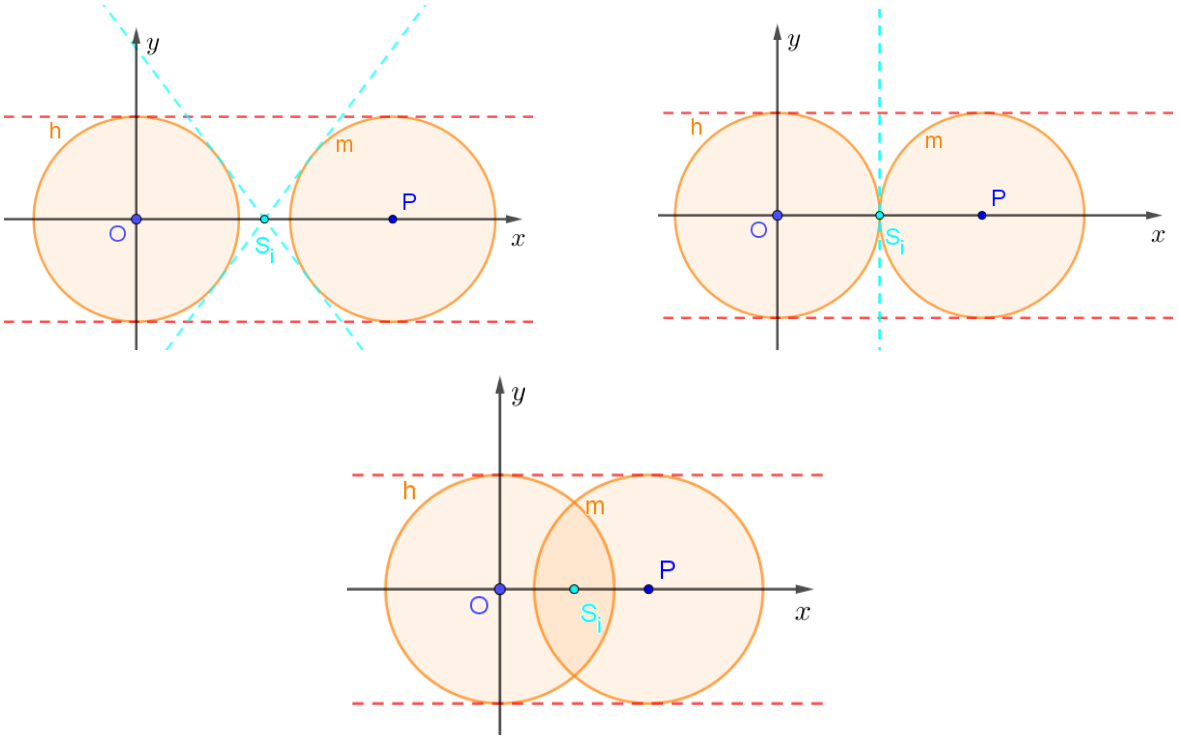
Dôsledok

a) Existujú najviac štyri spoločné dotyčnice dvoch kružníc s navzájom rôznymi polomermi.



Obr. 4.9

a) Existujú najviac štyri spoločné dotyčnice dvoch kružníc s navzájom rôznymi stredmi a rovnakými polomermi.



Obr. 4.10

Príklad

Určte súradnice dotykových bodov vonkajšej dotyčnice kružníc h a m daných rovnicami $x^2 + y^2 = r_h^2$ a $(x-p)^2 + y^2 = r_m^2$.

Riešenie

Odvodili sme rovnicu vonkajšej dotyčnice t v tvare:

$$\frac{r_m - r_h}{p}.x + \sqrt{1 - \left(\frac{r_m - r_h}{p}\right)^2}.y + r_h = 0.$$

Súčasne rovnica dotyčnice t, ktorá sa dotýka kružnice $h: x^2 + y^2 = r_h^2$ v bode $T_h[x_0, y_0]$, má tvar: [73]

$$x.x_0 + y.y_0 - r_h^2 = 0.$$

Porovnaním zodpovedajúcich si koeficientov oboch rovníc dostaneme:

$$x_0 = s.\frac{r_m - r_h}{p}$$

$$y_0 = s.\sqrt{1 - \left(\frac{r_m - r_h}{p}\right)^2}$$

$$-r_h^2 = s.r_h,$$

kde $s \in R - \{0\}$ a predstavuje nenulový násobok jednej z rovníc.

Z poslednej rovnice vyplýva: $s = -r_h$, kde $r_h \neq 0$ a pre súradnice dotykového bodu odvodíme:

[73] Rovnica je odvodená v [8].

$$T_{h_1}\left[-r_h.\frac{r_m-r_h}{p}, -r_h.\sqrt{1-\left(\frac{r_m-r_h}{p}\right)^2}\right]$$

Vzhľadom k tomu, že kružnica h je osovo súmerná podľa súradnicovej osi x, dotykový bod druhej vonkajšej dotyčnice má súradnice

$$T_{h_2}\left[-r_h.\frac{r_m-r_h}{p}, +r_h.\sqrt{1-\left(\frac{r_m-r_h}{p}\right)^2}\right].$$

Obdobným spôsobom pre kružnicu s rovnicou $(x-p)^2+y^2=r_m^2$ odvodíme rovnicu vonkajšej dotyčnice t v tvare:

$$t\colon (x-p).(x_0-p)+y.y_0-r_m^2=\cdots=x.(x_0-p)+y.y_0-p.(x_0-p)-r_m^2=0.$$

Porovnaním koeficientov uvedenej rovnice s koeficientmi v rovnici:

$$t\colon \frac{r_m-r_h}{p}.x+\sqrt{1-\left(\frac{r_m-r_h}{p}\right)^2}.y+r_h=0$$

Dostaneme:

$$x_0=p+s.\frac{r_m-r_h}{p}$$

$$y_0=s.\sqrt{1-\left(\frac{r_m-r_h}{p}\right)^2}$$

$$-p.(x_0-p)-r_m^2=s.r_h,$$

kde $s\in R-\{0\}$. Z poslednej rovnice pre $r_h\neq 0$ vypočítame s. Platí:

$$s=\frac{-p.(x_0-p)-r_m^2}{r_h}=-\frac{p}{r_h}.s.\frac{r_m-r_h}{p}-\frac{r_m^2}{r_h}$$

$$\Downarrow$$

$$s.\left(1+\frac{r_m-r_h}{r_h}\right)=-\frac{r_m^2}{r_h}$$

$$s.\frac{r_m}{r_h}=-\frac{r_m^2}{r_h}\quad\Longrightarrow\quad s=-r_m.$$

Súradnice dotykových bodov $T_{m_{1,2}}[x_0, y_0]$ sú:

$$T_{m_{1,2}}\left[p-r_m.\frac{r_m-r_h}{p}, \pm r_m.\sqrt{1-\left(\frac{r_m-r_h}{p}\right)^2}\right].$$

Príklad (aplikačný)

Vzdialenosť dvoch prevodových kolies s polomermi $10cm$ a $5cm$ je $25cm$. Aký dlhý je prevodový remeň, ktorý zabezpečuje priamy prevod (kolesá rotujú v rovnakom smere)?

Riešenie

Prevodové kolesá modelujeme ako kružnice s rovnicami:

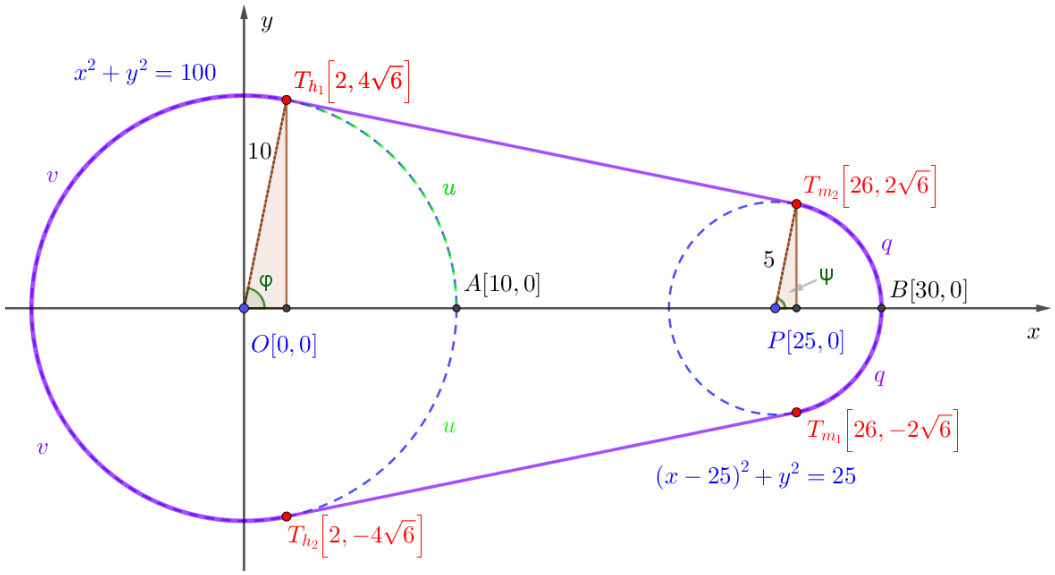
$$h: x^2 + y^2 = 100 \qquad \text{a} \qquad m: (x-25)^2 + y^2 = 25.$$

Použijeme výsledky z riešenia predchádzajúceho príkladu a pre súradnice dotykových bodov odvodíme:

$$T_{h_2}\left[-10.\frac{5-10}{25}, 10.\sqrt{1-\left(\frac{5-10}{25}\right)^2}\right] = \cdots = T_{h,1}\left[2,4\sqrt{6}\right]$$

$$T_{m_1}\left[25-5.\frac{5-10}{25}, 5.\sqrt{1-\left(\frac{5-10}{25}\right)^2}\right] = \cdots = T_{m_1}\left[26,2\sqrt{6}\right]$$

a platí:
$$\left|T_{h_2}, T_{m_1}\right| = \sqrt{(2-26)^2 + \left(4\sqrt{6}-2\sqrt{6}\right)^2} = \cdots = 10\sqrt{6}.$$



Obr. 4.11

Na obr. 4.10 vyznačené trojuholníky sú podobné, a preto sú uhly φ, ψ zhodné. Z pravouhlých trojuholníkov vypočítame

$$\cos\varphi = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \cos\psi$$

$$\arccos\frac{1}{5} = \varphi = \psi$$

Dĺžku oblúka kružnice h, ktorý je určený bodmi T_{h_1}, A a T_{h_2}, určíme trojčlenkou:

$$\uparrow \begin{matrix} 2\pi \ldots\ldots\ldots 2\pi.r_h = 20\pi \\ \varphi \ldots\ldots\ldots u \end{matrix} \uparrow$$

$$u = 10.\arccos\frac{1}{5}.$$

Prevodový remeň sa navíja na doplnkový oblúk a má dĺžku:

$$2v = 2\pi.r_h - 2u = \cdots = 20.\left(\pi - \arccos\frac{1}{5}\right).$$

Analogicky vypočítame, že oblúk kružnice m, na ktorý sa navíja prevodový remeň má dĺžku:

$$2q = 10.\arccos\frac{1}{5}.$$

Celková dĺžka d prevodového remeňa, ktorý je napnutý medzi prevodové kolesá je teda:

$$d = 2v + 2.\left|T_{h_2}, T_{m_1}\right| + 2q = \ \ldots = 20.(\pi + \sqrt{6}) - 10.arcos\frac{1}{5} \approx 98,13cm.$$

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie overte výsledok riešenia z predchádzajúceho príkladu. Súčasne zistite, či prevodový remeň, zabezpečujúci protismernú rotáciu, je dlhší. Ak áno, o koľko percent? Je percentuálny pomer závislý od polomerov prevodových kolies? Aký je percentuálny pomer pre dve zvonku sa dotýkajúce kolesá? Ktorý prevod je technicky realizovateľný?

Veta

Ak body $S_e,\ S_i$ sú postupne vonkajší a vnútorný stred rovnoľahlostí $\mathcal{H}_e(S_e, k_e)$, $\mathcal{H}_i(S_i, k_i)$ kružníc $h(O, r_h), m(P, r_m)$, kde kružnica h je vzor a kružnica m jej obraz, potom platí:

a) $(OPS_e) = \frac{|r_h|}{|r_m|} = \frac{1}{k_e},\ (OPS_i) = -\frac{|r_h|}{|r_m|} = \frac{1}{k_i},$

b) $S_e = \frac{r_m.O - r_h.P}{r_m - r_h}\ ,\ S_i = \frac{r_m.O + r_h.P}{r_m + r_h}$

Dôkaz. Do zvolenej súradnicovej sústavy umiestnime kružnice tak, aby ich rovnice boli (pre názornosť pozrite obr. 4.9a) $h: x^2 + y^2 = r_h^2$ a $m: (x-p)^2 + y^2 = r_m^2.$

a) Vypočítame deliace pomery: [74]

$$(OPS_e) = +\frac{|\overrightarrow{OS_e}|}{|\overrightarrow{PS_e}|} = \frac{\left|-\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} - 1} - 0\right|}{\left|-\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} - 1} - p\right|} = \left|\frac{r_h}{r_m}\right| = \frac{1}{k_e}$$

$$(OPS_i) = -\frac{|\overrightarrow{OS_i}|}{|\overrightarrow{PS_i}|} = -\frac{\left|\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} + 1} - 0\right|}{\left|\frac{p}{\frac{r_m}{r_h} + 1} - p\right|} = -\left|\frac{r_h}{r_m}\right| = \frac{1}{k_i}$$

b) Ak $(OPS_e) = \frac{1}{k_e}$, potom vektory $\overrightarrow{OS_e}, \overrightarrow{PS_e}$ sú rovnobežné a plat9>

$$\overrightarrow{OS_e} = \frac{1}{k_e}.\overrightarrow{PS_e}$$

$$k_e.\overrightarrow{OS_e} = k_e.(S_e - O) = S_e - P$$

$$\vdots$$

$$S_e.(k_e - 1) = k_e.O - P$$

$$S_e = \frac{P - k_e.O}{1 - k_e} = \frac{P - \frac{r_m}{r_h}.O}{1 - \frac{r_m}{r_h}}$$

[74] Súradnice príslušných stredov rovnoľahlostí $S_e.S_i$ sú vypočítané v dôkaze vety o spoločných dotyčniciach.

$$\vdots$$

$$S_e = \frac{r_m.O - r_h.P}{r_m - r_h}.$$

Analogicky:

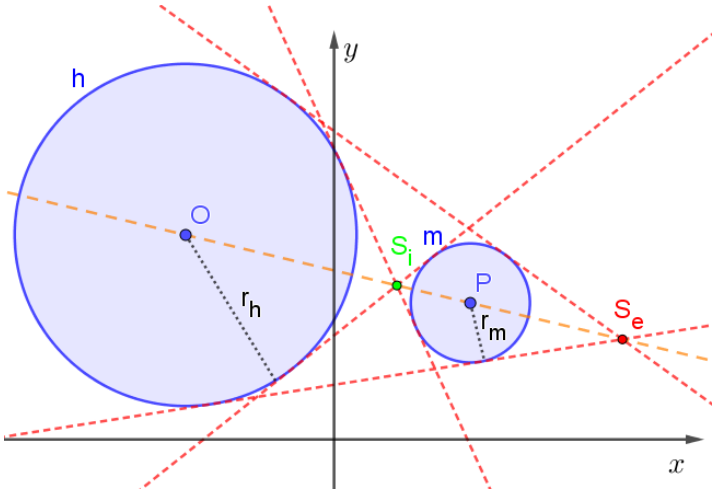
$$\overrightarrow{OS_i} = \frac{1}{k_i}.\overrightarrow{PS_i}$$

$$\vdots$$

$$S_i = \frac{r_m.O + r_h.P}{r_m + r_h}.$$

■

Hlavná výhoda odvodených vzorcov pre určenie stredov rovnoľahlostí S_e, S_i spočíva v tom, že sú nezávislé na zavedení súradnicovej sústavy a umiestnení príslušných kružníc $h(O, r_h)$ a $m(P, r_m)$ v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$. Použijeme ich v dôkaze nasledujúcej vety.



Obr. 4.12

Veta (Mongeho veta o osiach podobnosti)
Ak tri kružnice $h_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$ a $h_3(O_3, r_3)$ majú navzájom rôzne stredy a polomery, potom pre vonkajšie stredy rovnoľahlostí E_{12}, E_{23}, E_{31}, resp. vnútorné stredy rovnoľahlostí I_{12}, I_{23}, I_{31}, dvojíc kružníc $k_1, k_2; k_2, k_3$ a k_3, k_1, potom kolineárnymi sú trojice bodov:

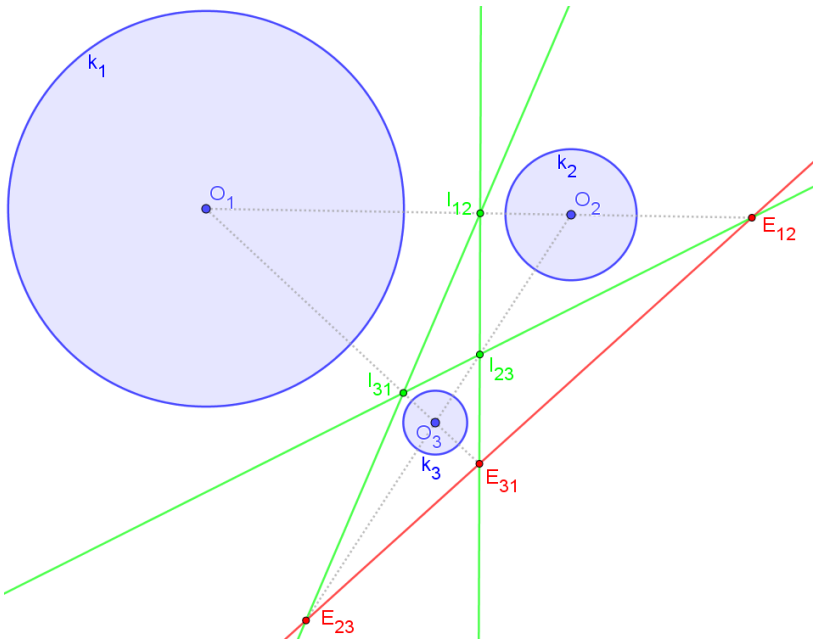
a) E_{12}, E_{23}, E_{31},
b) I_{12}, I_{23}, E_{31},
c) I_{12}, E_{23}, I_{31},
d) E_{12}, I_{23}, I_{31}.

Dôkaz. a) Podľa predchádzajúcej vety platí:

$$E_{12} = \frac{r_2.O_1 - r_1.O_2}{r_2 - r_1}$$

$$E_{23} = \frac{r_3.O_2 - r_2.O_3}{r_3 - r_2}$$

$$E_{31} = \frac{r_1.O_3 - r_3.O_1}{r_1 - r_3}.$$



Obr. 4.13

Ak existuje $t \in R$ také, že $E_{31} = t.E_{12} + (1-t).E_{23}$, potom bod E_{31} leží na priamke $E_{12}E_{23}$. Počítame:

$$(r_2 - r_1).E_{12} = r_2.O_1 - r_1.O_2 \qquad /.r_3$$
$$(r_3 - r_2).E_{23} = r_3.O_2 - r_2.O_3 \qquad /.r_1$$
$$\Downarrow$$
$$r_3.(r_2 - r_1).E_{12} + r_1.(r_3 - r_2).E_{23} = r_2.r_3.O_1 - r_1.r_2.O_3 \qquad /:r_2$$
$$\frac{r_3}{r_2}.(r_2 - r_1).E_{12} + \frac{r_1}{r_2}.(r_3 - r_2).E_{23} = r_3.O_1 - r_1.O_3 \qquad /:(r_1 - r_3)$$
$$\frac{r_3}{r_2}.\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_3}.E_{12} + \frac{r_1}{r_2}.\frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_3}.E_{23} = \frac{r_3.O_1 - r_1.O_3}{r_1 - r_3} \qquad /:(r_1 - r_3)$$
$$\frac{r_3}{r_2}.\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_3}.E_{12} + \frac{r_1}{r_2}.\frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_3}.E_{23} = E_{31}.$$

Pre koeficienty v lineárnej kombinácii platí:

$$\frac{r_3}{r_2}.\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_3} + \frac{r_1}{r_2}.\frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_3} = \frac{r_3.r_2 - r_3.r_1 + r_1.r_3 - r_1.r_2}{r_2.(r_1 - r_3)} = 1.$$

Ak položíme $t = \frac{r_3}{r_2}.\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_3}$ a $1 - t = \frac{r_1}{r_2}.\frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_3}$, potom sme dokázali, že:

$$E_{31} = t.E_{12} + (1-t).E_{23.}$$

Tým sme dokázali, že vonkajšie stredy rovnoľahlostí E_{12}, E_{23} a E_{31} ležia na jednej priamke (obr. 4. 12).

b) Dokazujeme, že body I_{12}, I_{23} a E_{31} sú kolineárne. Použijeme výsledok z predchádzajúcej vety. Platí:

$$I_{12} = \frac{r_2.O_1 + r_1.O_2}{r_2 + r_1}, \qquad I_{23} = \frac{r_3.O_2 + r_2.O_3}{r_3 + r_2}, \qquad E_{31} = \frac{r_1.O_3 - r_1.O_3}{r_1 - r_3}$$

Počítame:

$$(r_2 + r_1).I_{12} = r_2.O_1 + r_1.O_2 \quad /.r_3$$
$$(r_3 + r_2).I_{23} = r_3.O_2 + r_2.O_3 \quad /.(-r_1)$$

Rovnice sčítame a odvodíme:

$$r_3.(r_2 + r_1).I_{12} - r_1.(r_3 + r_2).I_{23} = r_2.(r_3 O_1 - r_1.O_3)$$
$$\vdots$$
$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_3)}{(r_1 - r_3)} \cdot I_{23} - \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_1)}{(r_1 - r_3)} \cdot I_{12} = E_{31}$$

Overíme rozdiel koeficientov v rovnici:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_3)}{(r_1 - r_3)} - \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_1)}{(r_1 - r_3)} = \frac{r_1.r_2 + r_1.r_3 - r_3.r_2 - r_3.r_1}{r_2.(r_1 - r_3)} = \cdots = 1$$

Tým sme dokázali, že stredy rovnoľahlostí I_{12}, I_{23} a E_{31} ležia na jednej priamke (obr. 4. 12).

c) – d) Ostatné tvrdenia sa dokážu analogickým spôsobom alebo cyklickou zámenou odvodíme:

$$\frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{(r_3 + r_1)}{(r_2 - r_1)} \cdot I_{31} - \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{(r_3 + r_2)}{(r_2 - r_1)} \cdot I_{23} = E_{12}$$
$$\frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{(r_1 + r_2)}{(r_3 - r_2)} \cdot I_{12} - \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{(r_1 + r_3)}{(r_3 - r_2)} \cdot I_{31} = E_{23}$$

■

Priamky, na ktorých ležia príslušné stredy rovnoľahlostí, sa v literatúre nazývajú osi podobnosti.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie vyjadrite stredy O_1, O_2 a O_3 kružníc k_1, k_2 a k_3 pomocou vonkajších a vnútorných stredov rovnoľahlostí. Výsledok overte na konkrétnom príklade tak, že ho narysujete v dynamickom softvéri. Návod je na obr. 4.14.

Platí: E_12 =(r_2*O_1-r_1*O_2)/(r_2-r_1),E_23 =(r_3*O_2-r_2*O_3)/(r_3-r_2), E_31 =(r_1*O_3-r_3*O_1)/(r_1-r_3). Vyjadri z rovníc O_1, O_2, O_3.

Máme sústavu troch lineárnych rovníc pre neznáme O_1, O_2, O_3:

1. $(r_2 - r_1)E_{12} = r_2O_1 - r_1O_2$
2. $(r_3 - r_2)E_{23} = r_3O_2 - r_2O_3$
3. $(r_1 - r_3)E_{31} = r_1O_3 - r_3O_1$

Po postupnej úprave a vyjadrení dostaneme:

$$O_1 = \frac{(r_2 - r_1)E_{12} + (r_3 - r_2)E_{23} + (r_1 - r_3)E_{31}}{r_2 - r_3}$$
$$O_2 = \frac{(r_2 - r_1)E_{12} + (r_3 - r_2)E_{23} + (r_1 - r_3)E_{31}}{r_1 - r_3}$$
$$O_3 = \frac{(r_2 - r_1)E_{12} + (r_3 - r_2)E_{23} + (r_1 - r_3)E_{31}}{r_2 - r_1}$$

Obr. 4.14. Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 3. októbra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Príklad

Určte kružnicu k_2, ktorá sa dotkne kružnice $k_1: x^2 + (y-5)^2 = 9$ a súčasne sa dotýka priamky $p: y = 0$ v bode $T[8,0]$.

Riešenie

a) Uvažujme tak, že kružnice k_1, k_2 majú vonkajší dotyk. Použijeme Mongeho vetu, preto doplníme tretiu **pomocnú**[75] kružnicu $k_3: (x-8)^2 + (y+2)^2 = 4$. Ak uvažujeme o hľadanej kružnici k_2, potom podľa predchádzajúcej vety je bod $T \equiv I_{23}$ a vypočítame súradnice bodu E_{31}. Platí:

$$E_{31} = \frac{r_1.O_3 - r_3.O_1}{r_1 - r_3} = \frac{3.[8,-2] - 2.[0,5]}{3-2} = \cdots = [24,-16].$$

Priamka $E_{31}I_{23}$ je osou podobnosti a pretína kružnicu k_1 v bode I_{12}, ktorý je súčasne spoločným dotykovým bodom kružníc k_1, k_2. Vypočítame:

$$E_{31}I_{23}:\ X = T + t.\overrightarrow{TE_{31}}, t \in R$$
$$\vdots$$
$$x = 8 + t$$
$$y = -t$$

Dosadením do rovnice kružnice k_1 dostaneme kvadratickú rovnicu s neznámou t.

$$x^2 + (y-5)^2 = 9$$
$$(8+t)^2 + (-t-5)^2 = 9$$
$$\vdots$$
$$t_1 = -5, \qquad t_2 = -8$$

Z rovnice priamky $E_{31}I_{23}$ pre $t_1 = -5$ vypočítame:

$x = 8 - 5 = 3, y = 5$ a pre $t_2 = -8$ zase $x = 0, y = 8$.

Riešeniu podľa obr. 4. 15 vyhovuje bod $I_{12}[3,5]$, ktorý je dotykovým bodom kružníc k_1 a k_2.

Z rovnice

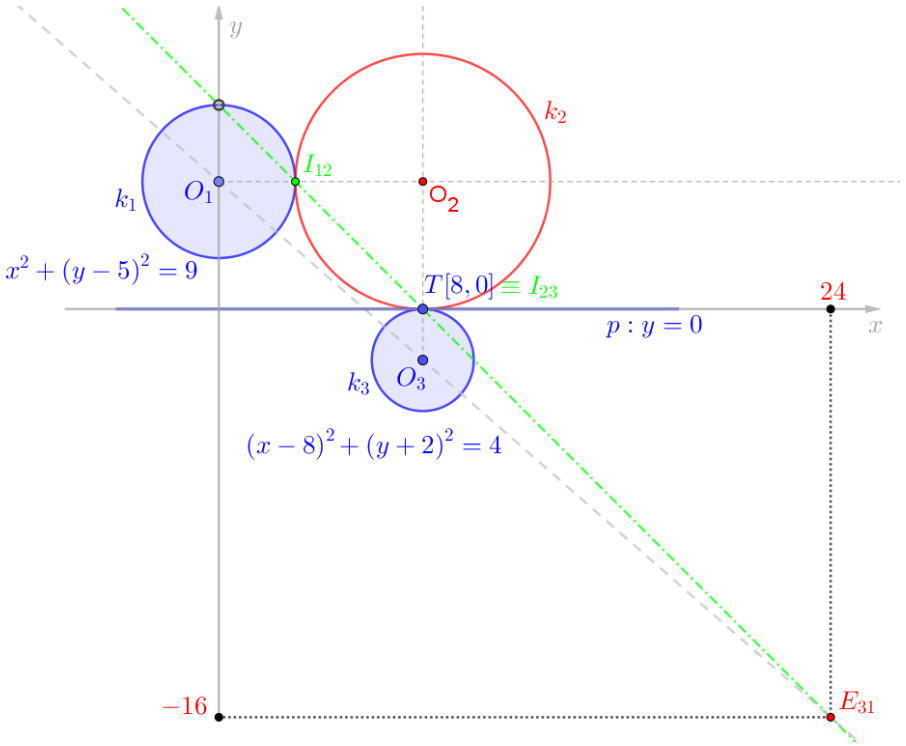
$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_3)}{(r_1 - r_3)} \cdot I_{23} - \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_1)}{(r_1 - r_3)} \cdot I_{12} = E_{31}$$

vypočítame polomer r_2.

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_3)}{(r_1 - r_3)} \cdot [8,0] - \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_1)}{(r_1 - r_3)} \cdot [3,5] = [24,-16]$$
$$\Downarrow$$
$$\vdots$$
$$r_2 = 8 \quad \text{alebo} \quad r_2 = 5.$$

Riešením je $r_2 = 5$ a rovnica kružnice $k_2: (x-8)^2 + (y-5)^2 = 25$.

[75] Pomocnú kružnicu sme zvolili tak, aby sme využili bod T ako stred rovnoľahlosti. Polomer r_3 kružnice k_3 určíme tak, aby $r_1 \neq r_3$.



Obr. 4.15

b) Ak uvažujeme, že kružnice k_1, k_2 sa dotýkajú zvnútra, potom dotykový bod je vonkajším stredom rovnoľahlosti E_{12}.
Ak opäť zvolíme tretiu **pomocnú** kružnicu k_3: $(x-8)^2 + (y+2)^2 = 4$, potom bod $T \equiv I_{23}$ a vypočítame súradnice bodu I_{31}. Platí:

$$I_{31} = \frac{r_1.O_3 + r_3.O_1}{r_1 + r_3} = \frac{3.[8,-2] + 2.[0,5]}{3+2} = \cdots = \left[\frac{24}{5}, \frac{4}{5}\right].$$

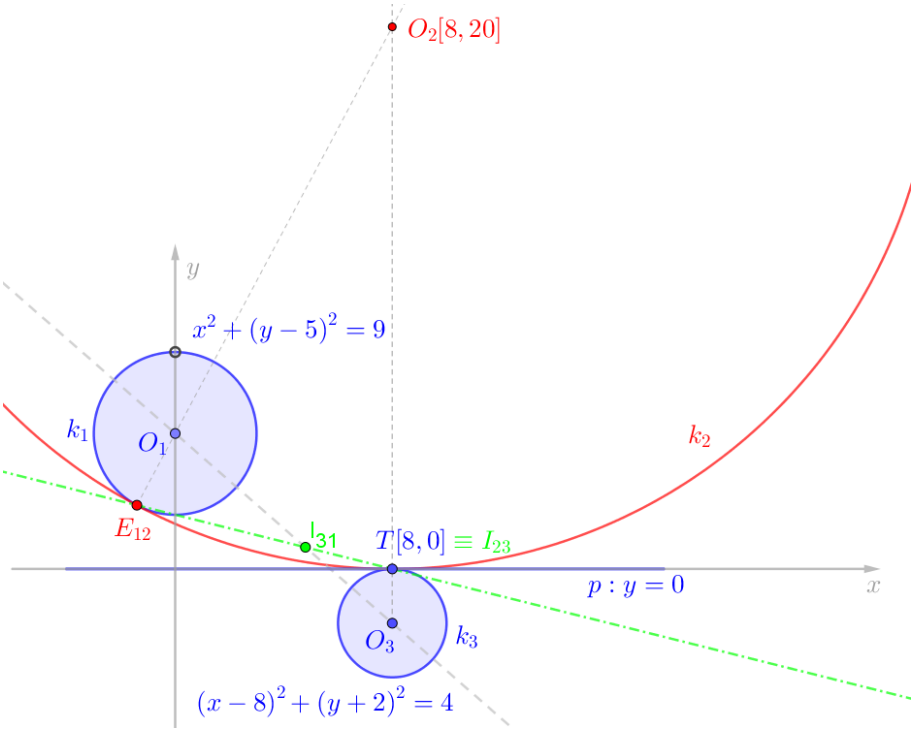
Priamka $I_{31}I_{23}$ je osou podobnosti a pretína kružnicu k_1 v bode E_{12}. Vypočítame:

$$I_{31}I_{23}:\ X = T + t.\overrightarrow{TI_{31}}, t \in R$$
$$\vdots$$
$$x = 8 + 4t$$
$$y = -t$$

Dosadíme do rovnice kružnice k_2 a dostaneme:

$$(8+4t)^2 + (-t-5)^2 = 9$$
$$\vdots$$
$$t_1 = -2, \qquad t_2 = -\frac{40}{17}.$$

Vyhovujúci je parameter $t_2 = -\frac{40}{17}$, ktorý určuje bod $E_{12}\left[-\frac{24}{17}, \frac{40}{17}\right]$. Ďalej analogickým spôsobom vypočítame polomer $r_2 = 20$ a určíme stred $O_2[8,20]$.
Rovnica kružnice k_2 je v tvare: $(x-8)^2 + (y-20)^2 = 400.$



Obr. 4.16

4.4 Skladanie podobností v $\mathbb{E}_2$

Množina podobností v $\mathbb{E}_2$ je vzhľadom na operáciu skladania zobrazení taktiež grupou. Z násobenia matíc a ich determinantov je evidentné, že výsledkom skladania:

- dvoch priamych podobností je priama podobnosť,
- priamej a nepriamej podobnosti je nepriama podobnosť,
- dvoch nepriamych podobností je priama podobnosť.
- Ak skladáme **dve nevlastné** podobnosti (koeficient $|k|=1$), výsledkom je vždy **zhodnosť** v $\mathbb{E}_2$ (identita, stredová súmernosť, otočenie, posunutie, osová súmernosť alebo posunutá súmernosť). Tieto možnosti sme analyzovali v kap. 3.4.1.

4.4.1 Skladanie dvoch rovnoľahlostí v $\mathbb{E}_2$

Uvažujme rovnoľahlosť $\mathcal{H}_1[S_1,k_1], k_1\neq 0$ s analytickým vyjadrením:[76]

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\0 & k_1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{X}^*=\mathbb{A}_1^T.\mathbb{X}+\mathbb{B}_1$$

a rovnoľahlosť $\mathcal{H}_2[S_2,k_2], k_2\neq 0$ s analytickým vyjadrením:

$$\begin{pmatrix}x^{**}\\y^{**}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_2 & 0\\0 & k_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_3\\b_4\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{X}^{**}=\mathbb{A}_2^T.\mathbb{X}^*+\mathbb{B}_2$$

Výsledkom $\mathcal{H}_2\circ\mathcal{H}_1\colon X\longrightarrow X^{**}$ bude zobrazenie s analytickým vyjadrením:

[76] Pripomíname, že v matici rovnoľahlosti je prvok $a_{12}=0$.

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x^{*} \\ y^{*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} =$$

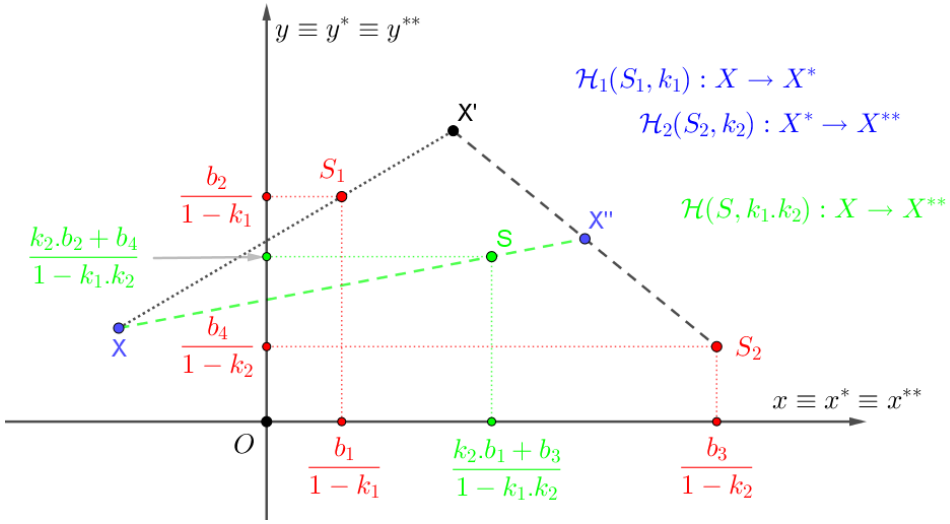
$$= \begin{pmatrix} k_2.k_1 & 0 \\ 0 & k_2.k_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2.b_1 + b_3 \\ k_2.b_2 + b_4 \end{pmatrix}$$

Matica zobrazenia $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} k_2.k_1 & 0 \\ 0 & k_2.k_1 \end{pmatrix}$ je maticou **priamej podobnosti** a rozlišujeme prípady:

a) ak $k_2.k_1 = 1$ a súčasne $k_2.b_1 + b_3 = 0 = k_2.b_2 + b_4$, potom ide o **identitu** $\mathcal{I}$.

b) Ak $k_2.k_1 = 1$ a súčasne $[k_2.b_1 + b_3, k_2.b_2 + b_4] \neq [0,0]$, potom výsledné zobrazenie je tiež nevlastná podobnosť a ide o **posunutie** $\mathcal{S}_{\vec{u}}$ s vektorom $\vec{u} = (k_2.b_1 + b_3, k_2.b_2 + b_4)$.

c) Ak $k_2.k_1 = 1$, potom výsledná podobnosť je **rovnoľahlosťou** $\mathcal{H}(S, k_2.k_1)$ so stredom $S\left[\frac{k_2.b_1+b_3}{1-k_1.k_2}, \frac{k_2.b_2+b_4}{1-k_1.k_2}\right]$.



Obr. 4.17

Ďalej vo všeobecnosti platí, že: $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$.

4.4.2 Skladanie rovnoľahlosti a otočenia v $\mathbb{E}_2$

Pre názornosť uvažujme najprv rovnoľahlosť $\mathcal{H}[S, k], k \neq 0, \pm 1$, $S[0,0]$ s analytickým vyjadrením:

$$\begin{pmatrix} x^{*} \\ y^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{A}_1^T.\mathbb{X}$$

a otočenie $\mathcal{S}(S, \alpha)$ so stredom $S[0,0]$ o uhol veľkosti $\alpha \neq 0° + k.180°, k \in Z$, ktorého analytické vyjadrenie je v tvare: [77]

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x^{*} \\ y^{*} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{X}^*.$$

[77] Pozri kap. 3.3.4.

Výsledkom skladania $\mathcal{S}(S,\alpha)\circ\mathcal{H}[S,k]$ je:

$$\begin{pmatrix}x^{**}\\y^{**}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x^{*}\\y^{*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k.\cos\alpha & -k.\sin\alpha\\ k.\sin\alpha & \mathrm{k}.\cos\alpha\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}x^{**}\\y^{**}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k.\cos\alpha & -k.\sin\alpha\\ k.\sin\alpha & k.\cos\alpha\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Determinant matice výsledného zobrazenia sa rovná k^2, teda ide o priamu podobnosť s koeficientom k.

Samodružným bodom je bod $S[0,0]$ a iné samodružné body neexistujú.

Vypočítame samodružné vektory, ak existujú. Z analytického vyjadrenia asociovaného zobrazenia vyplýva:

$$0=(-\lambda+k.\cos\alpha).u_1-k.\sin\alpha.u_2$$
$$0=k.\sin\alpha.u_1+(-\lambda+k.\cos\alpha).u_2$$

Pomocou determinantu

$$\begin{vmatrix}-\lambda+k.\cos\alpha & -k.\sin\alpha\\ k.\sin\alpha & -\lambda+k.\cos\alpha\end{vmatrix}=0$$

určíme charakteristickú rovnicu:

$$(-\lambda+k.\cos\alpha)^2+k^2.\sin^2\alpha=0,$$
$$(-\lambda+k.\cos\alpha)^2=-k^2.\sin^2\alpha$$

ktorá pre $k\neq 0$ a $\alpha\neq 0°+k.180°, k\in Z$ nemá korene $\lambda\in R-\{0\}$.

Podobnosť $\mathcal{S}(S,\alpha)\circ\mathcal{H}[S,k]$ je ***CPR*** so stredom $S[0,0]$. Navyše platí:

$$\mathcal{S}(S,\alpha)\circ\mathcal{H}[S,k]=\mathcal{H}[S,k]\circ\mathcal{S}(S,\alpha),$$

pretože obe zobrazenia majú rovnaký stred S.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte analytické vyjadrenie $\mathcal{S}(S,\alpha)\circ\mathcal{H}[S,k]$ pre $S[m,n]$, kde $[m,n]\neq[0,0]$. Vypočítajte samodružné body a samodružné vektory, ak existujú. Výsledok overte graficky vo vhodnom dynamickom softvéri.

Ak uvažujeme o rovnoľahlosť $\mathcal{H}[S_1,k], k\neq 0,\pm 1$, $S_1[m_1,n_1], [m_1,n_1]\neq[0,0]$ s analytickým vyjadrením:

$$\begin{pmatrix}x^{*}\\y^{*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m_1.(1-k)\\ n_1.(1-k)\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{X}^{*}=\mathbb{A}_1^{T}.\mathbb{X}+\mathbb{B}_1$$

a otočenie $\mathcal{S}(S_2,\alpha)$ so stredom $S_2[0,0]$ o uhol veľkosti $\alpha\neq 0°+k.180°, k\in Z$, ktorého analytické vyjadrenie je v tvare: [78]

[78] Pozri kap. 3.3.4.

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x^{*} \\ y^{*} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T . \mathbb{X}^{*}.$$

Výsledkom skladania $\mathcal{S}(S_2, \alpha) \circ \mathcal{H}[S_1, k]$ je:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x^{*} \\ y^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 . (1-k) \\ n_1 . (1-k) \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} k.\cos\alpha & -k.\sin\alpha \\ k.\sin\alpha & \mathrm{k}.\cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} m_1 . (1-k) \\ n_1 . (1-k) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}^T . \mathbb{X} + \mathbb{B}$$

Priama podobnosť nemá samodružné vektory (výpočet je rovnaký ako v predošlom prípade). a samodružným bodom je tiež jediný (pozri kap. 4.3.1).[79] Aj v tomto prípade ide o ***CPR***.

Poznamenávame, že možno dokázať: $\mathcal{S}(S_2, \alpha) \circ \mathcal{H}[S_1, k] \neq \mathcal{H}[S_1, k] \circ \mathcal{S}(S_2, \alpha)$. Ukážeme na príklade.

Príklad

Určte analytické vyjadrenie CPR, ak je výsledkom skladania rovnoľahlosti $\mathcal{H}\left(S_1, \frac{1}{2}\right)$, kde $S_1[4,2]$ a otočenia $\mathcal{S}(S_2, 90°)$, kde $S_2[0,0]$. Vypočítajte samodružný bod a overte, či existujú samodružné vektory.

Riešenie

a) Uvažujme skladanie $\mathcal{S}(S_2, 90°) \circ \mathcal{H}\left(S_1, \frac{1}{2}\right)$. Dosadíme do vyššie odvodených rovníc a platí:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}.\cos 90° & -\frac{1}{2}.\sin 90° \\ \frac{1}{2}.\sin 90° & \frac{1}{2}.\cos 90° \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4.\left(1-\frac{1}{2}\right) \\ 2.\left(1-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{**} = -\frac{1}{2}.y - 1$$

$$y^{**} = \frac{1}{2}.x + 2$$

Súradnice samodružného bodu S (stred CPR) vypočítame:

$$x = -\frac{1}{2}.y - 1$$

$$y = \frac{1}{2}.x + 2$$

$$\begin{matrix} 2x + y = -2 \\ -x + 2y = 4 \end{matrix} \Rightarrow \quad x = -\frac{8}{5}, \qquad y = \frac{6}{5}$$

Stredom CPR je $S\left[-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right]$. Existenciu samodružných vektorov zistíme z asociovaného zobrazenia s analytickým vyjadrením:

[79] Súradnice stredu CPR možno odvodiť zo vzorca v kap. 4.3.1. Vzhľadom na analytické vyjadrenie CPR by bol zápis komplikovaný a nie je nevyhnutné ho opätovne uvádzať.

$$u_1^* = -\frac{1}{2}.u_2 = \lambda.u_1$$
$$u_2^* = \frac{1}{2}.u_1 = \lambda.u_2$$

Charakteristická rovnica:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \frac{1}{4}$$

Nemá v obore R riešenie. Samodružné vektory neexistujú.

b) Uvažujme skladanie $\mathcal{H}\left(S_1, \frac{1}{2}\right) \circ \mathcal{S}(S_2, 90°)$. Odvodíme:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ 2.\left(1 - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 4.\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ 2.\left(1 - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$\vdots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zapíšeme:

$$x^{**} = -\frac{1}{2}.y + 2$$
$$y^{**} = \frac{1}{2}.x + 1$$

Stredom CPR je $S^*\left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right]$, pre ktorý v otočení

$$\mathcal{S}^{-1}(S_2, +90°) = \mathcal{S}(S_2, -90°)$$

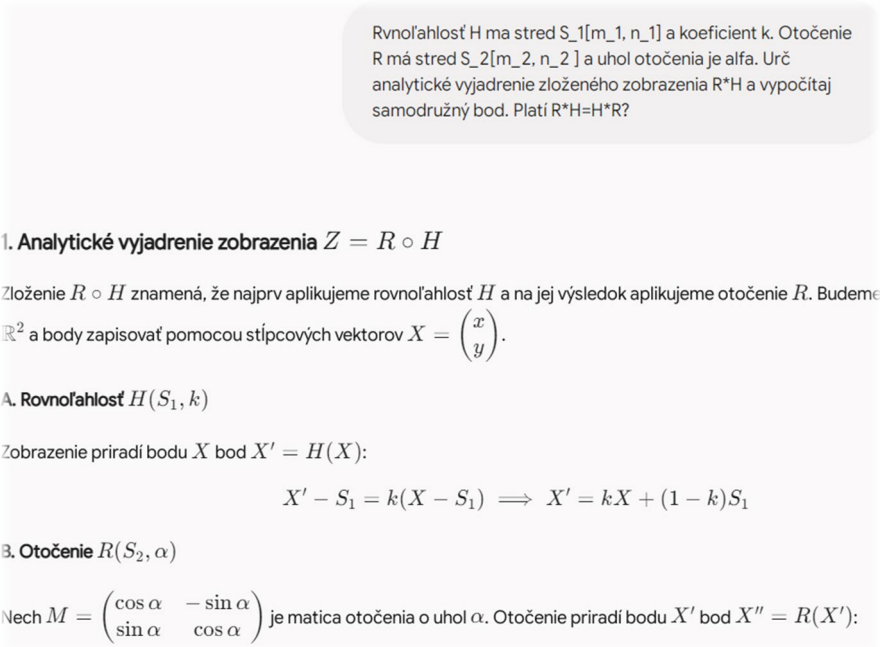
platí:

$$\mathcal{S}(S_2, -90°): S \longrightarrow S^*.$$

Samodružné vektory neexistujú (výpočet je rovnaký ako v prípade a)).

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte analytické vyjadrenie $\mathcal{S}(S_2, \alpha) \circ \mathcal{H}[S_1, k]$ pre $S_1[m_1, n_1], S_2[m_2, n_2]$ kde $[m_1, n_1] \neq [0,0] \neq [m_2, n_2], [m_1, n_1] \neq [m_2, n_2]$. Vypočítajte samodružný bod. Výsledok overte graficky vo vhodnom dynamickom softvéri. Návod je na obr. 4.18.



Obr. 4.18. Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 3. októbra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

4.4.3 Skladanie rovnoľahlosti a osovej súmernosti v $\mathbb{E}_2$

Najprv uvažujme o skladaní rovnoľahlosti $\mathcal{H}[S,k], k \neq 0, \pm 1,\ S[0,0]$ s analytickým vyjadrením:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{X}^* = \mathbb{A}_1^T . \mathbb{X}$$

a osovej súmernosti $\mathcal{S}_o$ s osou súmernosti o, ktorej os prechádza bodom $O[0,0]$, t.j. prípad, kedy stred rovnoľahlosti $S \in o$.

Nech os súmernosti o zviera s kladnou časťou osi x uhol veľkosti α.

Analytické vyjadrenie je v tvare: [80]

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T . \mathbb{X}^*.$$

Výsledkom skladania $\mathcal{S}_o \circ \mathcal{H}[S,k]$ je:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.\cos 2\alpha & k.\sin 2\alpha \\ k.\sin 2\alpha & -k.\cos 2\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Determinant matice výsledného zobrazenia sa rovná $-k^2$, teda ide o **nepriamu** podobnosť s koeficientom k. **Samodružným bodom** je bod $S[0,0]$ a iné samodružné body neexistujú.

Z analytického vyjadrenia asociovaného zobrazenia vyplýva:

[80] Pozri kap. 3.3.5.

$$0 = (-\lambda + k.\cos 2\alpha).u_1 + k.\sin 2\alpha.u_2$$
$$0 = k.\sin 2\alpha.u_1 + (-\lambda - k.\cos 2\alpha).u_2$$

Pomocou determinantu

$$\begin{vmatrix} -\lambda + k.\cos 2\alpha & k.\sin 2\alpha \\ k.\sin 2\alpha & -\lambda - k.\cos 2\alpha \end{vmatrix} = 0$$

určíme charakteristickú rovnicu:

$$\lambda^2 - k^2.\cos^2 2\alpha - k^2.\sin^2 2\alpha = 0$$
$$\vdots$$
$$\lambda^2 = k^2$$
$$\lambda_1 = k, \qquad \lambda_2 = -k.$$

Existujú teda dva samodružné vektory, ktoré zodpovedajú koreňom $\lambda_{1,2} = \pm k$.

Pri podmienke $k \neq 0, k \neq \pm 1$, výsledným zobrazením je ***CPS*** s osou.

Navyše platí:

$$\mathcal{S}_o \circ \mathcal{H}[S, k] = \mathcal{H}[S, k] \circ \mathcal{S}_o,$$

pretože stred rovnoľahlosti $S \in o$.

V druhom prípade uvažujeme o rovnoľahlosti $\mathcal{H}[S, k], k \neq 0, \pm 1$, $S[m, n]$ s analytickým vyjadrením:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m.(1-k) \\ n.(1-k) \end{pmatrix},$$
$$\mathbb{X}^* = \mathbb{A}_1^T.\mathbb{X} + \mathbb{B}_1$$

a osovej súmernosti $\mathcal{S}_o$ s osou súmernosti o, ktorá má smernicový uhol α, prechádza bodom $O[0,0]$ a nech bod $S \notin o$.

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix},$$
$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{X}^*.$$

Výsledkom skladania $\mathcal{S}_o \circ \mathcal{H}[S_1, k]$ je:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m.(1-k) \\ n.(1-k) \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} k.\cos 2\alpha & k.\sin 2\alpha \\ k.\sin 2\alpha & -k.\cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} m.(1-k) \\ n.(1-k) \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{X}^{**} = \mathbb{A}^T.\mathbb{X} + \mathbb{B}$$

Z hodnoty determinantu $|\mathbb{A}^T| = -k^2$ vyplýva, že ide o **nepriamu podobnosť** s koeficientom k.

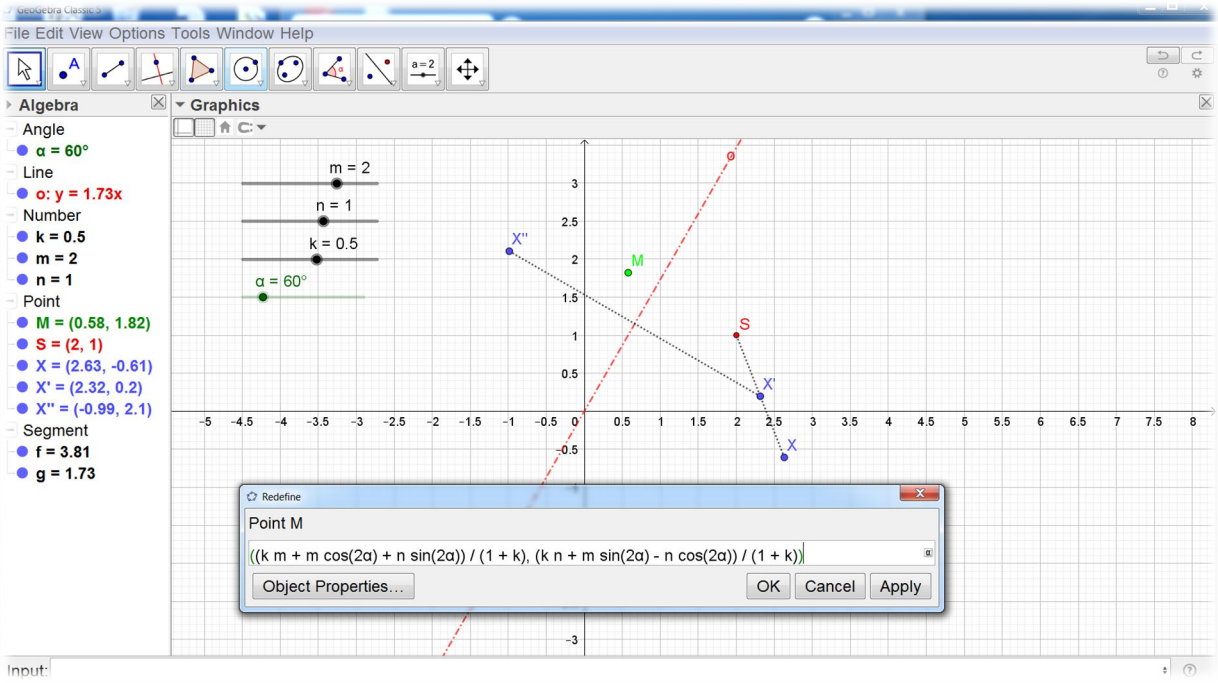
Vlastná podobnosť má podľa kap. 4.3.1 jediný samodružný bod.

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte sa presvedčte, že pre súradnice samodružného bodu platí:

$$x_M^{**} = x_M = \frac{k.m + m.\cos 2\alpha + n.\sin 2\alpha}{1+k}, \qquad y_M^{**} = y_M = \frac{k.n + m.\sin 2\alpha - n.\cos 2\alpha}{1+k}$$

a výsledok overte graficky vo vhodnom dynamickom softvéri. Návod je na obr. 4.19.



Obr. 4.19. *GeoGebra Classic 5.0.803.0/d* (verzia z 19. septembra 2023)

Samodružné vektory by sme vypočítali asociovaného zobrazenia daného vyjadrením $\mathbb{U}^{**} = \mathbb{A}^T.\mathbb{U}$.

Výpočet by bol rovnaký ako v prípade pre $S[0,0]$, pretože matica $\mathbb{B}$ neovplyvňuje výpočet. Odvodili by sme dva samodružné vektory (smerový a normálový vektor osi súmernosti o, t.j $\vec{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ pre $\lambda_1 = k$ a $\vec{v} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ pre $\lambda_2 = -k$). Aj v tomto prípade ide o ***CPS***.

Poznamenávame, že možno dokázať: $\mathcal{S}_o \circ \mathcal{H}[S,k] \neq \mathcal{H}[S,k] \circ \mathcal{S}_o$. Ukážeme na príklade.

Príklad

Určte analytické vyjadrenie CPS, ak je výsledkom skladania rovnoľahlosti $\mathcal{H}\left(S,\frac{1}{2}\right)$, kde $S[2,1]$ a osovej súmernosti $\mathcal{S}_o$, kde $o: \frac{\sqrt{3}}{2}.x - \frac{1}{2}.y = 0$. Vypočítajte samodružný bod a samodružné vektory.

Riešenie

a) Uvažujme skladanie $\mathcal{S}_o \circ \mathcal{H}\left(S,\frac{1}{2}\right)$ (obr. 4.19). Dosadíme do vyššie odvodených rovníc a platí:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}.\cos 120° & \frac{1}{2}.\sin 120° \\ \frac{1}{2}.\sin 120° & -\frac{1}{2}.\cos 120° \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 120° & \sin 120° \\ \sin 120° & -\cos 120° \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2.\left(1-\frac{1}{2}\right) \\ 1.\left(1-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2.\left(1-\frac{1}{2}\right) \\ 1.\left(1-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$x^{**} = -\frac{1}{4}.x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{-2+\sqrt{3}}{4}$$
$$y^{**} = \frac{\sqrt{3}}{4}.x + \frac{1}{4}.y + \frac{1+2\sqrt{3}}{4}$$

Súradnice samodružného bodu $M = M^*$ vypočítame zo sústavy:

$$x = -\frac{1}{4}.x + \frac{\sqrt{3}}{4}.y + \frac{-2+\sqrt{3}}{4}$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{4}.x + \frac{1}{4}.y + \frac{1+2\sqrt{3}}{4}$$
$$\vdots$$
$$\Downarrow$$
$$x_M = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad y_M = \frac{2+2\sqrt{3}}{3}.$$

Samodružné vektory zistíme z asociovaného zobrazenia s analytickým vyjadrením:

$$u_1^* = -\frac{1}{4}.u_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}.u_2 = \lambda.u_1$$
$$u_2^* = \frac{\sqrt{3}}{4}.u_1 + \frac{1}{4}.u_2 = \lambda.u_2$$

Charakteristická rovnica je určená determinantom rovným 0, t.j:

$$0 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\frac{1}{16} + \lambda^2 - \frac{3}{16} \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$$

Odpovedajúce samodružné vektory sú: $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ a $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Uvažujme skladanie $\mathcal{H}\left(S, \frac{1}{2}\right) \circ \mathcal{S}_o$. Odvodíme:

$$x^{**} = -\frac{1}{4}.x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + 1$$
$$y^{**} = \frac{\sqrt{3}}{4}.x + \frac{1}{4}.y + \frac{1}{2}$$

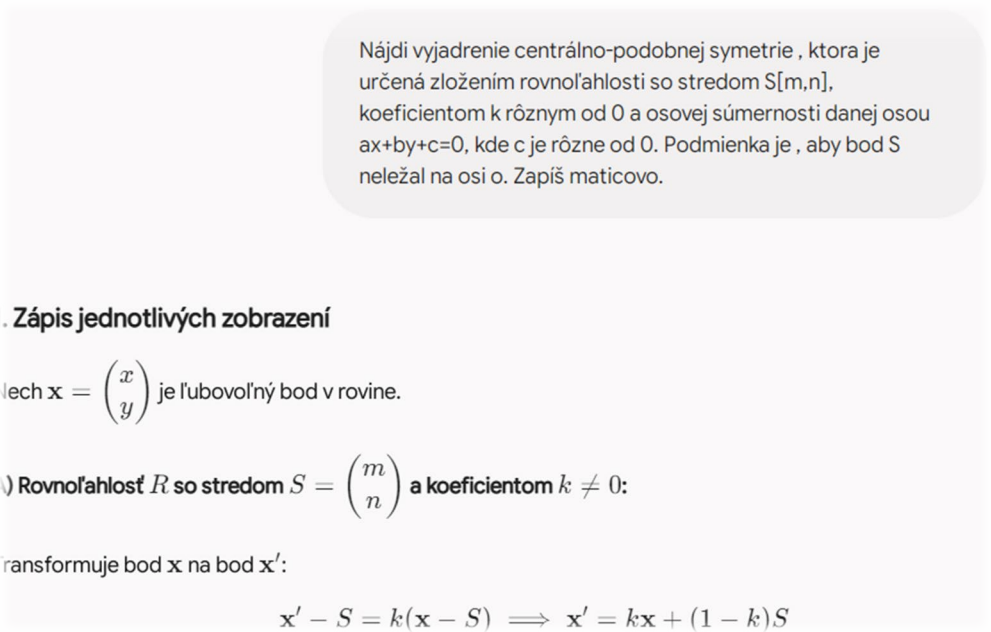
Samodružným bodom je bod $N\left[\frac{6+\sqrt{3}}{6}, \frac{5+2\sqrt{3}}{6}\right]$, pre ktorý platí: $\mathcal{S}_o: M \longrightarrow N$, kde $M\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2+2\sqrt{3}}{3}\right]$, je samodružný bod zobrazenia $\mathcal{S}_o \circ \mathcal{H}\left(S, \frac{1}{2}\right)$.

Samodružnými vektormi sú:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{a} \quad \vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Úloha

Pomocou nástroja umelej inteligencie určte analytické vyjadrenie $\mathcal{S}_o \circ \mathcal{H}[S,k]$, ak $S[m,n], k \neq \pm 1$, a $o: ax + by + c = 0, c \neq 0$ a súčasne $S \notin o$. Nájdite súradnice samodružného bodu a výsledok overte graficky vo vhodnom dynamickom softvéri. Návod je na obr. 4.20.



Obr. 4.20. Google. (2026). *Gemini* (Verzia z 4. októbra 2026) [Veľký jazykový model]. https://gemini.google.com

Príklad

Podobnosti $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ má analytické vyjadrenie

$$x^* = \frac{3}{10}x - \frac{2}{5}y + \frac{79}{10}$$
$$y^* = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{10}y + \frac{43}{10}.$$

Nájdite vhodný rozklad tejto podobnosti na rovnoľahlosť $\mathcal{H}(S,k)$ a zhodnosť $\mathcal{S}$.

Riešenie

a) Pomocou determinantu matice zobrazenia g zistíme, či ide o priamu alebo nepriamu podobnosť a určíme koeficient podobnosti. Vypočítame:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \end{vmatrix} = -\frac{9}{100} - \frac{4}{25} = -\frac{25}{100} = -\frac{1}{4}$$

Ide o **nepriamu** podobnosť , teda CPS s **koeficientom podobnosti** $k = \frac{1}{2}$ a osou súmernosti o.

b) Vypočítame samodružný bod – stred príslušnej CPS.

$$x = \frac{3}{10}x - \frac{2}{5}y + \frac{79}{10}$$
$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{10}y + \frac{43}{10}$$

$$\vdots$$

$$x = \frac{57}{5}, \qquad y = -\frac{1}{5}.$$

Samodružný bod je $S\left[\frac{57}{5}, -\frac{1}{5}\right]$.

c) Vypočítame samodružné vektory asociovaného zobrazenia:

$$u_1^* = \frac{3}{10}u_1 - \frac{2}{5}u_2 = \lambda.u_1$$
$$u_2^* = -\frac{2}{5}u_1 - \frac{3}{10}u_2 = \lambda.u_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Charakteristickým číslam odpovedajú vektory:

$$\vec{u} = (2,-1) \text{ pre } \lambda_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad \vec{v} = (1,2) \text{ pre } \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

pričom jeden z nich je normálový a druhý smerový vektor osi súmernosti o.

d) Ak normálovým vektorom je $\vec{u} = (2,-1)$, potom os súmernosti označme o_u a určíme jej rovnicu:

$$2x - y + c = 0.$$

Os súmernosti o_u položíme do $\mathbb{E}_2$ tak, aby prechádzala[81] samodružným bodom $S\left[\frac{57}{5}, -\frac{1}{5}\right]$.

Vypočítame:

$$2.\frac{57}{5} + \frac{1}{5} + c = 0 \implies c = -23.$$

Rovnica potenciálnej osi súmernosti o_u: $\qquad 2x - y - 23 = 0 \implies y = 2x - 23.$

Os súmernosti o_u pretína súradnicovú os y v bode $Q_u[0,-23]$.

Ďalej z toho, že $2 = \tan\alpha$, vyplýva:

$$\sin\alpha = 2.\cos\alpha \quad /^2$$
$$\sin^2\alpha = 4.\cos^2\alpha = 4.(1 - \sin^2\alpha)$$
$$\vdots$$
$$\sin\alpha = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Keďže uvažujeme normálový vektor $\vec{u} = (2,-1)$, ktorý v súradnicovej sústave smeruje do 4. kvadrantu , platí: $\alpha < 90°$ a teda $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

Z toho vyplýva:

$$\sin 2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha = \cdots = \frac{4}{5}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cdots = -\frac{3}{5}.$$

e) Napíšeme analytické vyjadrenia[82] pre príslušnú[83] rovnoľahlosť $\mathcal{H}_u\left(S, k = -\frac{1}{2}\right)$ a osovú súmernosť $\mathcal{S}_{o_u}$:

---

[81] Výhoda spočíva v tom, že v tom prípade platí: $\mathcal{H} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{H}$.

[82] Pozri príklad v kap. 4.3.3 a kap. 3.3.5.

[83] Ukázali sme, že $\lambda_1 = -k$ je koeficient **príslušnej** rovnoľahlosti. Pozri kap. 4.3.2.

$$\mathcal{H}_u:\ \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{57}{5} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ -\frac{1}{5} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{171}{10} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S}_{o_u}:\ \begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(-23).\sin 2\alpha \\ (-23).(1+\cos 2\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{92}{5} \\ -\frac{46}{5} \end{pmatrix}.$$

f) „Skúškou správnosti“ overíme, či platí: [84]

$$g = \mathcal{S}_{o_u} \circ \mathcal{H}_u\left(S, -\frac{1}{2}\right).$$

V zobrazení $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ s analytickým vyjadrením

$$x^* = \frac{3}{10}x - \frac{2}{5}y + \frac{79}{10}$$
$$y^* = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{10}y + \frac{43}{10}.$$

sa bod $O[0,0]$ zobrazí do bodu $\boldsymbol{O^*}\left[\frac{79}{10}, \frac{43}{10}\right]$.

Počítame pravú stranu rovnosti: $g = \mathcal{S}_{o_u} \circ \mathcal{H}_u\left(S, -\frac{1}{2}\right)$.

V rovnoľahlosti $\mathcal{H}_u\left(S, -\frac{1}{2}\right)$ s analytickým vyjadrením

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{171}{10} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

sa bod $O[0,0]$ zobrazí do bodu $O_u^*\left[\frac{171}{10}, -\frac{3}{10}\right]$.

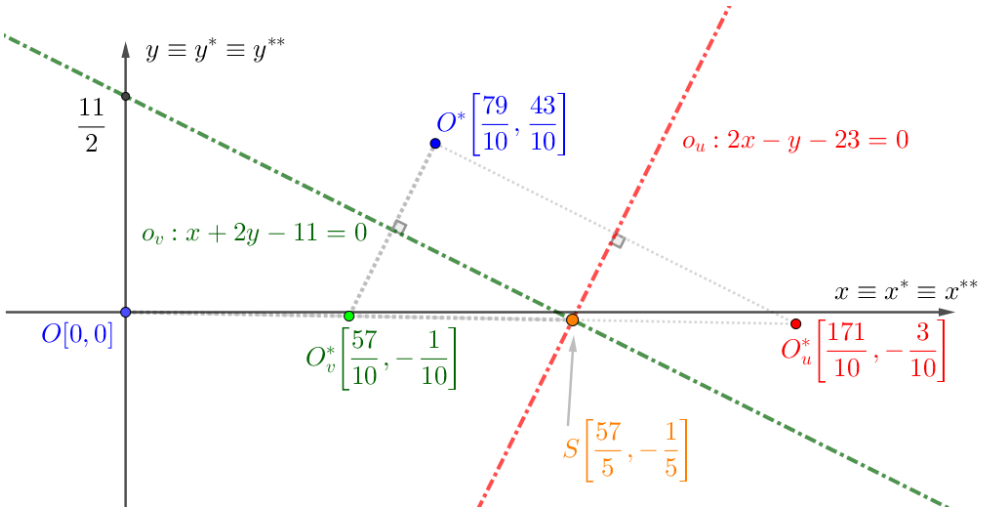
Následne sa bod $O_u^*\left[\frac{171}{10}, -\frac{3}{10}\right]$ v osovej súmernosti $\mathcal{S}_{o_u}$ zobrazí do bodu $O^{**}[x^{**}, y^{**}]$, ktorého súradnice vypočítame z analytického vyjadrenia:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{171}{10} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{92}{5} \\ -\frac{46}{5} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{79}{10}} \\ \boldsymbol{\frac{43}{10}} \end{pmatrix}.$$

[84] V podstate overujeme predpoklad, že sme vektor $\vec{u} = (2, -1)$ vybrali oprávnene ako normálový vektor osi súmernosti o.

Záver 1.

Podobnosť $g\colon \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ je centrálno – podobnou symetriou s koeficientom $k = \frac{1}{2}$, stredom $S\left[\frac{57}{5}, -\frac{1}{5}\right]$ a osou súmernosti $o_u\colon 2x - y - 23 = 0$, pričom platí: $g = \mathcal{S}_{o_u} \circ \mathcal{H}_u\left(S, -\frac{1}{2}\right)$.



Obr. 4.21

g) Analogicky, ak normálovým vektorom je $\vec{v} = (1,2)$, potom os súmernosti označme o_v a určíme jej rovnicu:

$$x + 2y - 11 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}.$$

Os súmernosti o_v pretína súradnicovú os y v bode $Q_v\left[0, \frac{11}{2}\right]$.

Ďalej $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$. Z toho vyplýva, že $90° < \alpha < 180°$ a platí:

$$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}, \qquad \cos 2\alpha = \frac{3}{5}.$$

Rovnoľahlosť $\mathcal{H}_v\left(S, k = +\frac{1}{2}\right)$ a osovú súmernosť $\mathcal{S}_{o_v}$:

$$\mathcal{H}_v\colon \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{57}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{57}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S}_{o_v}\colon \begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \cdot \sin 2\alpha \\ \frac{11}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{44}{10} \\ \frac{88}{10} \end{pmatrix}.$$

„Skúškou správnosti“ overíme, či platí:

$$g = \mathcal{S}_v \circ \mathcal{H}_v\left(S, \frac{1}{2}\right).$$

V zobrazení $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ s analytickým vyjadrením

$$x^* = \frac{3}{10}x - \frac{2}{5}y + \frac{79}{10}$$
$$y^* = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{10}y + \frac{43}{10}.$$

sa bod $O[0,0]$ zobrazí do bodu $\boldsymbol{O^*\left[\frac{79}{10}, \frac{43}{10}\right]}$.

Počítame pravú stranu rovnosti: $g = \mathcal{S}_v \circ \mathcal{H}_v\left(S, \frac{1}{2}\right)$.

V rovnoľahlosti $\mathcal{H}_v\left(S, \frac{1}{2}\right)$ s analytickým vyjadrením

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{57}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

sa bod $O[0,0]$ zobrazí do bodu $O_v^*\left[\frac{57}{10}, -\frac{1}{10}\right]$. Následne sa bod $O_v^*\left[\frac{57}{10}, -\frac{1}{10}\right]$ v osovej súmernosti $\mathcal{S}_{o_v}$ zobrazí do bodu $O^{**}[x^{**}, y^{**}]$, ktorého súradnice vypočítame z analytického vyjadrenia:

$$\begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{57}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{44}{10} \\ \frac{88}{10} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{79}{10}} \\ \boldsymbol{\frac{43}{10}} \end{pmatrix}.$$

h) **Záver 2**.

Podobnosť $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ je centrálno – podobnou symetriou s koeficientom $k = \frac{1}{2}$, stredom $S\left[\frac{57}{5}, -\frac{1}{5}\right]$ a osou súmernosti $o_v: x + 2y - 11 = 0$, pričom platí: $g = \mathcal{S}_v \circ \mathcal{H}_v\left(S, \frac{1}{2}\right)$.

4.5 Cvičenie

1. Na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$ sa zobrazujú body nasledovne: $A[2] \longrightarrow A^*[-1], B[6] \longrightarrow B^*[11]$. Určte analytické vyjadrenie zobrazenia a overte, či ide o podobnosť.
2. Na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$ určte priamu podobnosť s analytickým vyjadrením $x^* = ax + b$ tak, aby koeficient podobnosti $k = 3$ a bod $S[4]$ bol samodružným bodom.
3. Afinné zobrazenia na euklidovskej priamke $\mathbb{E}_1$ majú analytické vyjadrenia f_1: $x^* = -2x + 5$ a f_2: $x^* = \frac{1}{2}x - 1$. Napíšte analytické vyjadrenie $f_2 \circ f_1$, určte koeficient k, typ podobnosti a existenciu samodružného bodu.

4. Priama podobnosť $g: \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ zobrazuje $A[0,0] \longrightarrow A^*[1,2], B[1,0] \longrightarrow B^*[1,5]$. Napíšte analytické vyjadrenie zobrazenia, určte koeficient k a vypočítajte samodružné body a samodružné vektory.

5. V rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S, 2)$, kde $S[2, -1]$ určte:

   a) obrazy bodov $A[-1, -1], B[4,0]$,

   b) vzory bodov $C^*[5,5]$, $D^*[0,0]$,

   c) obraz priamky $2x + 3y = 5$,

   d) vzor priamky $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{4} = t, t \in R$

   e) obraz kružnice $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$,

   f) vzor kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

6. Vzdialenosť stredov dvoch prevodových kolies s polomermi $2cm$ a $25cm$ sa rovná $25cm$. Aký dlhý je klinový remeň na priamy prevod (kolesá rotujú v rovnakom smere), ktorý je napnutý medzi obomi kolesami?

7. Napíšte analytické vyjadrenie podobnosti v $\mathbb{E}_2$, ktoré je zložením:

   a) $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$, ak $\mathcal{H}_1\left(S_1, -\frac{1}{3}\right), S_1[0, 2], \mathcal{H}_2\left(S_2, -\frac{1}{5}\right), S_2[3,0]$,

   b) $\mathcal{H} \circ \mathcal{S}_p$, ak $\mathcal{H}\left(S, \frac{1}{4}\right), S[-1,1], p: 3x + y + 2 = 0$,

   c) $\mathcal{H} \circ \mathcal{S}_q$, ak $\mathcal{H}\left(S, \frac{1}{4}\right), S[-1,1], q: 5x - 2y = 0$,

   d) $\mathcal{H} \circ \mathcal{S}(S, -60°)$, ak $\mathcal{H}(S, 2), S[0,0]$,

   e) $\mathcal{H} \circ \mathcal{S}(S_2, +45°)$, ak $\mathcal{H}\left(S_1, -\frac{1}{2}\right), S_1[0,0], S_2[-1,3]$,

   Určte koeficienty , samodružné body a samodružné vektory.

8. Podobnosť g v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ má analytické vyjadrenie

$$x^* = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$$
$$y^* - \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

   Určte rovnoľahlosť $\mathcal{H}$ a súmernosť $\mathcal{S}$ tak, aby $g = \mathcal{H} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{H}$.

9. Dve úsečky AB, A^*B^* rôznych dĺžok sú umiestnené euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$. Vo vhodnom dynamickom softvéri vymodelujte konštrukciu podobnosti g, ktorá zobrazí $AB \longrightarrow A^*B^*$. Konštrukčne určte stred podobnosti.

10. Pomocou vhodného dynamického softvéru vymodelujte v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ obrazy grafov funkcií $y = a.\sin(bx + c)$, $y = E(x)$ (celá časť z x) v CPR so stredom $S[m, n]$ a uhlom $\alpha \in (0°, 180°)$.

11. Pomocou vhodného nastroja umelej inteligencie navrhnite priamy prevod dvoch kolies tak, aby vzdialenosť stredov kolies, veľkosti polomerov kolies, ako aj dĺžka prevodového remeňa boli prirodzené čísla.

12. Pomocou vhodného nastroja umelej inteligencie navrhnite konštrukciu fraktálu, v ktorej sa použije podobnosť v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$.

Index

A

afinná/é/ý	nadrovina	18, 30
	priamka	17,18
	rovina	18
	zobrazenie	20, 21, 23, 25, 26
	bod	18
	podpriestor	17,18
	priestor	8, 10, 11, 12
analytické	vyjadrenie	23, 25, 26
asociované	zobrazenie	21, 26

B

báza	priestoru	16
bod/y	kombinácia lineárna	17, 22
	kolineárne	7, 20
	samodružný	26

Č

číslo	vlastné	28

D

dimenzia	priestoru	11, 16, 17
DGS		6, 6, 14
dotyčnica	spoločná	95, 97

G

grupa	Abelova	8
	dihedrálna	73
	zhodnosti	36, 37, 38, 52, 54, 55

K

koeficient	podobnosti	78

M

matica	zobrazenia	27

N

nosič	priestoru	12

P

podobnosť	priama	84, 87
	nepriama	36, 39
pomer	deliaci	7, 8
posunutie		36, 41, 42
priestor	afinný	8
	euklidovský	15
	metrický	34

R

rotácia	centrálno- podobná	43, 88, 109
rovnica	charakteristická	28
	nadrovinovej afinity	30
rovnoľahlosť		80, 89, 92, 93, 108

O

os	podobnosti	104
osová	súmernosť	46, 48
otočenie		43

S

smer	samodružný	17, 27, 28
skladanie	zobrazení	37
	osových súmerností	57, 72
	rovnoľahlostí	108
stred	rovnoľahlosti	87, 93, 101
súmernosť	posunutá	49
	rovinová	74
	stredová	36
symetria	centrálno- podobná	89, 113

U

úloha	Gamova	56

V

vektor	voľný, viazaný	7, 12
veta	Monge	102
	o redukcii počtu	71

Z

zameranie	afinného priestoru	12

zhodnosť 34
zobrazenie inverzné 37, 54
involutorné 37, 54
podobné 78, 84, 87, 88
regulárne 20
singulárne 20

Zoznam použitej a odporúčanej literatúry

[1] Páleníková K, Záhorská J., Vargová M., Rumanová L. (2020). *Základy matematiky 2*, Ed. Prírodovedec č. 725, FPV UKF v Nitre

[2] Palumbíny D. (1997). *Algebra 1*. FPV UKF v Nitre

[3] Sekanina M., Boček L., Kočandrle M., Šedivý J. (1986). *Geometrie I*. SPN Praha

[4] Šedivý O., Vallo, D. (2011). *Geometria III*. FPV UKF v Nitre, Nitra

[5] De Villiers, M. (20. november 2023). *Treasure hunt*. Dynamic Mathematics Learning. Online: http://dynamicmathematicslearning.com/treasure-hunt.html

[6] Šedivý O, Božek M., Duplák J., Kršňák P., Trenkler M. (1987). *Geometria* 2. SPN Bratislava

[7] Moore W.J. (1981). *Fyzikální chemie*. SNTL Praha

[8] Vallo D., Kobza V. (2024). *Geometria kvadratických plôch*. FPVaI UKF v Nitre, Nitra. Online: https://doi.uk.ukf.sk/index.php/fpv-edicia-prirodovedec/catalog/book/64

[9] Kaenders, R., & Schmidt, R. 2011. *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen*. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden. [15] www.geogebra.org [Dostupné online: 26. júna 2023]

Názov: **Úvod do afinnej geometrie**

Podnázov: Afinné zobrazenia

Autor: Dušan Vallo

Vydavateľ: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Edícia: Prírodovedec č. 929

Návrh obálky: Dušan Vallo

Formát: A4

Rok vydania: 2026

Miesto vydania: Nitra

Počet strán: 126

Počet kusov: vydané v elektronickej podobe

ISBN 978-80-558-2433-8

